وزارة التربية

الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الجزء الثاني

المرحلة الثانوية

الطبعة الرابعة

الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الجزء الثاني

تأليف

د. أحمد شمس الدين الشيخ — د. حميد فايز حميد

د. عبدالله يوسف الحواج — د. محمد عبدالرحمن القاضي

د. منصور غلوم حسين — د. نصرة حسن الباقر

تحرير ومراجعة

الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

الطبعة الرابعة

١٤٣١هـ

٢٠١٠ - ٢٠١١م

الطبعة الأولى : ١٩٩٦ - ١٩٩٧م
الطبعة الثانية : ١٩٩٨ - ١٩٩٩م
الطبعة الثالثة : ٢٠٠٠ - ٢٠٠١م
٢٠٠٢ - ٢٠٠٣م
الطبعة الرابعة : ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م
٢٠١٠ - ٢٠١١م

أعضاء لجنة التعديل (الطبعة الثالثة):

د. هاني رضا قران (مشرفاً)

أ. حصة يونس محمد العلي أ. مصطفى كامل الهنداوي

أ. موسى الشهير بزهير

تنفيذ الرسوم بالحاسوب:

أ. رأفت سمير زكي بالتعاون مع الباحثين الفنيين بقسم مناهج الثانوي/ إدارة المناهج

أعضاء لجنة المواءمة (الطبعة الرابعة):

أ. حصة يونس محمد العلي (رئيساً)

أ. إلهام عفيفي علي أ. فرحات محمد عبدالصبور

أ. فتحية محمود أبوزور

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

خبراء المشروع

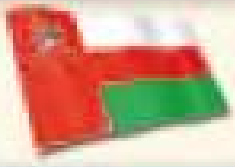
اتفقت الدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج على تدريس هