وزارة التربية

الرياضيات والإحصاء

الجزء الثاني

للصف الثاني عشر

المرحلة الثانوية

الطبعة الثانية

إهداء خاص من
Y kuwait.net
منتديات ياكويت

وزارة التربية

الرياضيات والإحصاء

الجزء الثاني
للصف الثاني عشر

تأليف

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيساً)

أ. د. ممدوح محمد سليمان د. شفيقة عبدالحميد العوضي

أ. محمود عبدالغني محمد أ. إلهام عفيفي علي

أ. نجوى محمد وسيم عبدالرازق أ. فتحي محمد عبدالفتاح

أ. وداد محمد سعود بوعباس

الطبعة الثانية

١٤٣٢ - ١٤٣٣هـ

٢٠١١ - ٢٠١٢م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج

إدارة تطوير المناهج

الطبعة الأولى : ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م

الطبعة الثانية : ٢٠١١ - ٢٠١٢م

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتوى

الموضوع | الصفحة

المقدمة ١١

الفصل الأول ١

التقدير واختبارات الفروض الإحصائية Estimation & Tests of statistical Hypotheses ١٣

١ - ١ التقدير ١٥

١ - ١ أ التقدير بنقطة ١٥

١ - ١ ب التقدير بفترة الثقة ١٦

١ - ٢ اختبارات الفروض الإحصائية ٢٣

١ - ٢ أ الفروض الإحصائية ٢٣

١ - ٢ ب الاختبار الإحصائي ٢٤

١ - ٣ تمارين عامة ٣٢

الفصل الثاني ٢

الارتباط والانحدار Correlation and Regression ٣٥

المقدمة ٣٧

٢ - ١ الارتباط ٣٨

٢ - ١ أ الشكل الانتشاري ٣٨

٢ - ١ ب قيمة معامل الارتباط ٤١

٢ - ١ حـ معامل ارتباط بيرسون ٤١

٢ - ٢ الانحدار ٤٩

٢ - ٢ أ معادلة خط الانحدار ٥٠

٢ - ٣ تمارين عامة ٥٥

المحتوى

الموضوع | الصفحة

الفصل الثالث ٣

السلاسل الزمنية ٥٩

٣ - ١ السلسلة الزمنية ٦١

٣ - ١ أ مقدمة ٦١

٣ - ١ ب المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية ٦٢

٣ - ١ جـ التمثيل البياني للسلسلة الزمنية ٦٢

٣ - ٢ عناصر السلسلة الزمنية ٦٧

- الاتجاه العام ٦٧

- التغيرات الموسمية ٦٨

- التغيرات الدورية ٦٩

- التغيرات العرضية ٦٩

٣ - ٣ تحليل السلاسل الزمنية ٧٢

٣ - ٣ أ معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية ٧٢

٣ - ٤ تمارين عامة ٨١

- جدول (١) ٨٤

- جدول (٢) ٨٦

المراجع ٨٧

المقدمة

إن دور الرياضيات بفروعها المختلفة ضروري ومهم ومحوري في بناء العقلية العلمية الواعية والمرتبة القادرة على التفكير السليم بمستوياته المتعددة، ابتداءً بالتفكير المبني على الملاحظة وإدراك العلاقات، ومروراً بالتفكير الناقد ووصولاً إلى التفكير الابتكاري والإبداعي، والتمكن من حل المشكلات في الحياة المعاصرة.

وإلى جانب دور الرياضيات في تقديم الحلول للكثير من المشاكل والمعضلات التي تواجه العلماء والباحثين في شتى علوم الطبيعة، فقد اهتمت الدول المتقدمة بالرياضيات لعظيم دورها في دفع عجلة النهضة والرقي الحضاري.

هذا وقد أدرك المسلمون الأوائل أهمية الرياضيات ودورها، فاهتموا بدراستها، ونبغ منهم علماء أفذاذ قدموا للبشرية الكثير، وتتلمذ على أيديهم علماء الغرب وأفادوا بعلمهم أوروبا والعالم بأسره.

ويعد علم الإحصاء علماً مهماً من بين علوم الرياضيات التي تخدم باقي العلوم، وتفيد بتطبيقاتها شتى مجالات الحياة.

وقد ازدادت أهمية هذا العلم خاصة في السنوات الأخيرة، وتجاوز أن يكون مجرد فرع من فروع الرياضيات إلى أن أصبح علماً قائماً بذاته، له أساليبه وأسسه وقواعده، وكذا فروعه المختلفة حتى دخلت أفكاره في أغلب العلوم الأخرى، مثل علم الفيزياء والكيمياء، وأفرع الهندسة المختلفة، والبيولوجي والفسيولوجي، وعلم النفس وعلوم الإدارة، والعلوم السياسية والاقتصادية والعسكرية إلى جانب البحوث العلمية والتربوية بأنواعها المختلفة.

وفي وقتنا الحاضر اشتدت الحاجة للإحصاء لبناء العقلية الاحتمالية وإعداد البحوث العلمية، وخدمة علم الإدارة الحديثة وغير ذلك من تطبيقاته، لما تقدمه من قواعد ونظريات وطرق علمية تساعد على تعرف طرق جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها والاستفادة منها في التنبؤ العلمي، وبناء الرؤى المستقبلية التي يحتاجها متخذي القرار في وضع الخطط، ورسم الاستراتيجيات على كافة المستويات.

من أجل ذلك كله، وانسجاماً مع توجهات وزارة التربية بدولة الكويت لتطوير التعليم ليلبي

حاجات المجتمع ويتناغم مع مناهج الرياضيات العالمية، ويكون قادراً على تهيئة طلابنا لدراسة جامعية تحقق مخرجات أكثر تأهيلاً للتعامل مع المستجدات العلمية والتربوية التي يشهدها العالم اليوم، ومن هنا نقدم هذا المقرر لأبنائنا في مادة الرياضيات والإحصاء للصف الثاني عشر، كمقرر من مقررات النظام الموحد في المرحلة الثانوية للعام الدراسي ٢٠٠٨/٢٠٠٩م.

هذا ويأمل القائمون على إعداد هذا المقرر والمشرفون عليه أن يحقق الأهداف المرجوة منه، وأن يخدم العملية التربوية والتعليمية ويساهم في تطويرها.

والله ولي التوفيق،،،

المؤلفون

الفصل الأول

التقدير واختبارات الفروض

Estimation & Tests of statistical Hypotheses

١ - ١ التقدير

١ - ١أ التقدير بنقطة .

١ - ١ب التقدير بفترة الثقة .

١ - ٢ اختبارات الفروض الإحصائية

١ - ٢أ الفروض الإحصائية

١ - ٢ب الاختبار الإحصائي

١ - ٣ تمارين عامة .

١ - ١ التقدير

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية، والأسباب التي تؤدي إلى أخذ العينات لدراسة المجتمع بدلاً من الحصر الشامل. وكذلك درسنا بعض التوزيعات الاحتمالية مثل توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى التي تحتوى على معالم Parameters مثل الوسط μ أو الانحراف المعياري σ، ويتحدد شكل التوزيع تماماً بتحديد قيم هذه المعالم.

وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة في المجتمع، لتقدير تلك المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، لذلك لابد من البحث عن أنسب دالة أو إحصاء (Statistic) تعتمد على قيم العينة، ولا تعتمد على المعالم المجهولة للمجتمع وبصفة عامة المعالم هي مقادير ثابتة للمجتمع الواحد ولكنها تتغير من مجتمع إلى آخر وكل مجتمع يُعرف من معالمه.

لتقدير هذه المعالم هناك طريقتان أساسيتان للتقدير هما التقدير بنقطة والتقدير بفترة ثقة ونوضح كلاً منهما فيما يلي، ثم نتناول بعد ذلك اختبارات الفروض التي تتطلب منا معرفة طبيعة العلاقة بين التوزيع الأصلي للمجتمع ومعالمه.

تذكر أن:

١ المعلمة Parameter هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالوسط الحسابي أو الانحراف المعياري له. (مثل μ أو σ)

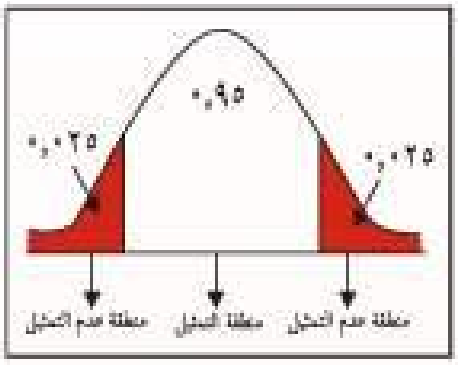
٢ الإحصاءة Statistic هو ثابت تتعين قيمته من العينة، كالوسط الحسابي أو الانحراف المعياري لها (مثل $\bar{س}$ أو ع).

١ - ١أ التقدير بنقطة Point Estimation

لكل مجتمع إحصائي معالم قد تكون غير معلومة مثل الوسط μ أو الانحراف المعياري σ ويمكن إيجاد تقديرات لهذه المعالم من بيانات مأخوذة من عينة عشوائية من المجتمع الإحصائي وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، فمثلاً الوسط الحسابي للعينة العشوائية $\bar{س}$ يستخدم كتقدير للوسط الحسابي للمجتمع μ وكذلك الانحراف المعياري ع يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ وتسمى هذه التقديرات بنقطة لأنها قيمة وحيدة محسوبة من العينة. ومثال ذلك إذا أردنا إيجاد قيمة تقديرية لمتوسط طول الطلاب الدارسين لمقرر الرياضيات والإحصاء فى أحد فصول الصف الثاني عشر بأخذ عينة عشوائية من هؤلاء الطلاب وتحسب متوسط طول طلاب هذه العينة وليكن $\bar{س}$ = ١٦٠سم فإنه يمكن القول إن القيمة التقديرية لمتوسط أطوال الطلاب الدارسين لمقرر الرياضيات والإحصاء μ = ١٦٠سم.

١-١ب التقدير بفترة الثقة Interval Estimation (confidence Interval)

التقدير بفترة لإحدى معالم المجتمع المجهولة مثل μ أو σ هي عبارة عن إيجاد فترة تُحدد بقيمتين تحسب من مشاهدات العينة العشوائية المأخوذة من المجتمع محل الدراسة، ونتوقع احتواء هذه الفترة على معلمة المجتمع باحتمال معين $(١ - \alpha)$ (يسمى نسبة الثقة في التقدير) حيث α (تعبر عن نسبة الخطأ في التقدير) تأخذ عادة قيماً صغيرة مثل ٠,٠١، ٠,٠٥، ٠,١ وكلما كان طول الفترة صغيراً زادت دقة التقدير لذلك سميت بتقدير فترة الثقة.



منطقة تمثيل وعدم تمثيل الإحصاءة $\overline{س}$ للمعلمة μ عند $(١ - \alpha) = ٠,٩٥$

سوف نتطرق لتقدير فترة الثقة لمعلمة واحدة فقط وهي الوسط الحسابي للمجتمع μ في حالتين هما:

أولاً: فترة الثقة للوسط μ في حالة التباين $\sigma^٢$ معلوم

نظرية (١)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع ط $(\mu ، \sigma^٢)$ وتباينه $\sigma^٢$ معلوم فإن تقدير فترة ثقة ١٠٠٪ $(١ - \alpha)$ للوسط μ هي:

$$\left(\overline{س} - ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \ ، \ \overline{س} + ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}\right)$$

حيث $\overline{س}$ هو الوسط الحسابي للعينة العشوائية، $ق_{١-\frac{\alpha}{٢}}$ هي القيمة من جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري لحساب الطرف الأيسر من المساحة $١ - \frac{\alpha}{٢}$.

ملاحظة:

سوف تقتصر الأمثلة لفترة الثقة ٩٥٪ ومنه $\alpha = ٠,٠٥$، $\frac{\alpha}{٢} = ٠,٠٢٥$، $١ - \frac{\alpha}{٢} = ٠,٩٧٥$

إذن $ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} = ق_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري)

مثال ١

أخذت عينة عشوائية حجمها ن = ٢٥ من مجتمع ط (μ ، ١٦) فوجد أن $\overline{س}$ = ١٢,٥

أوجد فترة ٩٥٪ ثقة للمعلمة المجهولة μ

الحل

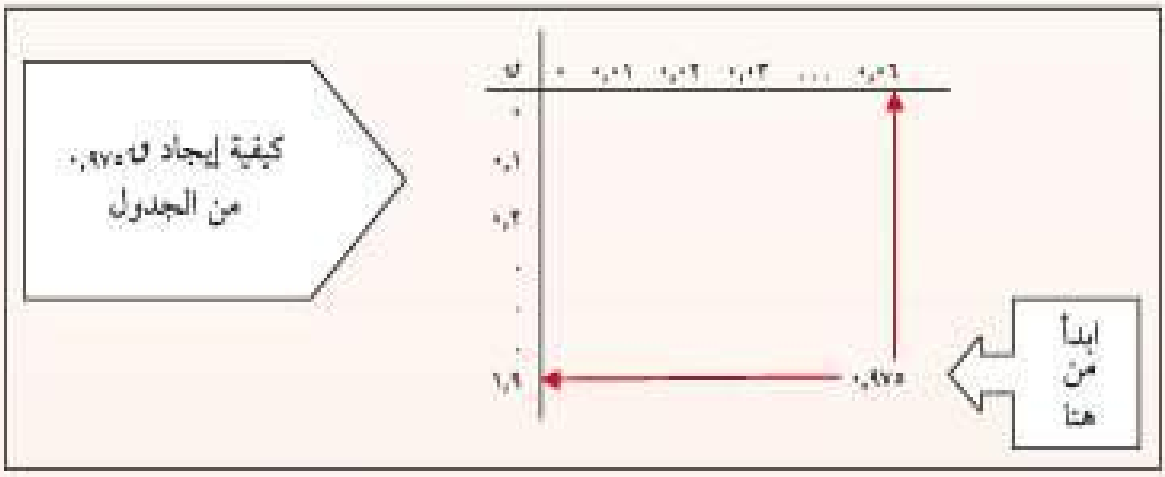
المجتمع طبيعي وتباينه معلوم σ^2 = ١٦ وقيمة الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ = ١٢,٥

بما أن فترة الثقة ٩٥٪

إذن (١ − α) = ٠,٩٥ ← α = ٠,٠٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥

١ − $\frac{\alpha}{٢}$ = ١ − ٠,٠٢٥ = ٠,٩٧٥

$ق_{١-\frac{\alpha}{٢}}$ = $ق_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري رقم ١)



بالتعويض في فترة الثقة كما في النظرية:

$$\left(\overline{س} - ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \ ، \ \overline{س} + ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}\right)$$

$$\left(١٢,٥ - ١,٩٦ \times \frac{٤}{\sqrt{٢٥}} \ ، \ ١٢,٥ + ١,٩٦ \times \frac{٤}{\sqrt{٢٥}}\right)$$

(١٠,٩٣٢ ، ١٤,٠٦٨)

أي أن قيمة μ تقع في الفترة (١٠,٩٣٢ ، ١٤,٠٦٨)

بدرجة ثقة ٩٥ ٪ وخطأ ٥٪

لاحظ أن:

العدد ١,٩٦ حصلنا عليه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري جواباً للسؤال (ما القيمتان المتماثلتان اللتان تحصران بينهما ٠,٩٥ من المساحة تحت التوزيع الطبيعي المعياري) وكان الجواب -١,٩٦ ، ١,٩٦

تفسير فترة الثقة :

التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن ٩٥٪ من فترات الثقة ستحوي μ وأن ٥٪ منها فقط لاتحويها وبمعنى آخر إذا أخذت مائة عينة عشوائية ذات الحجم ن وفي كل مرة نحسب $\bar{س}$ ونحسب فترة الثقة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة تحوي μ الحقيقية. ويمكننا القول بأننا واثقين بدرجة ٩٥٪ أن القيمة الحقيقية للمعلمة μ تقع فى الفترة (١٠,٩٣٢ ، ١٤,٠٦٨)

مثال ٢

أوجد فترة ٩٥٪ ثقة للمعلمة المجهولة μ في مجتمع طبيعي تباينه ٦٤ إذا اخترت عينة عشوائية حجمها ن = ٩ وكان وسطها الحسابي $\bar{س}$ = ٣٢

الحل

بما أن فترة الثقة ٩٥ ٪

إذن $(١ - \alpha) = ٠,٩٥ \leftarrow \alpha = ٠,٠٥ \leftarrow \frac{\alpha}{٢} = ٠,٠٢٥$

$١ - \frac{\alpha}{٢} = ١ - ٠,٠٢٥ = ٠,٩٧٥$

$ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} = ق_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري)

ملاحظة :

دائماً إذا كانت فترة الثقة ٩٥ ٪ فإن $ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} = ق_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$

بالتعويض في فترة الثقة ٩٥٪ للوسط μ هي :

$$\left(٣٢ - ١,٩٦ \times \frac{٨}{\sqrt{٩}} ، ٣٢ + ١,٩٦ \times \frac{٨}{\sqrt{٩}}\right)$$

(٢٦,٧٧٣ ، ٣٧,٢٢٧)

أي أن قيمة μ تقع في الفترة (٢٦,٧٧٣ ، ٣٧,٢٢٧) بدرجة ثقة ٩٥ ٪

وبمعنى آخر نحن على ثقة بدرجة ٩٥٪ أن القيمة الحقيقية لـ μ تقع في هذه الفترة.

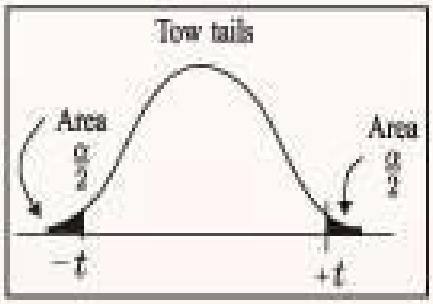
ثانياً: فترة الثقة للوسط μ في حالة التباين σ^2 غير معلوم وحجم العينة صغير

نظرية (٢):

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن (ن < ٣٠) من مجتمع طبيعي ط (μ ، σ^2) تباينه σ^2 غير معلوم فإن تقدير فترة ثقة ١٠٠٪ (١ − α) للمعلمة μ تكون:

$$\left(\bar{س} - ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \ ، \ \bar{س} + ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)$$

حيث $\bar{س}$ هو الوسط الحسابي للعينة، ع الانحراف المعياري للعينة، $ت_{\frac{\alpha}{2}}$ هي قيمة على محور ت ذي درجات الحرية (ن − ١) التي يقابلها مساحة $\frac{\alpha}{2}$ تحت المنحنى كما هو في الشكل المقابل.

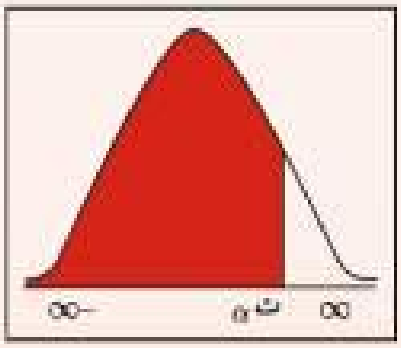


تفسير فترة الثقة:

إن تفسير فترة الثقة هو نفس تفسير فترة الثقة السابقة عندما تكون σ^2 معلومة.

خطوات إيجاد قيمة $ت_{\alpha}$ المناظرة لقيمة α عند درجة حرية (ن − ١) من جدول توزيع ت:

نلاحظ من الشكل أن توزيع ت يشبه إلى حد كبير التوزيع الطبيعي من حيث إنه متماثل وممتد من الطرفين.



- تقع درجات الحرية في أول عمود يشغله الجدول، كما يشغل الصف الأول قيم $\frac{\alpha}{2}$
- $ت_{\alpha}$ هي القيمة الناتجة من تقاطع العمود (قيم α) مع الصف (درجات الحرية).

مرفق الجدول ٢ في نهاية الكتاب حيث α تعني احتمال نصف مستوى المعنوية.

ملاحظة :

- توزيع ت له معلمة واحدة وهي درجات الحرية عبارة عن (ن − ١) حيث ن حجم العينة .
- إذا زادت درجات الحرية عن ٣٠ تتقارب قيمتي ت، ق المناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- في حين توزيع ق لم تدخل ن في الكشف الجدولي .

مثال ٣

أخذت عينة عشوائية حجمها ٩ من مجتمع طبيعي فأعطت $\overline{س}$ = ٩,٢ ، ع = ٠,٤

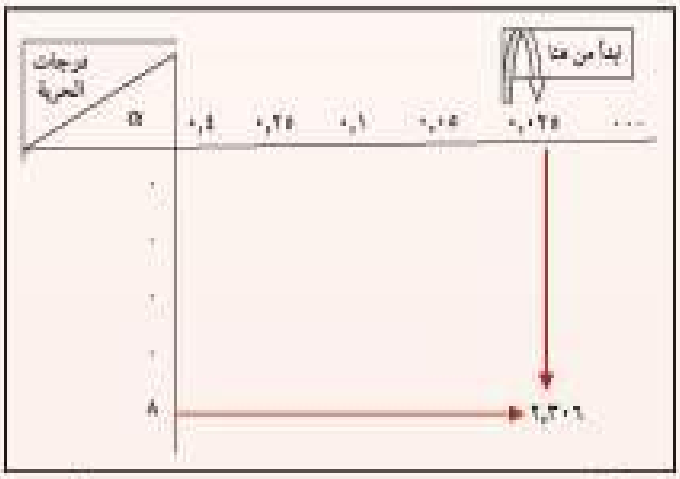
أوجد فترة ٩٥٪ ثقة لمعلمة المجتمع μ.

الحل

بما أن حجم العينة أقل من ٣٠ لذا سوف نستعمل فترة الثقة للنظرية ٢ :

بما أن ١ − α = ٠,٩٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥ ، حجم العينة ٩

ومن جدول توزيع ت بدرجات حرية (٩ − ١ = ٨) نجد أن $ت_{٠,٠٢٥}$ = ٢,٣٠٦



٩,٢ − ٢,٣٠٦ × $\frac{٠,٤}{\sqrt{٩}}$ < μ < ٩,٢ + ٢,٣٠٦ × $\frac{٠,٤}{\sqrt{٩}}$ نسبة ثقة ٩٥٪

أي أن ٩,٢ − ٠,٣٠٧ < μ < ٩,٢ + ٠,٣٠٧ نسبة ثقة ٩٥٪

إذن فترة الثقة ٩٥٪ للمعلمة μ هي:

(٨,٨٩ ، ٩,٥١)

وتفسر هذه الفترة بدرجة ثقة ٩٥٪ يمكننا القول أن القيمة الحقيقية لـ μ تقع في (٨,٨٩ ، ٩,٥١)

مثال ٤

صنعت سبيكة لاستعمالها في أحد أنواع الصواريخ، وأخذت قياسات قوة السبيكة على ٢٥ قطعة منها فوجد أن الوسط الحسابي ٣٧,٨ والانحراف المعياري ٢,٨، علماً بأن قوة السبيكة تخضع لتوزيع طبيعي.

أ) أوجد فترة ٩٥٪ ثقة لمعدل قوة السبيكة.

ب) هل تحوي هذه الفترة المعلمة μ.

الحل

أ) بما أن قوة السبيكة تخضع لتوزيع طبيعي وبتطبيق النظرية (٢) فإن فترة الثقة هي:

$$\left(\bar{س} - ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} \ ، \ \bar{س} + ت_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{ع}{\sqrt{ن}}\right)$$

وباستخدام جدول ت بدرجات حرية ٢٤ نجد أن قيمة $ت_{٠,٠٢٥}$ = ٢,٠٦٤

$$\left(٣٧,٨ - ٢,٠٦٤ \times \frac{٢,٨}{\sqrt{٢٥}} \ ، \ ٣٧,٨ + ٢,٠٦٤ \times \frac{٢,٨}{\sqrt{٢٥}}\right)$$

(٣٧,٨ − ١,١٥٦ ، ٣٧,٨ + ١,١٥٦)

إذن (٣٦,٦٤٤ ، ٣٨,٩٥٦) هي فترة الثقة المطلوبة.

ب) إننا لا نعلم فيما إذا كان فترة الثقة محددة مثل (٣٦,٦٤٤ ، ٣٨,٩٥٦) تحوي μ أم لا، لأن μ مجهولة ولكن لو كررنا العملية السابقة في (أ) لعدد كبير من العينات لأصبح عندنا الثقة أن ٩٥٪ من هذه الفترات يحوي μ و ٥٪ فقط لا تحوي μ.

تمارين ١-١

١ عينة عشوائية حجمها ن = ١٦ أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري σ = ٤ والوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ٦٠. أوجد فترة ٩٥٪ ثقة لوسط المجتمع μ. وفسره.

٢ لدراسة النمو لنوع خاص من الزهور أخذت عينة عشوائية من ٢٠ زهرة، وجد أن متوسط النمو خلال العام هو ٤٤,٨سم والانحراف المعياري هو ٤,٧سم. أوجد حدود الثقة للمتوسط الحقيقي للنمو عند درجة ٩٥٪ ثقة وفسره. علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

٣ في مسح اجتماعي اشتمل على ٣٠٠ عائلة أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري ٢٠٠ وجد أن متوسط دخل العائلة في العينة هو ٢٨٧٨ دينار. أوجد فترة الثقة باحتمال قدره ٠,٩٥، وفسره.

٤ لدراسة متوسط عدد الساعات التي يقضيها الطلاب في مشاهدة التلفاز خلال أسبوع أخذت عينة عشوائية من ١٥ طالباً، وجد أن متوسط عدد ساعات المشاهدة خلال أسبوع هي ٢٥ ساعة والانحراف المعياري ٣,٢ ساعة، أوجد فترة الثقة باحتمال قدره ٠,٩٥، وفسره. علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

١ - ٢ اختبارات الفروض الإحصائية

عندما نستخدم بيانات العينة لاختبار فرض معين أو اعتقاد معين عن المجتمع، فإننا نعلم أن الملاحظات قد لا تنطبق بالضبط على الفرض حتى لو كان صحيحاً. ولذلك فمن الضروري أن نلاحظ قرب البيانات من الفرض لنقرر ما إذا كان الاختلاف بينهما ناجماً عن الصدفة فقط أم عن عدم صحة الفرض. والفرض ماهو إلا تخمين أو استنتاج ذكي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية، لذا نحتاج إلى اختبار الفروض المتعلق بمعلمات المجتمع، وسنقوم بدراسته بشكل مبسط لمعلمة واحدة وهو الوسط الحسابي μ.

١ - ٢ أ الفروض الإحصائية :

مثال توضيحي ١ :

إذا أراد مهندس أن يقرر من خلال بيانات لعينه ما، أن معدل عمر اللمبات هو ٣٠٠٠ ساعة عمل أو تختلف عن ذلك.

ففي هذا المثال نضع فرضاً وهو μ = ٣٠٠٠ في مقابل الفرض $\mu \neq$ ٣٠٠٠ وسنسمي الفرض الأول بفرض العدم ونرمز له بالرمز $ف_0$ وسنسمي الفرض الثاني بالفرض البديل ونرمز له بالرمز $ف_1$ وعلى ذلك نكتب:

$ف_0 : \mu$ = ٣٠٠٠ في مقابل $ف_1 : \mu \neq$ ٣٠٠٠

مثال توضيحي ٢ :

إذا أراد صانع أدوية أن يقرر خلال بيانات لعينة ما، إذا كان معدل عدد الأيام لشفاء المرضى الذين أخذوا نوعاً جديداً من العلاج من مرض معين ١٥ يوماً أو يختلف عن ذلك.

فعليه يكون فرض العدم $ف_0 : \mu$ = ١٥ و الفرض البديل $ف_1 : \mu \neq$ ١٥

والآن دعنا نتعرف على فرض العدم $ف_0$ والفرض البديل $ف_1$.

فرض العدم Null hypothesis $ف_0$:

يمثل فرض العدم ادعاء معيناً حول وسط المجتمع ولكنه غير قائم على حقائق فعليه بل يعكس فقط وجهة نظر الباحث وتكهناته دون الاعتماد على ملامح المجتمع محل الدراسة، أي أنه عملية تخمين نظري لقيم معالم المجتمع.

ملاحظة :

فرض العدم يطلق عليه أحياناً الفرض الصفري.

فرض البديل Alternative Hypothesis $ف_1$:

هو فرض يعكس اهتمام الباحث ومخاوفه في حالة (عدم صحة فرض العدم أو ما يسمى برفض فرض العدم).

ويأخذ أحد الأشكال الثلاثة :

$ف_1 : \mu \neq \mu_0$ ، $ف_1 : \mu > \mu_0$ ، $ف_1 : \mu < \mu_0$.

ملاحظة :

سوف نقتصر في دراستنا على الفرض البديل $ف_1 : \mu \neq \mu_0$.

١ - ٢ ب الاختبار الإحصائي Test statistic

هو اختبار لمتغير عشوائي يستخدم للوصول إلى نتيجة أو قرار في اختبارات الفروض لوسط المجتمع μ.

إذا كان لدينا مجتمع وسطه الحسابي μ وأخذت عينة مفرداتها $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ ونختبر إذا ما كان الوسط μ يساوي مقداراً محدداً هو μ_0 (فرض العدم) أو لا يساويه، فإن المقياس الإحصائي للاختبار يأخذ الأشكال الآتية :

١ إذا كان المجتمع توزيعه طبيعياً وتباينه σ^2 معلوماً، فإن المقياس الإحصائي $ق = \dfrac{\bar{س} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$ وله توزيع طبيعي معياري.

٢ أما إذا كان المجتمع تباينه σ^2 غير معلوم وكان:

المجتمع توزيعه طبيعياً أو غير طبيعي، حجم العينة ن كبيرة (ن ≥ ٣٠) فإن المقياس الإحصائي هو:

$ق = \dfrac{\bar{س} - \mu_0}{\dfrac{ع}{\sqrt{ن}}}$ وله توزيع طبيعي معياري.

٢ أما إذا كان المجتمع توزيعه طبيعياً وتباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة ن صغيرة (ن < ٣٠)، فإننا نستخدم توزيع ت وله (ن - ١) من درجات الحرية، فإن التوزيع المضبوط للمقياس الإحصائي هو ت = $\frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$.

القرار Decision :

وبناء على المعلومات التي سبق جمعها من العينة محل الدراسة والاختبار الإحصائي يمكننا اتخاذ قرار في شأن الوسط الحسابي للمجتمع μ إما بقبول فرض العدم أو رفضه.

وحيث إن قرارنا يعتمد أساساً على معلومات عينة أخذت بطريقة عشوائية، فإن هناك عدة احتمالات ممكنة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ القرار.

مستوى المعنوية α level of significant :

وهو احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول (رفض فرض العدم وهو في الحقيقة الفرض الصحيح).

ملاحظة :

مستوى المعنوية يطلق عليه أحياناً مستوى الدلالة (وهو المكمل لدرجة الثقة).

وعموماً، فإننا نستطيع التحكم في α وفي العادة تأخذ α القيم (٠,١، ٠,٠١، ٠,٠٠١، ٠,٠٥) وفي الحالة المثالية α نفضل أن تكون قيمتها قريبة من الصفر.

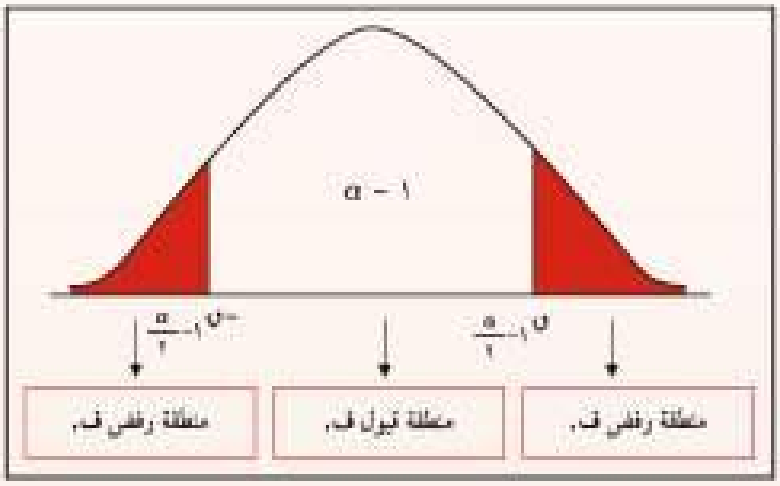
ملاحظة :

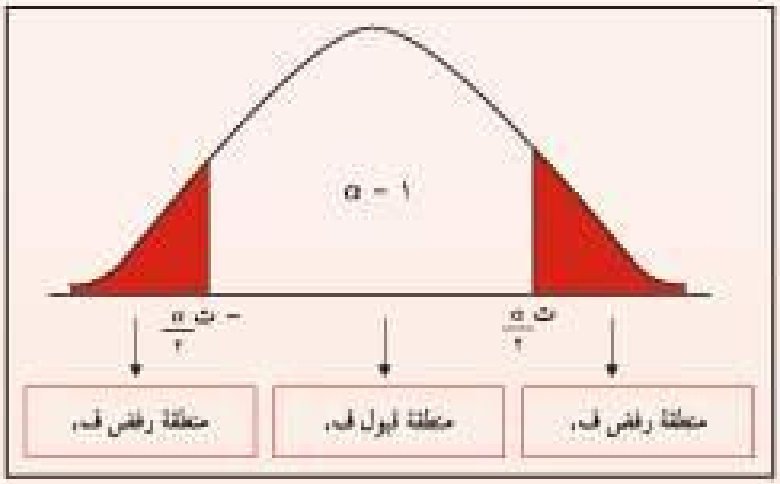
سوف نقتصر في دراستنا لمستوى المعنوية α = ٠,٠٥

ملخص للخطوات الأساسية لإجراء اختبارات الفروض الإحصائية:

١. صياغة الفرض الإحصائي (فرض العدم $ف_٠$ و الفرض البديل $ف_١$).
٢. تحقق من معلومية الانحراف المعياري σ وحجم العينة ن ومن ثم نوجد المقياس الإحصائي للاختبار.
٣. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $ق_{١-\frac{\alpha}{٢}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $ت_{\frac{\alpha}{٢}}$ من جدول ت ذي درجات حرية.
٤. قارن بين قيمة المقياس الإحصائي للاختبار والقيمة الجدولية.
٥. اتخاذ القرار(بقبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

أي سوف يتم رفض فرض العدم $ف_٠$ وقبول الفرض البديل $ف_١$: $\mu \neq \mu_٠$ إذا كانت قيمة المقياس الإحصائي للاختبار تقع خارج فترة $(-ق_{١-\frac{\alpha}{٢}} ، ق_{١-\frac{\alpha}{٢}})$ أو $(-ت_{\frac{\alpha}{٢}} ، ت_{\frac{\alpha}{٢}})$ كما هو موضح في الشكل التالي:





مثال ١

أخذت عينة عشوائية من مجتمع الدراسة بحجم ن = ١٠٠ فوجد أن متوسط العينة $\bar{س}$ = ٢١٢ والانحراف المعياري للمجتمع σ = ٨٠. اختبر الفرض متوسط التوزيع الطبيعي μ = ٢٠٠ في مقابل الفرض البديل $\mu \neq$ ٢٠٠ عند مستوى معنوية ٥ ٪.

الحل

نتبع الخطوات الأساسية لإجراء الاختبار

١ **صياغة الفروض:**

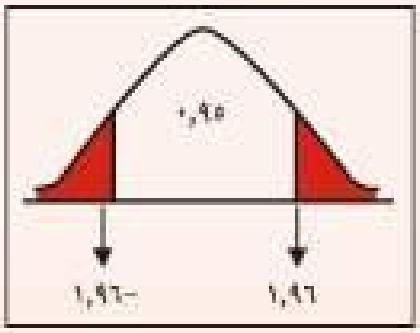
$ف_٠ : \mu = ٢٠٠$ في مقابل $ف_١ : \mu \neq ٢٠٠$

٢ الانحراف المعياري للمجتمع ذات التوزيع الطبيعي معلوم σ = ٨٠ وقيمة الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ٢١٢ فإن قيمة المقياس الإحصائي للاختبار

$$ق_٠ = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}} = \frac{٢١٢ - ٢٠٠}{\frac{٨٠}{\sqrt{١٠٠}}} \leftarrow ق_٠ = ١,٥$$

٣ مستوى المعنوية α = ٠,٠٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥ ← ١ − $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٩٧٥

والقيمة الجدولية $ق_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري) عند احتمال قدره ٠,٩٥.



٤ نرفض فرض العدم إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي تقع خارج الفترة (-١,٩٦ ، ١,٩٦)

٥ وبما أن قيمة الاختبار ١,٥ تنتمي إلى الفترة كما هو موضح بالشكل فإن القرار يكون قبول الفرض متوسط التوزيع μ = ٢٠٠

مثال ٢

مدير إحدى الجمعيات التعاونية يعتقد أن القيمة المتوسطة لمجتمع كبير من عروض الأسعار هي ١٠ دنانير لكن المحاسب يختلف معه. وللتأكد من صحة وجهة نظره أخذ المحاسب عينة عشوائية مكونة من ٣٦ عرضاً، فوجد أن وسطها الحسابي $\overline{س}$ = ٩,٥ وتباينها $ع^٢$ = ٤ وضح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى معنوية ٠,٠٥.

الحل

١ صياغة الفروض:

$ف_٠ : \mu = ١٠$ في مقابل $ف_١ : \mu \neq ١٠$

٢ وحيث إن الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معلوم، وقيمة الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ = ٩,٥ والانحراف المعياري للعينة ع = ٢ وحجم العينة = ٣٦ ونظراً لأن ن كبيرة بدرجة معقولة (ن ≥ ٣٠)

نستخدم المقياس الإحصائي للاختبار

$$ق = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{٩,٥ - ١٠}{\frac{٢}{\sqrt{٣٦}}} \leftarrow ق = -١,٥$$

وله توزيع طبيعي معياري.

٣ مستوى المعنوية α = ٠,٠٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥ ← ١ - $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٩٧٥

والقيمة الجدولية $ق_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري) عند احتمال قدره ٠,٩٥.

٤ نقبل فرض العدم إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي تقع داخل الفترة (-١,٩٦ ، ١,٩٦)

٥ وبما أن قيمة الاختبار -١,٥ تنتمي إلى (-١,٩٦ ، ١,٩٦) وهي منطقة قبول فرض العدم فإن القرار يكون قبول القيمة المتوسطة لعروض الأسعار ١٠ = μ.

مثال ٣

لدراسة متوسط أوزان الأطفال عند الولادة سحبت عينة عشوائية من مستشفى الولادة مكونة من ٤ أطفال وتم وزنهم مباشرة بعد الولادة، فكانت لدينا البيانات الآتية للأوزان بالكيلوجرام ٣,٦ ، ٣,٧ ، ٢,٨ ، ٣,١ فإذا كانت قيمة **الانحراف المعياري** σ = ٠,٤٠

اختبر الفرض القائل أن متوسط أوزان الأطفال عند الولادة هو ٤ كجم في مقابل الفرض البديل القائل أنها تختلف عن ٤ كجم وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحل

١ صياغة الفروض:

ف. : μ = ٤ في مقابل ف١ : $\mu \neq$ ٤

٢ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع σ معلوم فالتوزيع المناسب هو التوزيع الطبيعي فنستخدم المقياس الإحصائي للاختبار

$$\text{ق} = \frac{\bar{\text{س}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

ولذلك يجب حساب قيمة المتوسط الحسابي للعينة $\bar{\text{س}}$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٣,٧ + ٣,٦ + ٢,٨ + ٣,١}{٤} = \frac{١٣,٢}{٤} = ٣,٣$$

وعليه تكون قيمة الاختبار

$$\text{ق} = \frac{٣,٣ - ٤}{\frac{٠,٤}{\sqrt{٤}}} = -٣,٥$$

٣ مستوى المعنوية α = ٠,٠٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥ ← ١ − $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٩٧٥

والقيمة الجدولية $\text{ق}_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

٤ **نرفض فرض العدم إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي تقع خارج الفترة (−١,٩٦ ، ١,٩٦)**

٥ وبما أن قيمة الاختبار −٣,٥ تقع خارج الفترة (− ١,٩٦ ، ١,٩٦) فإن القرار هو رفض فرض العدم (متوسط وزن الأطفال عند الولادة هو ٤ كجم) وقبول الفرض البديل (متوسط وزن الأطفال عند الولادة يختلف عن ٤ كجم) وذلك عند مستوى معنوية ٥٪.

مثال ٤

في إحدى مدارس الكويت تم أخذ عينة من الطلبة عددها ٢٥ طالباً لدراسة مستوى الطلبة في مادة الإحصاء، فكان متوسط درجات الطلبة في أحد الامتحانات ٧٥ بانحراف معياري ٥ فاختبر الفرض القائل لمدير المدرسة أن متوسط درجات الطلبة يساوي ٧٠ مقابل الفرض البديل أنه يختلف عن ٧٠ عند مستوى معنوية ٥٪.

الحل

١ **صياغة الفروض:**

ف$_{٠}$: μ = ٧٠ في مقابل ف$_{١}$: $\mu \neq$ ٧٠

٢ يتضح لنا من هذا المثال أن σ مجهولة وحجم العينة صغير ولذلك يجب استخدام توزيع ت مع فرض أن المجتمع المسحوب منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي فإن قيمة الاختبار:

$$ت = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} = \frac{٧٥ - ٧٠}{\frac{٥}{\sqrt{٢٥}}} = ٥$$

٣ مستوى المعنوية α = ٠,٠٥ ← $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٢٥

(من جدول توزيع ت عند درجة حرية ن − ١ = ٢٤)

نجد القيمة الجدولية ت$_{٠,٠٢٥,٢٤}$ = ٢,٠٦٤

٤ **نرفض فرض العدم إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي تقع خارج الفترة (−٢,٠٦٤ ، ٢,٠٦٤)**

٥ وبما أن قيمة الاختبار ٥ تقع خارج منطقة القبول (−٢,٠٦٤ ، ٢,٠٦٤) فإن القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل وأن متوسط درجات الطلبة يختلف عن ٧٠.

تمارين ١-٢

١ مدرسة بها ٧٠ مدرس، يود مدير المدرسة تقدير متوسط خدمتهم بالمدرسة لإجراء الاستدلال، قام المدير بأخذ عينه من ٣٦ مدرس فوجد متوسط زمن خدمتهم ٧ سنوات. إذا كان الانحراف المعياري لخدمة ٧٠ مدرس هو ٤ سنوات. اختبر فرض العدم ف$_{٠}$: μ = ٧,٥ ضد الفرض البديل ف$_{١}$: $\mu \neq$ ٧,٥ عند مستوى معنوية ٥٪.

٢ لدراسة مدى التزام السائقين للسيارات بالحد الأقصى للسرعة على الدائري السادس وهو ١٢٠كم/ساعة. تم رصد سرعة ١٠٠ سيارة على الدائري السادس وحساب متوسط سرعتهم، فكانت ١٢٣ كم / ساعة بانحراف معياري ١٠ كم/ ساعة. اختبر الفرض القائل أن سرعة السيارات على الدائري السادس تختلف عن ١٢٠ كم / س عند مستوى معنوية ٥٪.

٣ في دراسة لعدد ساعات المذاكرة لطالب الثانوية العامة يومياً تم سحب عينة من ٢٥ طالباً وسؤالهم عن عدد ساعات المذاكرة يومياً وعليها تم حساب متوسط عدد الساعات اليومية للمذاكرة، فكانت ٨ ساعات يومياً بانحراف معياري ٣ ساعات. اختبر الفرض القائل أن متوسط عدد ساعات المذاكرة لدى الطالب يختلف عن ٧ ساعات يومياً عند مستوى معنوية ٥٪.

تمارين عامة ١-٣

١ في اختبار للزمن الذي يستغرقه تجميع ماكينة معينة وجد أن الزمن الذي استغرقته ٦ ماكينات هو على التوالي: ١١، ١٢، ٦، ١٢، ١٤، ١٣ دقيقة، أوجد ٠,٩٥ فترة ثقة لمعدل الزمن علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي. .

٢ أخذت عينة من ٢٥ طالباً وقيست أوزانهم فوجد أن وسطها ٦,٣ كجم وانحرافها المعياري ٩كجم. أوجد ٩٥٪ فترة ثقة لمتوسط الأوزان. علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

٣ أراد مدير مصنع للإسمنت إيجاد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط وزن كيس الإسمنت الذي ينتجه المصنع. فإذا كان هذا المدير يعلم أن الانحراف المعياري لوزن أكياس الإسمنت يساوي ١,٢كجم، فما حجم العينة من الأكياس التي يجب أن تجري عليها التجربة حتى لا تزيد طول فترة الثقة المطلوبة عن ٢,٦كجم؟ علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

٤ عينة من ١٠ قياسات لأقطار كرة أعطيت متوسطاً ٤,٣٨ ملم وانحرافاً معيارياً ٠,٠٦ ملم. أوجد: ٩٥٪ حدود ثقة للقطر الفعلي. علماً بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

٥ لمعرفة أثر غذاء معين على زيادة الوزن أخذت عينة من خمسة فئران وتم تغذيتها بهذا الغذاء وكانت أوزانها بعد التغذية هي: ١,٦، ١,٤، ١,٥، ٢,٣، ٢,٤، وكانت قيمة الانحراف المعياري للعينة ٠,٤٧٢. أوجد: ٩٥٪ فترة ثقة لمعدل الأوزان.

٦ إن كانت قيمة $\bar{س}$ = ٨٢ ، ع = ١٦، ن = ١٠٠ اختبر الفرض بأن μ = ٨٦ عند مستوى معنوية ٠,٠٥.

٧ إذا كانت قيمة $\bar{س}$ = ٨٢ ، ع = ١٦، ن = ٢٥ اختبر الفرض بأن μ = ٨٦ عند مستوى معنوية ٠,٠٥، علماً بأن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي.

٨ خبرة سنوات عدة في امتحان اللغة الإنجليزية لدخول الجامعة أعطي متوسط النقاط المحققة مساويا للقيمة ٦٤ نقطة بانحراف معياري قدره ٨ درجات. وقد حصل طلاب مدينة ما وعددهم ٥٥ على متوسط نقاط قدره ٦٨ نقطة، فهل يمكن التحقق من أن مستوى هؤلاء الطلاب في اللغة الإنجليزية يختلف عن مستوى بقية الطلاب؟ عند مستوى معنوية ٠,٠٥ .

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
التقدير	Estimation
التقدير بنقطة	Point Estimation
التقدير بفترة ثقة	Interval Estimation
درجات الحرية	Degree of freedom
مستوى المعنوية	Level of significant

المصطلح	باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
القيمة المعيارية	ن	z
التوزيع الطبيعي	ط	n
توزيع ذو درجات حرية	ت	t
الانحراف المعياري للعينة	ع	s
الوسط الحسابي للعينة	$\overline{س}$	$\bar{x}$
الوسط الحسابي للمجتمع	-	μ
الانحراف المعياري للمجتمع	-	σ

معادلات هامة Important Formulas

	باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
فترة الثقة للمتوسط μ ، σ معلومة	$\left(\overline{\text{س}} - \text{ق}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}} \text{ ، } \overline{\text{س}} + \text{ق}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}\right)$	$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ , } \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
فترة الثقة للمتوسط μ ، σ غير معلومة	$\left(\overline{\text{س}} - \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}} \text{ ، } \overline{\text{س}} + \text{ت}_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}\right)$	$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ , } \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$
القيمة المعيارية	$\text{ق} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$	$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
المقياس الإحصائي للاختبار σ معلومة	$\text{ق} = \frac{\overline{\text{س}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
المقياس الإحصائي للاختبار ن $\geq$ ٣٠ ، σ غير معلومة	$\text{ق} = \frac{\overline{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
المقياس الإحصائي للاختبار ن $<$ ٣٠ ، σ غير معلومة	$\text{ت} = \frac{\overline{\text{س}} - \mu}{\frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{ن}}}}$	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$

الفصل الثاني

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

مقدمة

٢ - ١ الارتباط

٢-١ أ الشكل الانتشاري

٢-١ ب قيمة معامل الارتباط

٢-١ جـ معامل ارتباط بيرسون

٢ - ٢ الانحدار

٢-٢ أ معادلة خط الانحدار

٢ - ٣ تمارين عامة

المقدمة:

درسنا في الفصل السابق التقدير واختبارات الفروض كنمط من أنماط الإحصاء الاستدلالي Inferential Statistics. في هذا الفصل نقدم نمطاً آخر من أنماط هذا النوع من الإحصاء الذي يعني بالتحديد ما إذا كانت هناك علاقة موجودة بين متغيرين أم لا.

فعلى سبيل المثال، رجل أعمال قد يريد معرفة ما إذا كان حجم البيع في شهر معين يرتبط بعدد الإعلانات المقدمة في التلفاز لصالح شركته خلال ذلك الشهر؛ التربويون يريدون معرفة ما إذا كان عدد ساعات استذكار الطالب ترتبط بدرجته في امتحان ما؛ الباحثون في مجال الطب قد يهتمون بالبحث في الإجابة عن بعض الأسئلة مثل: هل الكافيين يرتبط بأضرار القلب؟ أو هل هناك علاقة بين عمر الفرد وضغط الدم لديه؟ الطبيب البيطري يريد أن يعرف عما إذا كان وزن حيوان معين لحظة ميلاده يرتبط بالفترة الزمنية التي يعيشها.

هذه هي أسئلة قليلة من أسئلة كثيرة يمكن الإجابة عنها باستخدام أساليب الارتباط والانحدار. فالارتباط Correlation هو طريقة إحصائية تستخدم في تحديد عما إذا كانت هناك علاقة موجودة بين المتغيرات. أما الانحدار Regression فهو طريقة إحصائية تستخدم لوصف طبيعة العلاقة بين تلك المتغيرات: طردية أم عكسية، خطية أم غير خطية.

إن الغرض الرئيسي من هذا الفصل هو تقديم الإجابة عن أربعة أسئلة:

1. هل يرتبط متغيران أو أكثر بعلاقة ما؟
2. إذا كانت الإجابة بنعم. فما قوة العلاقة بينهما؟
3. ما نوع العلاقة بينهما؟
4. ما نوع التنبؤات التي يمكن استنتاجها من هذه العلاقة؟

للإجابة عن السؤالين الأول والثاني، استخدم الإحصائيون قياساً عددياً عما إذا كان متغيرين أو أكثر ترتبط ببعضها، وكذلك لتحديد قوة هذه العلاقة، إن هذا القياس يسمي معامل الارتباط Correlation coefficient. وللإجابة عن السؤال الثالث ينبغي أن نحدد نوع العلاقة الموجودة فهناك نوعان من العلاقات: بسيطة Simple ومتعددة Multiple.

في العلاقات البسيطة Simple relationship هناك متغيران فقط في الدراسة. أما في العلاقات المتعددة Multiple relation ship هناك متغيرات عديدة في الدراسة. ونقتصر هنا في الكتاب الحالي علي العلاقة البسيطة. وللإجابة عن السؤال الرابع المتعلق بنوع التنبؤات التي يمكن التوصل إليها من العلاقة التي نحصل عليها، فإن ذلك يرجع إلي قوة العلاقة بين المتغيرات فكلما كانت العلاقة قوية كلما كانت التنبؤات أكثر دقة.

والآن وبعد أن تعرفنا بشكل عام على كل من الارتباط والانحدار دعنا نتعرف الصيغ الإحصائية لكل منهما.

٢ - ١ الارتباط Correlation

تعريف:

الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

والعلاقة بين متغيرين يمكن أن تتراوح من الدرجة القوية إلي الدرجة الضعيفة، فعندما تكون العلاقة قوية فإن ذلك يعني أن معرفة قيمة أحد المتغيرين يساعد في التنبؤ بقيمة المتغير الآخر. وعندما تكون العلاقة ضعيفة، فإن ذلك يعني أن معرفة قيمة أحد المتغيرين لا يساعدنا في التنبؤ بقيمة المتغير الآخر.

إن إحدى الطرق الهامة التي تساعدنا في تعرف درجة العلاقة ونوعها هي الشكل الانتشاري.

٢-١أ الشكل الانتشاري Scatter Plot

تعريف:

الشكل الانتشاري هو عبارة عن شكل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) تستخدم لوصف العلاقة الموجودة بين متغيرين.

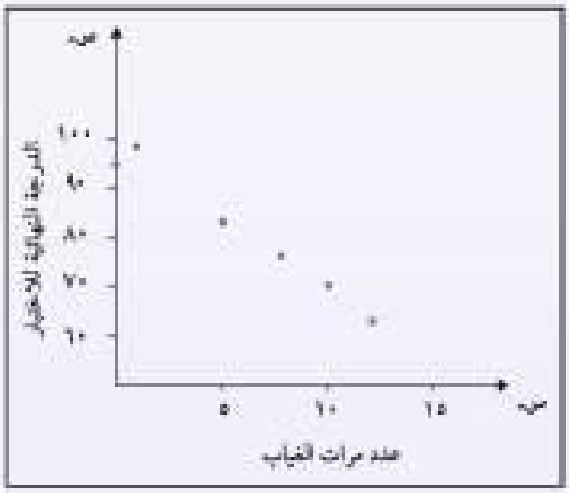
مثال ١

فيما يلي بيانات توضح العلاقة بين المتغيرين س، ص. ارسم شكل الانتشار الذي يوضح هذه البيانات.

س تمثل عدد أيام غياب الطلبة في العام الدراسي.

ص تمثل الدرجة النهائية للطالب في اختبار اللغة العربية.

عدد أيام الغياب (س)	١٠	١٢	٢	٠	٨	٥
الدرجة النهائية في الاختبار (ص)	٧٠	٦٥	٩٦	٩٤	٧٥	٨٢



شكل (٢-١)

تحديد نوع العلاقة بين متغيرين:

هناك أنواعٌ متعددة للعلاقات يمكن أن توجد بين المتغيرين س ، ص ويمكن تحديدها من خلال النظر إلي شكل انتشار النقاط في الرسم البياني.

إن الأنماط المختلفة لتلك العلاقات يمكن أن تكون:

١ علاقة خطية طردية:

توجد عندما تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تصاعدي. أي أنه عندما تزيد قيمة س فإن قيمة ص تزيد كذلك (انظر الشكل ٢-٢).

٢ علاقة خطية عكسية:

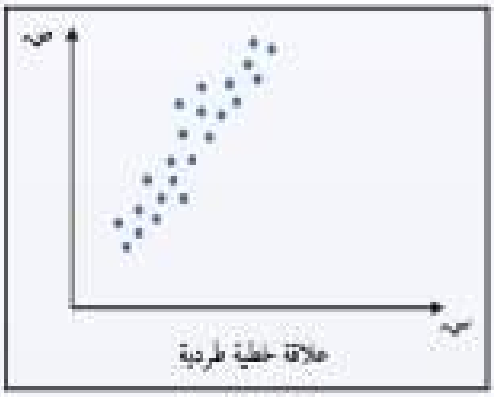
توجد عندما تنتشر النقاط على جانبي خط مستقيم تنازلي. أي أنه عندما تزيد قيمة س تقل قيمة ص والعكس بالعكس (انظر الشكل ٢-٣).

٣ علاقة غير خطية:

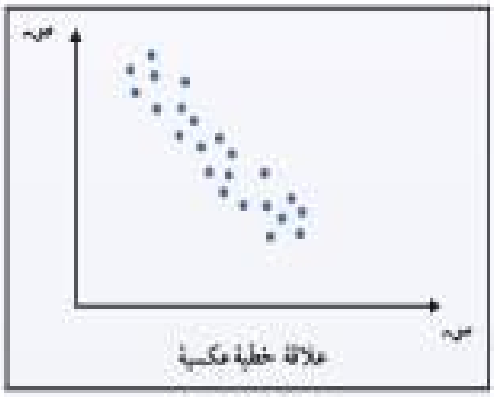
توجد عندما تنتشر النقاط على جانبي خط منحني وتوصف العلاقة بطبيعة المنحني (انظر الشكل٢-٤).

٤ لا توجد علاقة:

عندما لا يكون هناك نمط محدد لانتشار النقاط في الشكل البياني (انظر الشكل ٢-٥).

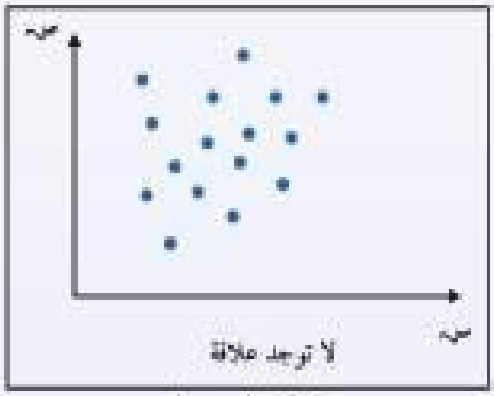


الشكل (٢ - ٢)



الشكل (٢ - ٣)

الشكل (٢ - ٤)



الشكل (٢ - ٥)

تدريب:

ارسم شكل الانتشار لكل من البيانات التالية، ثم اذكر نوع العلاقة التي تعبر عن تلك البيانات وفقاً لما هو وارد بالأشكال الأربعة السابقة.

١

س	٣	٤	٥	٧	٩	١٠
ص	١١	١٢	١٤	١٧	١٩	٢٠

٢

س	٢	٣	٤	٥	٦	٨
ص	١٣	٩	٨	٤	٣	٢

٣

س	١	٣	٥	٧	٨	٩
ص	١١	٨	٤	٧	١٠	٥

٤

س	٢	٢	٣	٣	٣	٤	٤	٥	٥	٦
ص	١	٤	٣	٤	٥	١	٦	٢	٣	٤

٢-١ ب قيمة معامل الارتباط:

تتراوح قيمة معامل الارتباط من -١ الى +١ كما يتضح في الشكل التالي:

١,٠+	٠,٥+	٠,٠٠	٠,٥-	١,٠-
علاقة (طردية) قوية		علاقة ضعيفة أو لا توجد علاقة		علاقة (عكسية) قوية

شكل (٢ - ٦)

عندما تكون قيمة معامل الارتباط تنتمي إلى [+٠,٥ ، +١) فإن هذا يعني أن هناك علاقة طردية قوية بين المتغيرين وهذا بدوره يعني أنه كلما زادت قيمة المتغير الأول زادت معها قيمة المتغير الثاني، وكلما قلت قيمة المتغير الأول قلت معها قيمة المتغير الثاني.

وعندما تكون قيمة معامل الارتباط تنتمي (-١ ، -٠,٥] فإن هذا يعني أن هناك علاقة عكسية قوية بين المتغيرين. وهذا بدوره يعني أنه كلما زادت قيمة المتغير الأول قلت قيمة المتغير الثاني، وكلما قلت قيمة المتغير الأول زادت قيمة المتغير الثاني.

وعندما تكون قيمة معامل الارتباط (صفراً أو تقترب منه) فإن هذا يعني أنه لا توجد علاقة بين المتغيرين أو توجد علاقة بينهما ولكنها علاقة ضعيفة. وهذا بدوره يعني أن معرفة قيمة المتغير الأول لا تتيح لنا معرفة أية معلومات تناظر هذه القيمة في المتغير الثاني والعكس صحيح.

ملاحظة:

لاحظ أنه عندما تكون قيمة معامل الارتباط (+١) تعني أن هناك ارتباطاً طردياً تاماً بين المتغيرين وعندما تكون قيمة معامل الارتباط (-١) تعني أن هناك ارتباطاً عكسياً تاماً بينهما. وعندما تكون قيمة معامل الارتباط (صفر) يكون الارتباط منعدماً.

٢-١ حـ معامل ارتباط بيرسون: The Pearson Correlation coefficient

هذا النوع من معاملات الارتباط يقيس قوة ونوع العلاقة الخطية بين متغيرين متصلين. الرمز (ر) يستخدم للدلالة على قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين لدى عينة تم اختيارها من المجتمع.

ويمكن الحصول على معامل ارتباط بيرسون (ر) من خلال الصيغة التالية:

$$ر = \frac{ن \text{ مج س ص} - (\text{مج س})(\text{مج ص})}{\sqrt{[ن \text{ مج س}^2 - (\text{مج س})^2][ن \text{ مج ص}^2 - (\text{مج ص})^2]}}$$

حيث س ترمز إلى قيمة المتغير الأول.

ص ترمز إلى قيمة المتغير الثاني.

ن ترمز إلى عدد المفردات.

تذكر أن:

المتغير المتصل هو متغير يمكن قياسه من خلال مقياس خطي.

مثال ١

في الجدول التالي بيان درجات ستة أفراد في متغيري العمر وضغط الدم لديهم، تم اختيارها بطريقة عشوائية. احسب معامل الارتباط.

العمر	٤٣	٤٨	٥٦	٦١	٦٧	٧٠
ضغط الدم	١٢٨	١٢٠	١٣٥	١٤٣	١٤١	١٥٢

الحل

الخطوة الأولى:

يتم وضع البيانات في جدول كالآتي:

العمر (س)	الضغط (ص)	س ص	س^2	ص^2
٤٣	١٢٨	٥٥٠٤	١٨٤٩	١٦٣٨٤
٤٨	١٢٠	٥٧٦٠	٢٣٠٤	١٤٤٠٠
٥٦	١٣٥	٧٥٦٠	٣١٣٦	١٨٢٢٥
٦١	١٤٣	٨٧٢٣	٣٧٢١	٢٠٤٤٩
٦٧	١٤١	٩٤٤٧	٤٤٨٩	١٩٨٨١
٧٠	١٥٢	١٠٦٤٠	٤٩٠٠	٢٣١٠٤
مج س = ٣٤٥	مج ص = ٨١٩	مج س ص = ٤٧٦٣٤	مج س^2 = ٢٠٣٩٩	مج ص^2 = ١١٢٤٤٣

الخطوة الثانية:

نعوض في صيغة ر الثالية:

$$ر = \frac{ن\,مجـ س ص - (مجـ س)(مجـ ص)}{\sqrt{[ن\,مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}]\,[ن\,مجـ ص^{٢} - (مجـ ص)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{(٦)(٤٧٦٣٤) - (٣٤٥)(٨١٩)}{\sqrt{[(٦)(٢٠٣٩٩) - (٣٤٥)^{٢}]\,[(٦)(١١٢٤٤٣) - (٨١٩)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٢٨٥٨٠٤ - ٢٨٢٥٥٥}{\sqrt{[(٦)(٢٠٣٩٩) - (٣٤٥)^{٢}]\,[(٦)(١١٢٤٤٣) - (٨١٩)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٣٢٤٩}{\sqrt{[٣٣٦٩]\,[٣٨٩٧]}}$$

$$ر = \frac{٣٢٤٩}{٣٦٢٣,٣٩٥٢}$$

$$ر = ٠,٨٩٧$$

وتعني قيمة معامل الارتباط هذه أن هناك علاقة طردية قوية موجبة بين العمر وضغط الدم لدى الفرد.

مثال ٢

فيما يلي قيم متغيرين س ، ص. احسب معامل الارتباط.

س	٨	٥	١١	٧	٩	١٢	٦	١٠
ص	٤	١	٧	٣	٥	٨	٢	٦

الحل

للإجابة عن هذا السؤال نقوم بعمل الجدول التالي، ومن ثم استخراج قيمة (ر) كما يلي:

س	ص	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
٨	٤	٣٢	٦٤	١٦
٥	١	٥	٢٥	١
١١	٧	٧٧	١٢١	٤٩
٧	٣	٢١	٤٩	٩
٩	٥	٤٥	٨١	٢٥
١٢	٨	٩٦	١٤٤	٦٤
٦	٢	١٢	٣٦	٤
١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
مجـ س = ٦٨	مجـ ص = ٣٦	مجـ س ص = ٣٤٨	مجـ س^{٢} = ٦٢٠	مجـ ص^{٢} = ٢٠٤

وبالتعويض في صيغة

$$ر = \frac{ن\ مجـ س ص - (مجـ س)(مجـ ص)}{\sqrt{[ن\ مجـ س^{٢} - (مجـ س)^{٢}]\ [ن\ مجـ ص^{٢} - (مجـ ص)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٨ \times ٣٤٨ - ٦٨ \times ٣٦}{\sqrt{[٨ \times ٦٢٠ - (٦٨)^{٢}]\ [٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦ \times ٣٣٦}} = \frac{٣٣٦}{٣٣٦} = +١$$

وتعني هذه النتيجة أن قيمة معامل الارتباط (+١) يوضح علاقة طردية تامة بين المتغيرين س ، ص، وهذا يعني أنه كلما زادت قيمة س تزيد قيمة ص، وكلما قلت قيمة س تقل قيمة ص.

مثال ٣

فيما يلي قيم متغيرين س ، ص. احسب معامل الارتباط.

س	١٠	١٤	٨	١٥	٩	١٣	١١	١٢
ص	٦	٢	٨	١	٧	٣	٥	٤

الحل

س	ص	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
١٠	٦	٦٠	١٠٠	٣٦
١٤	٢	٢٨	١٩٦	٤
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٥	١	١٥	٢٢٥	١
٩	٧	٦٣	٨١	٤٩
١٣	٣	٣٩	١٦٩	٩
١١	٥	٥٥	١٢١	٢٥
١٢	٤	٤٨	١٤٤	١٦
مجـ س = ٩٢	مجـ ص = ٣٦	مجـ س ص = ٣٧٢	مجـ س^{٢} = ١١٠٠	مجـ ص^{٢} = ٢٠٤

$$ر = \frac{٨ \times ٣٧٢ - ٩٢ \times ٣٦}{\sqrt{[٨ \times ١١٠٠ - (٩٢)^{٢}]\,[٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{-٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦ \times ٣٣٦}} = \frac{-٣٣٦}{٣٣٦} = -١$$

وتعني هذه النتيجة أن قيمة معامل الارتباط (-١) توضح علاقة تامة عكسية بين المتغيرين. وهذا يعني أنه كلما تزيد قيم ص تقل قيم س، وعندما تقل قيم ص تزيد قيم س.

مثال ٤

فيما يلي درجات عدد من الطلبة في اختبار اللغة العربية (س) ودرجاتهم في اختبار الفنون الجميلة (ص). احسب معامل الارتباط بين درجات المتغيرين.

س	٩	١٠	١١	١٢	١٠	١١	١١	١١	١٠	١٢
ص	٩	٣	٥	٨	٢	٧	٨	٦	٩	٤

الحل

درجة اللغة العربية (س)	درجة الفنون (ص)	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
٩	٩	٨١	٨١	٨١
١٠	٣	٣٠	١٠٠	٩
١١	٥	٥٥	١٢١	٢٥
١٢	٨	٩٦	١٤٤	٦٤
١٠	٢	٢٠	١٠٠	٤
١١	٧	٧٧	١٢١	٤٩
١١	٨	٨٨	١٢١	٦٤
١١	٦	٦٦	١٢١	٣٦
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	٤	٤٨	١٤٤	١٦
مجـ س = ١٠٧	مجـ ص = ٦١	مجـ س ص = ٦٥١	مجـ س^{٢} = ١١٥٣	مجـ ص^{٢} = ٤٢٩

$$ر = \frac{١٠ \times ٦٥١ - ١٠٧ \times ٦١}{\sqrt{[١٠ \times ١١٥٣ - (١٠٧)^{٢}]\,[١٠ \times ٤٢٩ - (٦١)^{٢}]}}$$

$$ر = \frac{٦٥١٠ - ٦٥٢٧}{\sqrt{٨١ \times ٥٦٩}} = \frac{-١٧}{٢١٤,٦٨٣} = -٠,٠٧٩$$

وتعني هذه النتيجة أن قيمة معامل الارتباط (-٠,٠٧٩) توضح علاقة عكسية ضعيفة بين المتغيرين.

لقد أوضحنا في الأمثلة الأربعة السابقة أربع قيم مختلفة لمعامل الارتباط (ر) تمثلت في علاقة طردية تامة، علاقة عكسية تامة، علاقة طردية قوية، علاقة عكسية ضعيفة.

تمارين ٢-١

الأسئلة من ١-٤ بيانات لقيم متغيرين س ، ص، احسب معامل الارتباط للمتغيرين ثم حدد نوع العلاقة بينهما.

١

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٣	٥	٧	٩	١١

٢

س	٢٥	٣٥	١٠	٤٠	٨٥	٧٥	٦٠	٤٥	٥٠
ص	٦٣	٦٨	٧٢	٦٢	٦٥	٤٦	٥١	٦٠	٥٥

٣

س	٨٧	٨٩	٩٧	٨٠	٧٣	٨٥	٨١	٧٤	٨٠	٨٩
ص	٨٤	٩١	٩٦	٨٧	٦٦	٩٠	٧٩	٨٠	٨٩	٨٦

٤ في إحدى الشركات الكبرى لبيع السيارات أراد صاحب الشركة أن يتعرف على العلاقة بين عدد سنوات خبرة البائع في بيع السيارات وعدد السيارات المباعة خلال الشهر. البيانات جاءت كما يلي:

سنوات الخبرة (س)	٣	٩	٢	٥	١
السيارات المباعة خلال شهر (ص)	٥	١٤	١٢	٢١	٨

أ احسب معامل الارتباط. ب حدد نوعه.

٥ تم عمل دراسة لتحديد العلاقة بين عمر الأم وعدد أطفالها. البيانات جاءت كما يلي:

عمر الأم (س)	١٨	٢٢	٢٩	٢٠	٢٧	٣٢	٣٣	٣٦
عدد الأطفال (ص)	٢	١	٣	١	٢	٤	٣	٥

أ احسب معامل الارتباط. ب حدد نوع الارتباط.

٢ - ٢ الانحدار Regression

عرفنا أنه عند دراستنا للعلاقة بين متغيرين، نقوم بتجميع البيانات المتعلقة بهذين المتغيرين ثم نرسم الشكل الانتشاري لهما (Scatter Plot). وقد عرفنا كذلك الهدف من الشكل الانتشاري هو تحديد طبيعة تلك العلاقة. وأن خصائص الارتباط بين ظاهرتين يمكن أن تأخذ إحدى الصور التالية:

١. علاقة خطية طردية Positive Linear Relation ship
٢. أو علاقة خطية عكسية Negative Linear Relation ship
٣. أو علاقة غير خطية Nonlinear Relation ship
٤. أو لا توجد علاقة No Relation ship

وقد عرفنا كذلك كيفية حساب قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين.

والآن إذا كان الارتباط قوياً، فإن الخطوة التالية وهي موضوع اهتمامنا في الدرس الحالي تكمن في تحديد معادلة خط الانحدار Equation of Regression Line.

الهدف الرئيسي من الانحدار الخطي هو مساعدة الباحث في معرفة نوع البيانات المعطاة وإجراء تنبؤات صحيحة من خلالها.

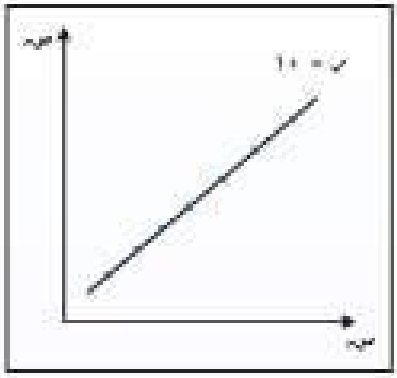
> تعريف:
> الانحدار هو طريقة إحصائية تستخدم لوصف طبيعة العلاقة بين متغيرين س ، ص من حيث إنها خطية أم غير خطية.

كما أن معادلة خط الانحدار تساعدنا في التنبؤ بقيمة المتغير ص إذا علمت قيمة المتغير س والعكس صحيح.

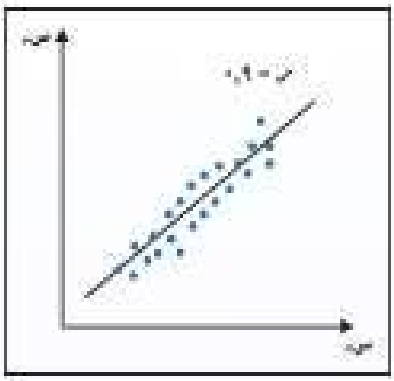
والأشكال من (٢-٧) إلى (٢-١٢) تظهر العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع الدرجات (النقاط) على خط الانحدار. وكلما تقاربت النقاط في الانطباق على هذا الخط كلما زادت أو نقصت قيمة ر إلى أن تصل إلى انطباق جميع النقاط على الخط، وفي هذه الحالة تكون ر إما +١ أو -١.

وفي الأشكال الثلاثة الأولى يكون تحرك الخط من أسفل إلى أعلى وتكون ر موجبة.

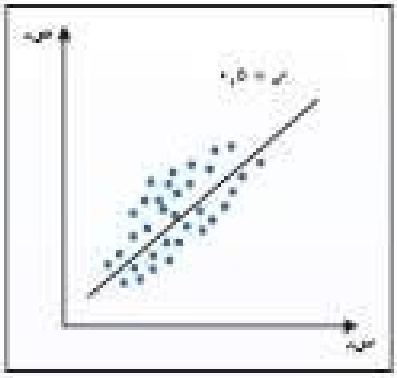
وفي الأشكال الثلاثة الثانية يكون تحرك الخط من أعلى إلى أسفل وتكون ر سالبة.



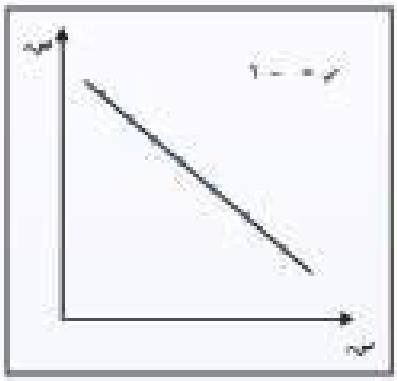
الشكل (٢ - ٧)



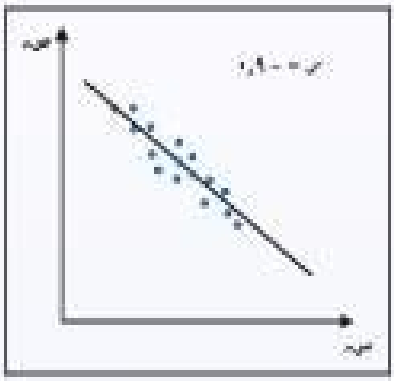
الشكل (٢ - ٨)



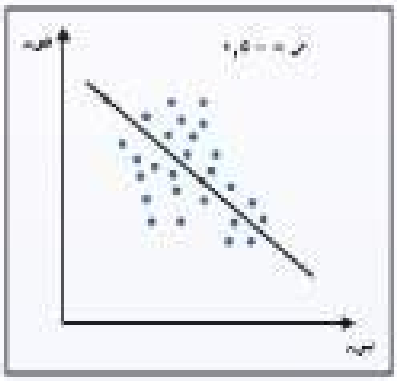
الشكل (٢ - ٩)



الشكل (٢ - ١٠)



الشكل (٢ - ١١)



الشكل (٢ - ١٢)

٢-٢ أ معادلة خط الانحدار Regression line Equation

في الجبر تكتب معادلة المستقيم على الصورة ص = م س + حـ حيث ترمز م إلى ميل هذا المستقيم، حـ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، أما في الإحصاء فإن معادلة انحدار مستقيم تكتب على الصورة:

$\hat{ص}$ = أ + ب س

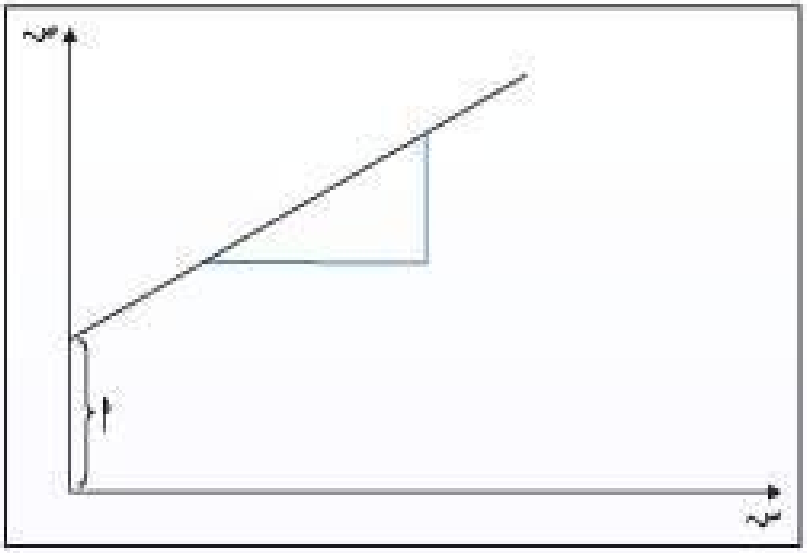
حيث أ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات،

ب ترمز إلى ميل المستقيم.

لاحظ أن:

ميل المستقيم يمكن الحصول عليه بطرق متعددة.

والشكل (٢-١٣) يوضح المصطلح الإحصائي لانحدار مستقيم.



$\hat{ص} = أ + ب س$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات

ميل المستقيم

الشكل (٢ - ١٣)

وهناك طرق متعددة لإيجاد معادلة خط الانحدار، ولعل أنسبها هنا تلك التي تستخدم نفس القيم المستخدمة في تحديد معامل الارتباط لتكون هي ذاتها عند استخراج قيم كل من ب ، أ في معادلة خط الانحدار كما يلي:

$$ب = \frac{ن (مجـ س ص) - (مجـ س) (مجـ ص)}{ن (مجـ س^٢) - (مجـ س)^٢}$$

$$أ = \overline{ص} - ب \overline{س} \quad \text{حيث} \quad \overline{ص} = \frac{مجـ ص}{ن} \ ، \ \overline{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

وهذا ما يسمى بطريقة المربعات الصغرى التي تتلخص خطواتها فيما يلي:

١ تعيين قيمة ب

٢ تطبيق الصورة $أ = \overline{ص} - ب \overline{س}$

٣ تكتب معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = أ + ب س$

٤ التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٥ تحديد مقدار الخطأ متى طلب ذلك

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

مثال ٥

من البيانات المعطاه في المثال (٢) من أمثلة معامل الارتباط:

مثال ٢

العمر (س)	الضغط (ص)
٤٣	١٢٨
٤٨	١٢٠
٥٦	١٣٥
٦١	١٤٣
٦٧	١٤١
٧٠	١٥٢

١ أوجد معادلة الانحدار الخطي

٢ ارسم خط الانحدار على الشكل الانتشاري للبيانات.

٣ تنبأ بقيمة ضغط الدم حينما يكون العمر ٥٢ سنة.

٤ أوجد مقدار الخطأ في ضغط الدم إذا علمت أن عمر الشخص ٦٧.

الحل

١ القيم التي نحتاجها للمعادلة هي: ن = ٦ ، مجـ س = ٣٤٥ ، مجـ ص = ٨١٩ ، مجـ س ص = ٤٧٦٣٤ ، مجـ س^{٢} = ٢٠٣٩٩ ، $\overline{س}$ = ٥٧,٥ ، $\overline{ص}$ = ١٣٦,٥ وبالتعويض في كل من ب ، أ فإننا نحصل على:

$$ب = \frac{ن\,(مجـ\,س\,ص) - (مجـ\,س)\,(مجـ\,ص)}{ن\,(مجـ\,س^{٢}) - (مجـ\,س)^{٢}}$$

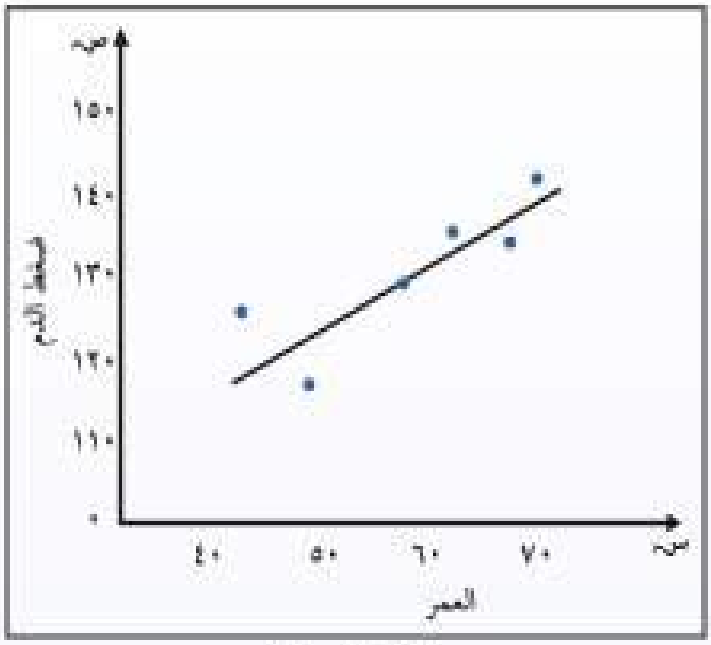
$$= \frac{٦ \times ٤٧٦٣٤ - ٣٤٥ \times ٨١٩}{٦ \times ٢٠٣٩٩ - (٣٤٥)^{٢}} = ٠,٩٦٤$$

$$أ = \overline{ص} - ب\,\overline{س}$$

$$= ١٣٦,٥ - ٠,٩٦٤ \times ٥٧,٥ = ٨١,٠٧$$

معادلة خط انحدار ص / س هي: $\hat{ص}$ = ٨١,٠٧ + ٠,٩٦٤ س

٢ الشكل (٢-١٤) يوضح انحدار هذا المستقيم:



الشكل (٢ - ١٤)

٣ التنبؤ:

$\hat{ص}$ = ٨١,٠٧ + ٠,٩٦٤ س

= ٨١,٠٧ + ٠,٩٦٤ × ٥٢

= ٨١,٠٧ + ٥٠,١٢٨ = ١٣١,١٩٨

ضغط الدم = ١٣١ تقريباً.

٤ مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|

نوجد القيمة التي تحقق معادلة الانحدار إذا علم أن عمر الشخص ٦٧

$\hat{ص}$ = ٨١,٠٧ + ٠,٩٦٤ س

= ٨١,٠٧ + ٠,٩٦٤ × ٦٧

$ص_٢$ = ١٤٥,٦٥٨ = ١٤٦ تقريباً

مقدار الخطأ = |$ص_١$ - $ص_٢$|.

= |١٤١ - ١٤٦| = ٥

تمارين ٢-٢

١ البيانات التالية تعبر عن عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

العمر (س)	١٨	٢٦	٣٢	٣٨	٥٢	٥٩
عدد ساعات التمرين (ص)	١٠	٥	٢	٣	١,٥	١

أ أوجد معادلة الانحدار الخطي

ب تنبأ بعدد ساعات التمرينات الرياضية عندما يكون عمر الشخص ٣٥ سنة

٢ البيانات التالية لقيم متغيرين س ، ص

(س)	٥	٦	٣	٧	٨	٢
(ص)	٧	٤	٧	١	٢	٨

أ أوجد معادلة الانحدار الخطي

ب تنبأ بقيمة ص عندما س= ٤

٣ البيانات التالية لقيم متغيرين س ، ص

(س)	٢	٥	٨	٧	١٠	١٢
(ص)	٢	٤	٧	٦	٩	١٠

أ أوجد $\hat{ص}$

ب أوجد $\hat{ص}$ عندما س = ٧

جـ احسب مقدار الخطأ عندما س = ١٢

٤ أراد أحد الطلاب أن يعرف كم تؤثر عدد مرات غياب الطالب عن الحصة في الدرجة النهائية التي يحصل عليها في مقرر ما. البيانات التي حصلنا عليها من عينة عشوائية على النحو التالي:

عدد مرات الغياب (س)	١٠	١٢	٢	٠	٨	٥
الدرجة النهائية في الاختبار (ص)	٧٠	٦٥	٩٦	٩٤	٧٥	٨٢

أ أوجد معادلة خط الانحدار.

ب تنبأ بالدرجة النهائية للاختبار إذا علمت أن عدد مرات غياب الطالب ٤ مرات

جـ أوجد مقدار الخطأ في الدرجة النهائية للاختبار إذا علمت أن عدد مرات الغياب ٨ أيام

تمارين عامة (٢-٣)

أولاً: في البنود من (١-٥) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة.

١ إذا كانت العلاقة عكسية بين متغيرين. فإن ذلك يعني أنه كلما زادت قيمة المتغير س فإن قيمة المتغير ص تزيد. (أ) (ب)

٢ إذا كانت قيمة معامل الارتباط مساوية -١ فإن العلاقة خطية تامة بين المتغيرين. (أ) (ب)

٣ إذا كان معامل الارتباط صفراً فإن الارتباط تاماً. (أ) (ب)

٤ في معادلة خط الانحدار، يوجد متغير مستقل واحد ومتغير تابع واحد. (أ) (ب)

ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ قوة العلاقة بين متغيرين تتحدد بقيمة:

(أ) ر (ب) أ (جـ) س (د) ب

٢ إذا كان معامل الارتباط = ٠,١٣ فإن ذلك يعني:

(أ) ارتباط طردي قوي (ب) ارتباط طردي ضعيف

(جـ) ارتباط عكسي قوي (د) ارتباط عكسي ضعيف

٣ إذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{ص}$ = ٣ + ٠,٥ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٤ هي:

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢

٤ الصورة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار تكون على الصورة:

(أ) $\hat{ص}$ = أ + ب ص (ب) $\hat{ص}$ = ب س + أ (جـ) $\hat{ص}$ = أ س + ب (د) $\hat{ص}$ = أ ص + ب

٥ إذا كان معامل الارتباط = -٠,٩٥ فإن ذلك يعني:

(أ) ارتباط طردي قوي (ب) ارتباط طردي ضعيف

(ج) ارتباط عكسي قوي (د) ارتباط عكسي ضعيف

ثالثاً: أكمل الجمل التالية بالكلمة المناسبة:

١ الشكل البياني الإحصائي يستخدم لوصف العلاقة الموجودة بين المتغيرين س ، ص يسمى .....

٢ المتغير س يسمى المتغير .....

٣ المتغير ص يسمى المتغير .....

٤ قيم معامل الارتباط ر من ..... إلى .....

٥ إذا وقعت جميع النقاط على خط مستقيم، فإن قيمة ر في هذه الحالة هي ..... أو .....

رابعاً: في المسائل التالية من (١ - ٣) قم بعمل ما يلي:

أ احسب قيمة معامل الارتباط

ب أوجد معادلة خط الانحدار

١ البيانات التالية تعبر عن عمر الأب وعدد الأبناء.

عمر الأب (س)	١٩	٢١	٢٧	٢٠	٢٥	٣١	٣٢	٣٨
عدد الأبناء (ص)	١	٢	٣	٠	١	٤	٣	٤

تنبأ بعدد الأبناء لدى الأب الذي عمره ٣٥ سنة.

٢ البيانات التالية تعبر عن عمر السائق وعدد الحوادث التي قام بها خلال عام.

عمر السائق (س)	٦٣	٦٥	٦٠	٦٢	٦٦	٦٧	٥٩
عدد الحوادث (ص)	٢	٥	١	١	٦	٦	١

تنبأ بعدد الحوادث لسائق عمره ٦٤ سنة.

٣ أراد باحث أن يتعرف إذا ما كان عمر الطفل يرتبط بعدد مشاهداته الفعلية لمباريات كرة القدم خلال الشهور الأربعة الماضية، وقد جاءت البيانات كما يلي:

عمر الطفل (س)	٦	٨	٩	١٠	١٢	١٤
عدد مشاهدة المباريات (ص)	٢	١	٣	٤	٦	٥

تنبأ بعدد المباريات التي يشاهدها طفل عمره ١١ سنة.

٤ من الجدول التالي:

(س)	١	٣	٦	٨	١٠	١٢	١٥
(ص)	١٠	١٢	١٥	١٩	٢٠	٢١	٢١

أوجد معادلة خط الانحدار.

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة الإنجليزية	باللغة العربية
Inferential Statistics	الإحصاء الاستدلالي
Scatter Plot	الشكل الانتشاري
Correlation	الارتباط
The Pearson Correlation Coefficient	معامل ارتباط بيرسون
Regression	الانحدار
Regression line Equation	معادلة خط الانحدار
Correlation Coefficient	معامل الارتباط
Least Square Method	طريقة المربعات الصغرى

الفصل الثالث

السلاسل الزمنية

TIME SERIES

٣ - ١ السلسلة الزمنية

٣-١ أ مقدمة

٣-١ ب المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية

٣-١ جـ التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

٣ - ٢ عناصر السلسلة الزمنية
- الاتجاه العام
- التغيرات الموسمية
- التغيرات الدورية
- التغيرات العرضية

٣ - ٣ تحليل السلاسل الزمنية
- معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

٣ - ٤ تمارين عامة

٣ - ١ السلسلة الزمنية TIME SERIES

٣ - ١ أ مقدمة

سبق وأن تطرقنا في الفصل السابق إلى العلاقة بين الظواهر من خلال معادلة خط انحدار ص / س ونتعرض في هذا الفصل إلى حالة خاصة من هذه العلاقات بأن يكون أحد المتغيرين في كل علاقة هو الزمن والمتغير الآخر هو قيم الظاهرة، وهذه القيم تسجل مشاهداتها على فترات زمنية محددة غالباً ما تكون متساوية، قد تكون سنوية أو نصف سنوية أو ربع سنوية أو شهرية أو أسبوعية أو يومية أو كل ساعة. . . إلخ تسمى السلسلة الزمنية.

ومن أمثلة ذلك الصادرات والواردات على مدار عدد من السنوات - الإنتاج السنوي للبترول في دولة الكويت على مدار عدة سنوات - المبيعات الشهرية لإحدى المؤسسات التجارية خلال عام - مقدار استهلاك المياه شهرياً لفترة معلومة - درجات الحرارة اليومية خلال فترة زمنية (أسبوع - شهر).

ودراسة السلاسل الزمنية وتحليلها له أهمية عالية في عصرنا الحالي، إذ إنها تحدد التغيرات والعوامل التي تؤثر على هذه السلاسل، وتمكن المخططين من وضع المعالجات المطلوبة.

تعريف

السلسلة الزمنية هي مجموعة القيم التي تأخذها ظاهرة ما في فترات زمنية غالباً ما تكون متساوية ومتعاقبة (سنة - ربع سنة - شهر - أسبوع - يوم - ساعة . . .).

أي أنها علاقة تربط بين متغيرين أحدهما هو الظاهرة المطلوب دراستها والآخر هو الزمن أي أننا نتتبع سلوك الظاهرة في أزمنة معينة، ويسمى هذا التتبع لقيم الظاهرة خلال أزمنة محددة بالسلسلة الزمنية.

وعليه فإن السلسلة الزمنية تحتوي على متغيرين أحدهما هو الزمن (المتغير المستقل) وسنرمز له بالرمز س والآخر هو الظاهرة (المتغير التابع) وسنرمز له بالرمز ص، وتحرص على قياس قيم هذه الظواهر بنفس الوحدات وبنفس طريقة القياس، وإلا انعدمت إمكانية المقارنة بين القيم حيث إن أهم ما تظهره السلاسل الزمنية هو التغيرات التي تصادفها قيم الظاهرة خلال فترة الدراسة.

بعض السلاسل الزمنية تكون تصاعدية بصورة مطردة، وفي هذا النوع من السلاسل تزداد قيم المشاهدة لها بمرور الزمن، مثل عدد السيارات اليابانية المستوردة لدولة الكويت، وبعض السلاسل الزمنية تكون تنازلية بصورة مطردة حيث تكون قيم مشاهداتها في تناقص بمرور الزمن، مثل عدد الوفيات بمرض الكوليرا في السنوات الأخيرة، والبعض الآخر من السلاسل الزمنية وهي الكثرة لا تخضع لوتيرة ثابتة فتكون متذبذبة بين التصاعدية والتنازلية وتكون قيم المشاهدة موزعة بين الصعود والنزول مثل استهلاك الكهرباء على مدار السنة.

٣ - ١ ب المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية

(HISTORICAL CURVE OF TIME SERIES)

عرفنا فيما سبق أن السلسلة الزمنية هي اقتران بين قيم الظاهرة والزمن، وعليه فإنه يمكن تمثيل السلسلة الزمنية بيانياً وذلك بأن نأخذ قيم الزمن على المحور الأفقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي في المستوى الإحداثي، ثم نعين نقطة لكل فترة زمنية، نصل النقاط بخط منكسر(مضلع) فنحصل على ما يطلق عليه اسم "المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية".

وندرس الآن بشيء من التفصيل التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

٣ - ١ جـ التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

مثال ١

الجدول التالي لسلسلة زمنية يبين إجمالي الواردات بالطن من محصول القمح في إحدى الدول من عام ١٩٩٨ إلى عام ٢٠٠٧م

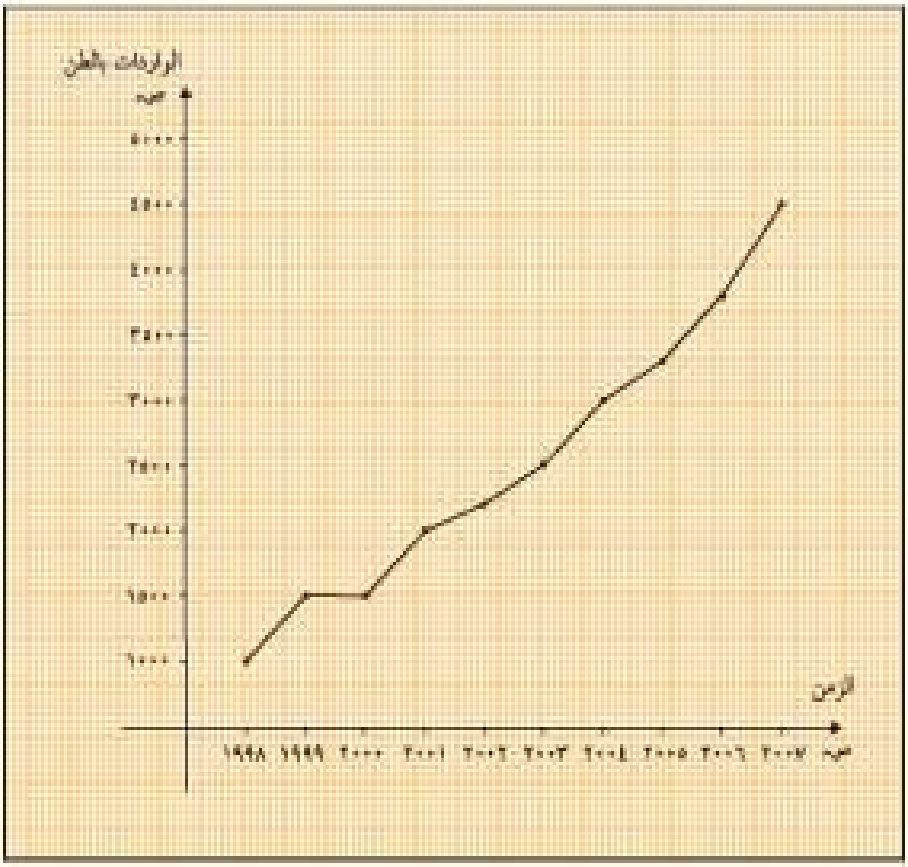
السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
جملة الواردات بالطن	١٠٠٠	١٥٠٠	١٥٠٠	٢٠٠٠	٢٢٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	٣٣٠٠	٣٨٠٠	٤٥٠٠

والمطلوب: أولاً: التمثيل البياني لهذه السلسلة.

ثانياً: بين نوع العلاقة بين الواردات والزمن.

الحل

أولاً: نمثل قيم الزمن على المحور الأفقي وقيم الواردات على المحور الرأسي بحيث تكون المسافات بين القيم على المحور الأفقي متساوية والرأسي متساوية



شكل (٣ - ١)

الشكل المرسوم هو التمثيل البياني للسلسلة الزمنية

ثانياً: نلاحظ من البيان أن الخط المنكسر (المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية) يتجه إلى الصعود أي أنه يشير إلى تزايد الواردات خلال هذه الفترة الزمنية من عام ١٩٩٨ وحتى عام ٢٠٠٧م أي أن العلاقة بين قيم الواردات والزمن علاقة طردية فقيم الواردات تزداد طردياً مع مرور الزمن.

مثال ٢

الجدول التالي يوضح تكاليف إنتاج إحدى السلع بالألف دينار لمصنع ما خلال الفترات الزمنية المحددة بالجدول.

الشهر	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر
تكاليف الإنتاج بالألف دينار	٩	١٣	١٠	١٥	١٦	١٧	١٩	٢٢

والمطلوب: أولاً: التمثيل البياني لهذه السلسلة

ثانياً: بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

الحل

أولاً: نمثل قيم الزمن على المحور الأفقي وتكاليف الإنتاج على المحور الرأسي كما هو موضح بالشكل.

شكل (٣ - ٢)

ثانياً: نلاحظ أنه يوجد تذبذب في السلسلة لكن الاتجاه العام للخط المنكسر للسلسلة الزمنية أيضاً يتجه نحو الأعلى مشيراً إلى تزايد تكاليف إنتاج هذه السلعة كلما ازداد الزمن.

مثال ٣

تهتم الدول بتنمية شعوبها من خلال القضاء على الأمية في الحاسوب بإعداد برامج بهذا الخصوص، والجدول التالي يوضح عدد الأميين بالمئات في محافظة ما خلال الفترات الزمنية الموضحة من خلال الجدول التالي.

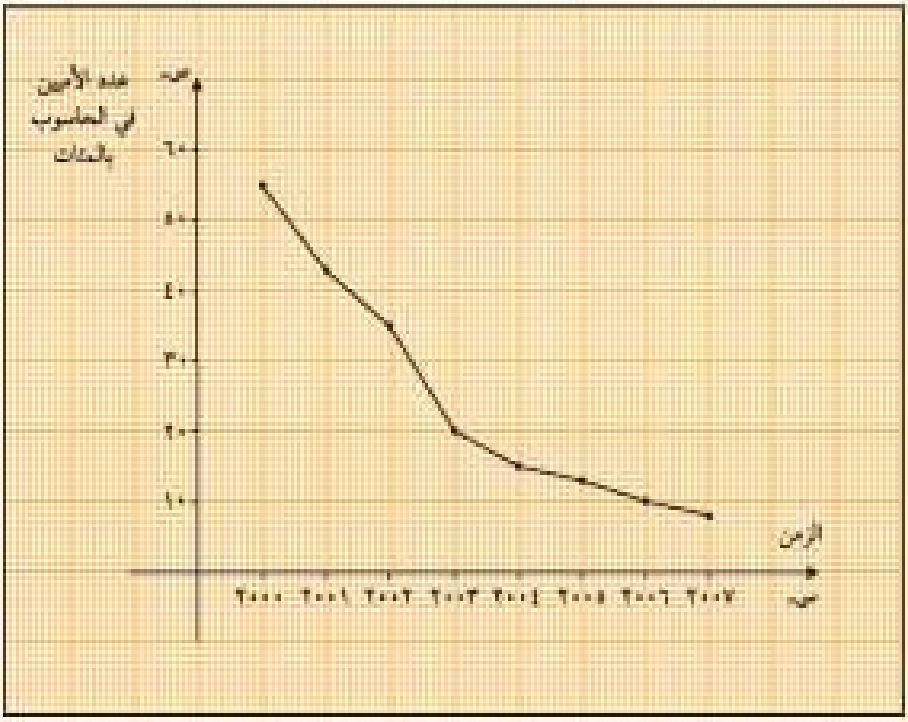
السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
عدد الأميين بالمئات	٥٥	٤٣	٣٥	٢٠	١٥	١٣	١٠	٨

والمطلوب: أولاً: التمثيل البياني لهذه السلسلة

ثانياً: بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

الحل

أولاً: نمثل قيم الزمن على المحور الأفقي و عدد الأميين في الحاسوب بالمئات على المحور الرأسي كما هو موضح بالشكل



شكل (٣ - ٣)

ثانياً: نلاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة يتجه نحو الأسفل أي أنه يشير إلى تناقص عدد الأميين في هذه المحافظة وهو يبين نجاح برامج هذه الدولة في القضاء على الأمية.

تمارين (٣ - ١)

١ الجدول التالي يبين أوزان شخص معين بالكيلوجرام حسب العمر بالسنوات.

العمر	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤
الوزن بالكيلوجرام	١٢	٢٠	٣٠	٥٠	٦٠	٦٥

والمطلوب: أولاً: تمثيل البيانات السابقة بالسلسلة الزمنية

ثانياً: توضيح نوع العلاقة بين الوزن والعمر

٢ الجدول التالي يبين عدد المدخنين في مؤسسة حكومية معينة خلال ستة أشهر.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
عدد المدخنين	٧٥	٦٠	٥٥	٤٠	٣٠	٢٠

والمطلوب: أولاً: ارسم المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية

ثانياً: بين نوع العلاقة بين عدد المدخنين والزمن

٣ الجدول التالي يبين عدد مشاهدي جهاز التلفاز بالآلاف لبرنامج يومي معين خلال أسبوع.

اليوم	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
عدد المشاهدين بالآلاف	١٦	١٢	٨	١٠	٢٥	٣٠	٢٠

والمطلوب: أولاً: مثل البيانات السابقة بالسلسلة الزمنية

ثانياً: بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية

٣ - ٢ عناصر السلسلة الزمنية

عرفنا فيما سبق أن السلسلة الزمنية هي علاقة بين متغيرين أحدهما يسمى المتغير المستقل وهو الزمن (س) والآخر يسمى المتغير التابع وهو قيم الظاهرة (ص) والسبب في اختيار هذه الرموز لأن العلاقة التي نحن بصددها غالباً ما تكون علاقة خطية.

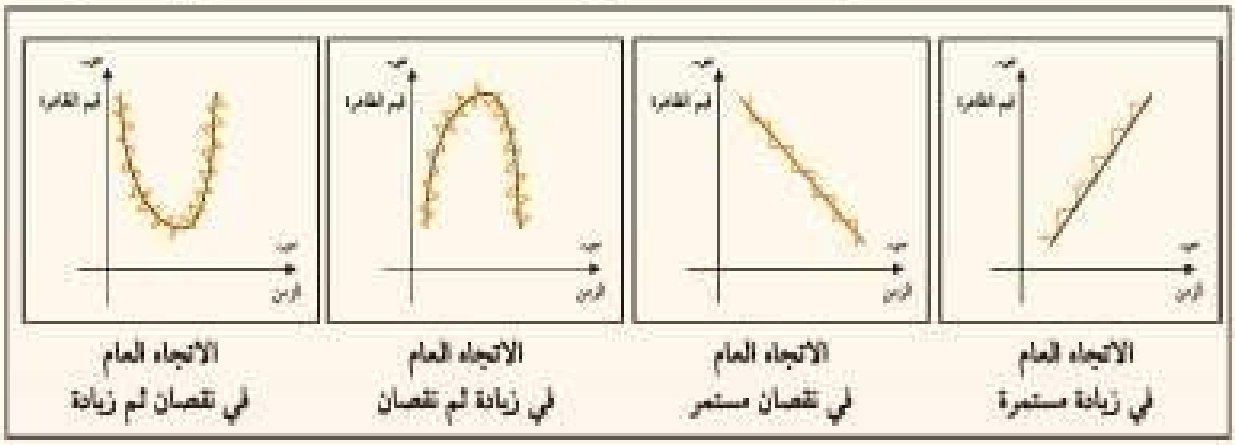
والهدف من الدراسة الإحصائية للسلسلة الزمنية هو الكشف عن التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة من زيادة أو نقصان في زمن محدد ونتعرض لهذه التغيرات التي تحدث على السلسلة الزمنية والتي تؤثر فيها مجتمعة أو منفردة ما يسمى بعناصر السلسلة الزمنية وهي:

١. المؤثرات الاتجاهية (الاتجاه العام). (SECULAR TREND)
٢. التغيرات الموسمية. (SEASONAL VARIATIONS)
٣. التغيرات الدورية. (CYCLIC VARIATIONS)
٤. التغيرات العرضية (الفجائية). (IRREGULAR VARIATIONS)

١ الاتجاه العام للسلسلة الزمنية (SECULAR TREND)

أشرنا فيما سبق إلى الاتجاه العام للسلسلة ونبين فيما يلي أن اتجاه السلسلة يمكن أن يكون تصاعدياً أو تنازلياً أو كليهما معاً، والمقصود بالاتجاه العام هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية لظاهرة ما تكون هي محل الدراسة وذلك خلال فترة طويلة من الزمن.

فيمكن تحديد الشكل العام للسلسلة الزمنية سواء كانت في تزايد مستمر مثل عدد السكان في بلد ما أو نقصان مستمر (انكماش)مثل عدد الأميين في دولة ما أو ما يحدث للسلسلة من تزايد ونقصان في فترات زمنية متعاقبة كما يحدث في رحلات الطيران في فترات زمنية محددة كما هو موضح بالشكل.



شكل (٣ - ٤)

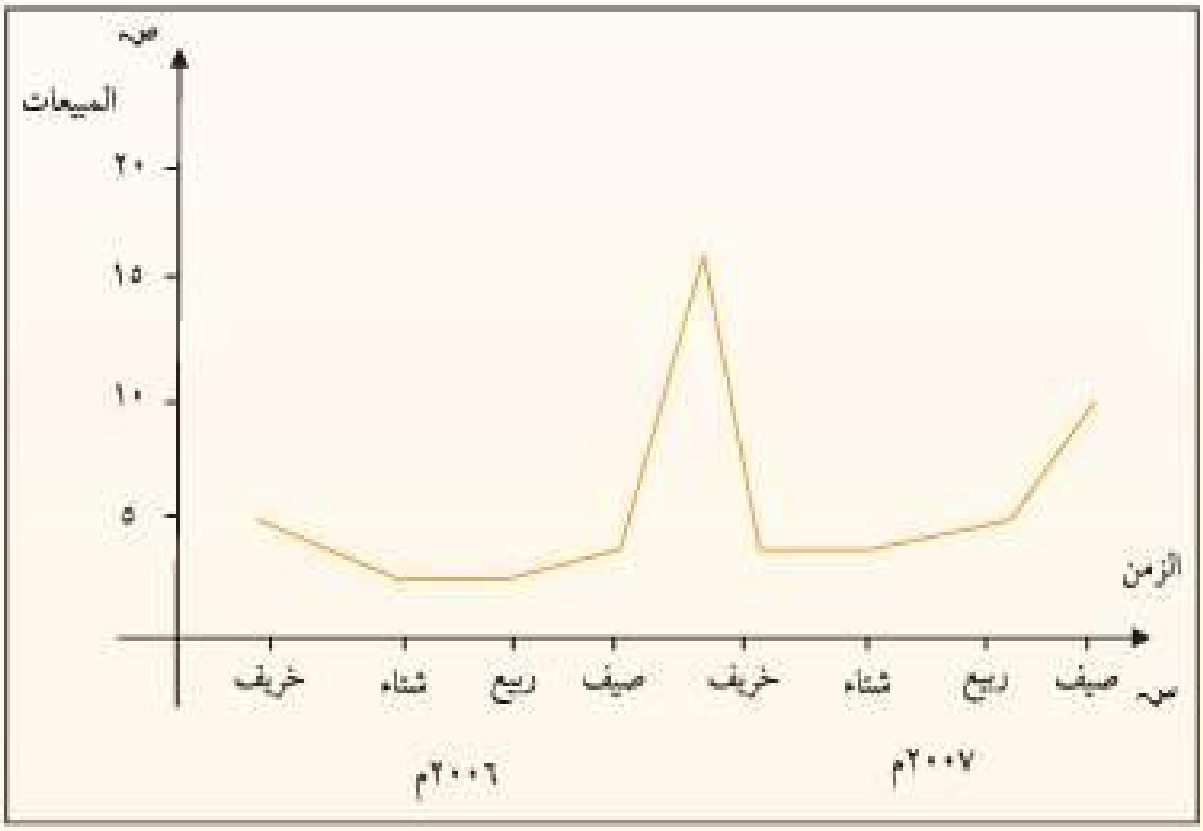
وبصورة عامة فإن الاتجاه العام يعكس مؤثرات مختلفة تؤدي إلى زيادة قيمة الظاهرة أو نقصها وذلك على مدى طويل من الزمن.

وعند حدوث تغيير في الاتجاه العام فإنه يكون تغييراً تدريجياً وليس مفاجئاً والاتجاه العام يمثل عادة بخط مستقيم أو منحني.

٢ التغيرات الموسمية للسلسلة الزمنية : (SEASONAL VARIATIONS)

هي التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترات زمنية معينة أقل من سنة كأن تكون نصف سنوية أو ربع سنوية أو شهرية أو أسبوعية أو . . .

والأمثلة على ذلك متعددة منها سقوط الأمطار بشكل موسمي، وكذلك مبيعات المشروبات الغازية تزداد خلال فصل الصيف، و استهلاك الكهرباء والماء يزداد أيضاً في فصل الصيف، وزيادة حركة المواصلات وازدحام الطرق في فترتي الصباح والظهيرة من كل يوم، والشكل التالي يبين التغيرات الموسمية لمبيعات المشروبات الغازية في عامين متتالين ٢٠٠٦م، ٢٠٠٧م على الترتيب.



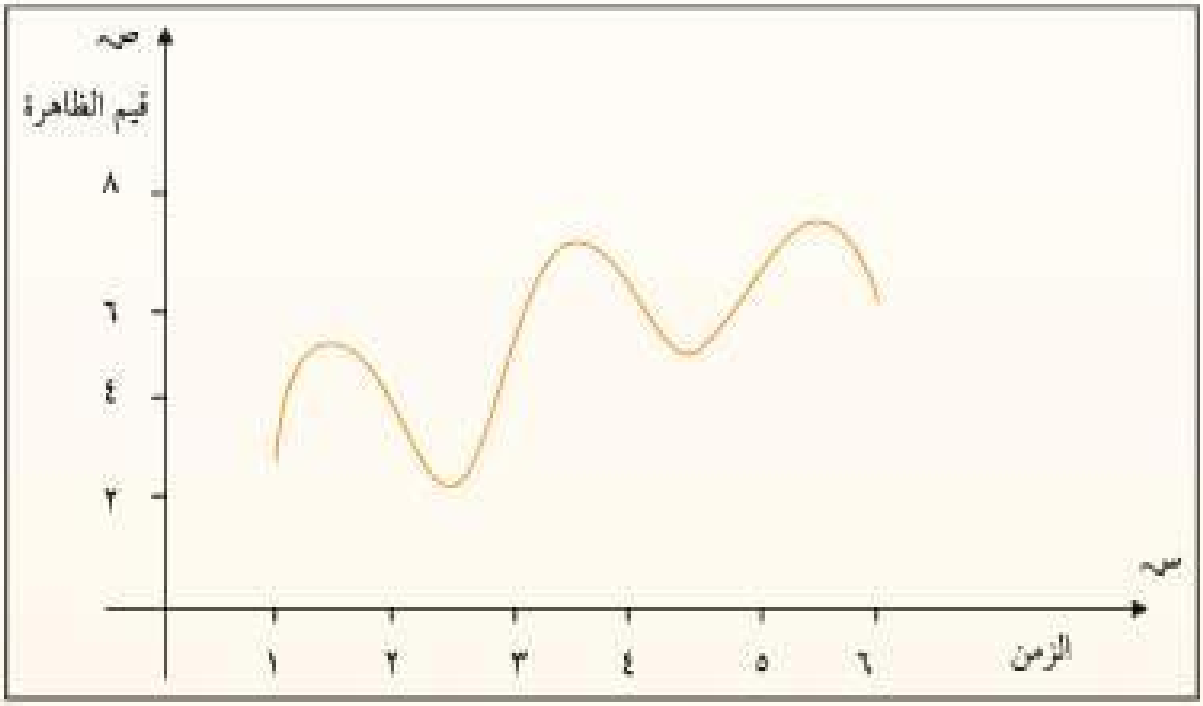
شكل (٣ - ٥)

لاحظ أن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في تزايد مستمر.

مع ملاحظة أن فصل الصيف هو أكثر الفصول في المبيعات.

٣ التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية : (CYCLIC VARIATIONS)

هي تغيرات للسلسلة الزمنية على فترات طويلة المدى أكثر من سنة ، وتختلف التغيرات الدورية عن التغيرات الموسمية في أن التغيرات الموسمية تحدث في فترات زمنية أقل من سنة، ويمكن اعتبار التغيرات الدورية تحركاً لفترة أقل طولاً من فترة الاتجاه العام، ومن الأمثلة المهمة للتغيرات الدورية ما يحدث لشركة ما من فترة رخاء اقتصادي ثم فترة ركود اقتصادي ثم فترة كساد ثم انفراج من الأزمة الاقتصادية كما هو موضح في الشكل.



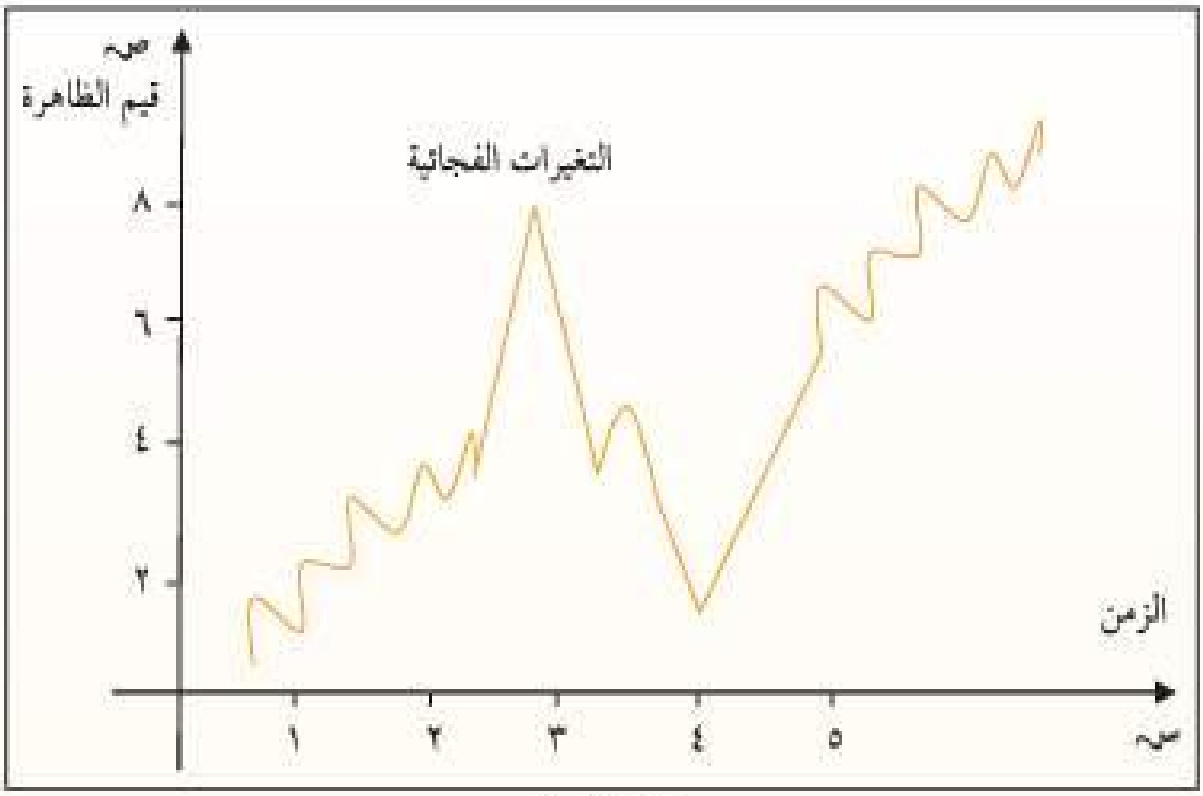
شكل (٣ - ٦)

نلاحظ أيضاً أن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في تزايد مستمر.

٤ التغيرات العرضية (الفجائية) للسلسلة الزمنية : (IRREGULAR VARIATIONS)

تتأثر كثير من الظواهر من وقت إلى آخر بعوامل مختلفة تعود إلى الصدفة البحتة أو إلى أمور يصعب التنبؤ بها، فمثلاً في المحلات التجارية تختلف قيم المبيعات من يوم إلى آخر متأثرة بطبيعة الطقس أو وجود حفلات زواج إلى غير ذلك من عوامل الصدفة

كما أن التغيرات قد تحدث نتيجة عوامل مفاجئة كالحروب والفيضانات والأوبئة والزلازل، والتغيرات من هذا النوع تعرف بالتغيرات العرضية أو الفجائية، ويمكن توضيح التغيرات العرضية أو الفجائية في المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية بالشكل التالي:



شكل (٣ - ٧)

نلاحظ أيضاً أن الاتجاه العام للسلسلة الزمنية في تزايد مستمر.

تمارين ٣-٢

• لكل بند مما يلي عدة اختيارات واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

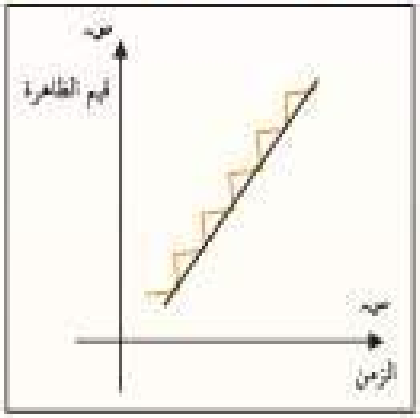
١ الشكل المرسوم يبين:

أ تزايد للسلسلة الزمنية

ب تناقص للسلسلة الزمنية

ج تزايد ثم تناقص للسلسلة الزمنية

د لا يشتمل على أي مما سبق



٢ الشكل المرسوم يبين:

أ تزايد للسلسلة الزمنية

ب تناقص للسلسلة الزمنية

ج تزايد ثم تناقص للسلسلة الزمنية

د لا يشتمل على أي مما سبق

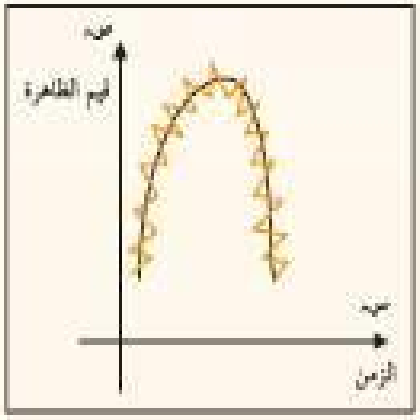
٣ الشكل المرسوم يبين:

أ تزايد للسلسلة الزمنية

ب تناقص للسلسلة الزمنية

ج تزايد ثم تناقص للسلسلة الزمنية

د لا يشتمل على أي مما سبق



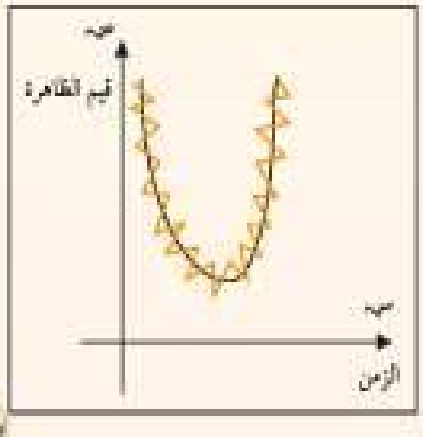
١ الشكل المرسوم يبين:

أ تزايد للسلسلة الزمنية

ب تناقص للسلسلة الزمنية

ج تزايد ثم تناقص للسلسلة الزمنية

د لا يشتمل على أي مما سبق



٣ - ٣ تحليل السلاسل الزمنية

معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية (EQUATION OF TIME SERIES)

يعتبر عنصر الاتجاه العام من أهم العناصر التي تتكون منها السلسلة الزمنية، وذلك لأنها تستخدم في عملية التنبؤ بقيم الظاهرة للفترات الزمنية المستقبلية، ويمكن تقدير معادلة الاتجاه العام بعدة طرق تتفاوت فيما بينها من حيث الدقة، وسوف نستخدم طريقة المربعات الصغرى.

ولقد سبق أن درسنا الطريقة عند إيجاد معادلة خط الانحدار وهي أفضل وأكثر الطرق انتشاراً لتحديد خط الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

بفرض أن العلاقة بين قيم الظاهرة ص والزمن س علاقة خطية فإن معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية هي:

$\hat{ص} = أ + ب س$ حيث أ ، ب ثابتان

والمعادلة صالحة للتنبؤ بقيم الظاهرة في المستقبل، والتنبؤ بالاتجاه العام يبنى أساساً على الاتجاه في الماضي وهذا لا يتأتى إلا إذا كانت السلسلة الزمنية مدروسة لفترة طويلة من الزمن.

وعند إيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية سنتبع الخطوات الآتية:

١ نفرض قيم الزمن س باعتباره الفترة الأولى (الأساس) ونعبر عنه بالعدد صفر، الفترة الثانية بالعدد ١ ثم الفترة الثالثة بالعدد ٢ وهكذا. . .

٢ نعين قيم الثوابت ب ، أ كما سبق شرحه حيث:

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^2) - (\sum س)^2}$$

$$أ = \overline{ص} - ب \overline{س} \quad \text{حيث} \quad \overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} ، \overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

٣ تكتب معادلة الاتجاه العام على الصورة: $\hat{ص} = أ + ب س$

٤ نتنبأ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٥ نحسب مقدار الخطأ

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية - القيمة التي تحقق معادلة الاتجاه العام للسلسلة الزمنية|

ونعبر عنه $|ص_i - \hat{ص}_i|$

مثال ١

الجدول التالي يبين الكميات المنتجة من البترول بملايين البراميل في الفترة من ١٩٩٩م حتى ٢٠٠٧م

السنة	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
الإنتاج بملايين البراميل	٤١	٤٢	٣٩	٣٣	٣٨	٣٩	٤٥	٤٣	٣٧

١ أوجد معادلة الاتجاه العام لكميات البترول في الفترة المذكورة

٢ تنبأ بكمية الإنتاج لعام ٢٠١٠م

٣ أوجد سنة الإنتاج إذا علم أن كمية الإنتاج هي ٤٠,٧٣٩ مليون برميل

٤ احسب مقدار الخطأ في كمية إنتاج البترول لعام ٢٠٠١ م

الحل

١ نعتبر عام ١٩٩٩م هو عام الأساس ويعطى العدد صفر، عام ٢٠٠٠م يعطى العدد ١ وهكذا .....

السنوات	س	ص	س ص	$س^2$
١٩٩٩	٠	٤١	٠	٠
٢٠٠٠	١	٤٢	٤٢	١
٢٠٠١	٢	٣٩	٧٨	٤
٢٠٠٢	٣	٣٣	٩٩	٩
٢٠٠٣	٤	٣٨	١٥٢	١٦
٢٠٠٤	٥	٣٩	١٩٥	٢٥
٢٠٠٥	٦	٤٥	٢٧٠	٣٦
٢٠٠٦	٧	٤٣	٣٠١	٤٩
٢٠٠٧	٨	٣٧	٢٩٦	٦٤
	$\sum$ س = ٣٦	$\sum$ ص = ٣٥٧	$\sum$ س ص = ١٤٣٣	$\sum$ $س^2$ = ٢٠٤

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^٢) - (\sum س)^٢}$$

$$ب = \frac{٩(١٤٣٣) - (٣٦)(٣٥٧)}{٩(٢٠٤) - (٣٦)^٢}$$

$$ب = \frac{١٢٨٩٧ - ١٢٨٥٢}{١٨٣٦ - ١٢٩٦} = \frac{٤٥}{٥٤٠} = ٠,٠٨٣$$

∴ ب = ٠,٠٨٣

$$أ = \overline{ص} - ب\,\overline{س}$$

$$\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن} \qquad \overline{ص} = \frac{٣٥٧}{٩} = ٣٩,٦٦$$

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} \qquad \overline{س} = \frac{٣٦}{٩} = ٤$$

$$∴ أ = \overline{ص} - ب\,\overline{س}$$

$$= ٣٩,٦٦ - ٠,٠٨٣ \times ٤$$

$$= ٣٩,٦٦ - ٠,٣٣٢$$

$$أ = ٣٩,٣٢٨$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$$\hat{ص} = أ + ب\,س$$

$$\hat{ص} = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣\,س$$

٢ نوجد كمية الإنتاج المتوقعة في عام ٢٠١٠ م (أي عند س = ١١)

$\hat{ص} = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣\,س$ وبالتعويض عن س = ١١

$$\hat{ص} = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣ \times ١١$$

$$= ٣٩,٣٢٨ + ٠,٩١٣$$

$\hat{ص} = ٤٠,٢٤١$ مليون برميل

٣ إذا كانت كمية الإنتاج ٤٠,٧٣٩ فإن سنة الانتاج ص نوجدها من المعادلة :

$\hat{ص} = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣$ ص

٤٠,٧٣٩ = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣ ص

٠,٠٨٣ ص = ٤٠,٧٣٩ − ٣٩,٣٢٨

٠,٠٨٣ ص = ١,٤١١

$ص = \frac{١,٤١١}{٠,٠٨٣}$

ص = ١٧

∵ سنة الإنتاج = سنة الأساس + ص

∴ سنة الإنتاج = ١٩٩٩ + ١٧

= ٢٠١٦

٤ $\hat{ص} = أ + ب$ ص

$\hat{ص}_{٢} = ٣٩,٣٢٨ + ٠,٠٨٣ \times ٢$

= ٣٩,٣٢٨ + ٠,١٦٦ = ٣٩,٤٩٤

$\hat{ص}_{٢} = ٣٩,٤٩٤$

∴ مقدار الخطأ = $|ص_{١} - ص_{٢}|$

= |٣٩ − ٣٩,٤٩٤| = ٠,٤٩٤

مثال ٢

البيانات التالية توضح صادرات إحدى الدول (بالمليون دينار) في الفترة من ١٩٩٥م وحتى ٢٠٠٣م.

السنوات	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣
قيمة الصادرات بالمليون	٦	١٠	١٣	١٥	١٨	٢٢	٢٦	٣٠	٣٥

١ أوجد معادلة خط الاتجاه العام لقيمة الصادرات خلال الفترة المذكورة.

٢ ما قيمة الصادرات المتوقعة عام ٢٠١٢م.

٣ إذا كانت قيمة الصادرات المتوقعة ٢٥,٢٥١ أوجد السنة لهذه الصادرات.

٤ احسب مقدار الخطأ في قيمة الصادرات لعام ١٩٩٩م.

الحل

١ نعتبر عام ١٩٩٥ هو عام الأساس ويعطى العدد صفر، عام ١٩٩٦ يعطى العدد ١ وهكذا

السنوات	س	ص	س ص	$س^2$
١٩٩٥	٠	٦	٠	٠
١٩٩٦	١	١٠	١٠	١
١٩٩٧	٢	١٣	٢٦	٤
١٩٩٨	٣	١٥	٤٥	٩
١٩٩٩	٤	١٨	٧٢	١٦
٢٠٠٠	٥	٢٢	١١٠	٢٥
٢٠٠١	٦	٢٦	١٥٦	٣٦
٢٠٠٢	٧	٣٠	٢١٠	٤٩
٢٠٠٣	٨	٣٥	٢٨٠	٦٤
	$\sum$ س = ٣٦	$\sum$ ص = ١٧٥	$\sum$ س ص = ٩٠٩	$\sum س^2$ = ٢٠٤

ويكون

$$ب = \frac{ن(\sum س ص) - (\sum س)(\sum ص)}{ن(\sum س^٢) - (\sum س)^٢}$$

$$ب = \frac{٩(٩٠٩) - (٣٦)(١٧٥)}{٩(٢٠٤) - (٣٦)^٢}$$

$$ب = \frac{٨١٨١ - ٦٣٠٠}{١٨٣٦ - ١٢٩٦}$$

∴ ب = ٣,٤٨٣

أ = $\overline{ص}$ - ب $\overline{س}$

$\overline{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$ $\overline{ص} = \frac{١٧٥}{٩} = ١٩,٤٤$

$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$ $\overline{س} = \frac{٣٦}{٩} = ٤$

أ = $\overline{ص}$ - ب $\overline{س}$

= ١٩,٤٤ - ٣,٤٨٣ × ٤

∴ أ = ٥,٥٠٨

∴ معادلة الاتجاه العام هي:

$\hat{ص}$ = أ + ب س

$\hat{ص}$ = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ س

٢ نوجد قيمة الصادرات المتوقعة عام ٢٠١٢م (أي عند س = ١٧)

$\hat{ص}$ = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ س وبالتعويض عن س = ١٧

$\hat{ص}$ = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ × ١٧

= ٦٤,٧١٩ مليون دينار

٣ قيمة الصادرات المتوقعة ص = ٢٥,٢٥١ عند سنة الانتاج س من المعادلة :

$$\hat{ص} = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ \text{ س}$$

$$٢٥,٢٥١ = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ \text{ س}$$

$$٣,٤٨٣ \text{ س} = ٢٥,٢٥١ - ٥,٥٠٨$$

$$٣,٤٨٣ \text{ س} = ١٩,٧٤٣$$

$$\text{س} = \frac{١٩,٧٤٣}{٣,٤٨٣} = ٥,٦٦٧$$

∴ س = ٦ (نأخذ قيمة س العدد الصحيح التالي للعدد العشري)

∴ سنة الإنتاج هي ٢٠٠١م

٤ مقدار الخطأ في قيمة الصادرات لعام ١٩٩٩ أي عند س = ٤ ، $ص_١$ = ١٨ ونوجد $ص_٢$ من المعادلة :

$$\hat{ص} = أ + ب \text{ س}$$

$$\hat{ص} = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ \text{ س}$$

$$\hat{ص}_٢ = ٥,٥٠٨ + ٣,٤٨٣ \times ٤$$

$$\hat{ص}_٢ = ١٩,٤٤$$

∴ مقدار الخطأ = $|ص_١ - ص_٢|$

$$= |١٨ - ١٩,٤٤|$$

$$= ١,٤٤$$

تمارين ٣-٣

١ الجدول التالي يوضح عدد العمال (بالمئات) في إحدى الشركات.

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
عدد العمال بالمئات	٦	٧	٨	١٠	١٢	١٣	١٤

أ أوجد معادلة خط الاتجاه العام لعدد العمال خلال الفترة المذكورة

ب تنبأ بعدد العمال لعام ٢٠١٣م

جـ أوجد السنة التي يكون فيها عدد العمال بالمئات ٢٠

٢ من الجدول التالي:

السنة	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
قيمة الظاهرة	١٩	٢١	٢٨	٢٥	٢٤	٢٥	٢٥

أ أوجد معادلة خط الاتجاه العام لقيم الظاهرة خلال الفترة المذكورة.

ب أوجد القيمة المتوقعة للظاهرة عام ٢٠١٥م

جـ أوجد السنة التي تكون فيها قيمة الظاهرة ٢٥,٤٢٨٥

٣ الجدول التالي يوضح مبيعات إحدى الشركات بالألف دينار في الفترة من ٢٠٠٠م وحتى عام ٢٠٠٦م.

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦
المبيعات بالألف	٨٨	٩٢	٩٧	١١٠	١٢٠	١٣٠	١٣٦

أ أوجد معادلة خط الاتجاه العام للمبيعات خلال الفترة المذكورة.

ب أوجد القيمة المتوقعة للمبيعات عام ٢٠٠٩م.

جـ أوجد السنة التي تكون فيها قيمة المبيعات = ١١٩,١٠٧٢ بالألف دينار.

٤ الجدول التالي يوضح المسافات التي يقطعها جسم متحرك في خط مستقيم في نهاية كل ثانية من الثواني العشرة الأولى بالأمتار.

الزمن بالثواني	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
المسافة بالأمتار	٢	٥	١٠	١٢	١٥	١٧	٢٠	٢٥

أ أوجد معادلة خط الاتجاه العام.

ب تنبأ بالمسافة المتوقعة في نهاية الثانية الخامسة عشرة.

جـ احسب مقدار الخطأ في الثانية السادسة.

تمارين عامة (٣-٤)

أولاً: الأسئلة الموضوعية:

أولاً: في البنود من (١ - ٣) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة.

١ السلسلة الزمنية هي تتبع ظاهرة معينة عبر الزمن. (أ) (ب)

٢ تتأثر السلسلة الزمنية بمتغير واحد فقط هو التغيرات الفجائية. (أ) (ب)

٣ لا تتأثر السلسلة الزمنية بالتغيرات الفجائية. (أ) (ب)

ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ العوامل التي تؤثر في السلسلة الزمنية هي:

(أ) الاتجاه العام فقط
(ب) التغيرات الدورية فقط
(ج) التغيرات الموسمية فقط
(د) التغيرات العرضية فقط
(هـ) كل ما سبق

٢ الجدول التالي يوضح عدد الطلاب المتقدمين للحصول على شهادة الماجستير في إحدى الكليات من عام ١٩٩٨م وحتى عام ٢٠٠٤م

السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
عدد الطلاب	٣	٤	٦	١٠	١٢	١٥	٢٠

فإذا كانت معادلة الاتجاه العام لأعداد الطلبة خلال الفترة المذكورة هي:

$\hat{ص} = ٢,٨٢ \text{ س} + ١,٥٤$

فإن العدد المتوقع للطلاب المتقدمين عام ٢٠٠٧م تقريباً هو:

(أ) ٢٧
(ب) ٢٦
(ج) ٢٨
(د) لا يشتمل على أي مما سبق

ثانياً: الأسئلة المقالية:

١ الجدول التالي يبين قيم ظاهرة معينة خلال ٩ سنوات:

السنة	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤	٢٠٠٥	٢٠٠٦	٢٠٠٧
قيمة الظاهرة	٢	٤	٧	٩	١٣	١٥	١٧	٢٠	٢٣

(أ) مثل البيانات السابقة بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

(ج) أوجد معادلة خط الاتجاه العام لقيم الظاهرة.

(د) تنبأ بالقيمة المتوقعة للظاهرة في عام ٢٠١٥ م.

٢ الجدول التالي يبين قيم ظاهرة معينة خلال ٧ سنوات:

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١
قيمة الظاهرة	٢	٤	٧	٩	١٣	١٥	١٧

(أ) مثل البيانات السابقة بالسلسلة الزمنية.

(ب) بين الاتجاه العام للسلسلة الزمنية.

(ج) أوجد معادلة خط الاتجاه العام لقيم الظاهرة.

(د) تنبأ بالقيمة المتوقعة للظاهرة في عام ٢٠١٠م.

(هـ) احسب مقدار الخطأ في عام ٢٠٠٠م.

قائمة بالمفردات الرياضية

باللغة الإنجليزية	باللغة العربية
TIME SERIES	السلسلة الزمنية
SECULAR TREND	الاتجاه العام للسلسلة الزمنية
SEASONAL VARIATIONS	التغيرات الموسمية
CYCLIC VARIATIONS	التغيرات الدورية
IRREGULAR VARIATIONS	التغيرات العرضية
LEAST SQUARE METHOD	طريقة المربعات الصغرى

جدول (١) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

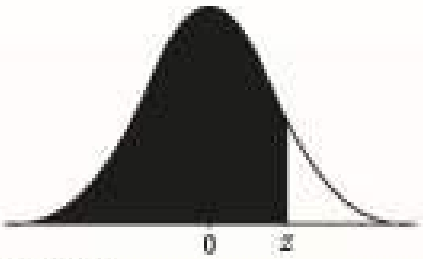


Table1: Areas under the normal curve.

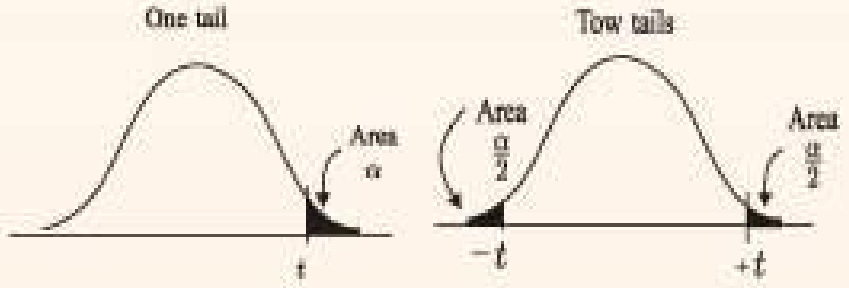
z أو ب	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247

تابع/ جدول المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

x أو ن	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

جدول ت (٢)

Table	The *t* Distribution						
d.f	Confidence Intervals	50%	80%	90%	95%	98%	99%
	α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1		1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2		.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3		.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4		.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5		.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6		.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7		.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8		.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9		.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10		.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11		.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12		.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13		.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14		.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15		.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16		.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17		.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18		.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19		.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20		.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21		.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22		.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23		.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24		.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25		.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26		.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27		.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28		.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
(z) ∞		.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576



المراجع

المرجع	المصدر	المؤلفون
مقدمة الطرق الإحصائية	دار النهضة العربية للطباعة والنشر - بيروت ٨٢م	د. مختار محمود الهانسي
الإحصاء والمتغيرات العشوائية	مصر	د. حسني حمدي
الموجز في الإحصاء	الأردن	د. محمد صبحي
الإحصاء في البحوث العلمية	المكتبة الأكاديمية	أ. د. محمد أبو يوسف
الإحصاء والاحتمالات في التطبيقات الهندسية	دار الفجر للنشر والتوزيع	د. أمجد إبراهيم شحادة د. علي إبراهيم سعد أ. محمد رياض علي
Middle School Math Course 1	Harcourt Education Company 2004	Hdt Rinehart and Winston
Handbook of Tables for Probability and Statistics	CRC Prers, Baca Raton, Florida 86	W.H. Beyer

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم ١٦٨ بتاريخ ١٢/١١/٢٠٠٨

طبع بمطابع الخط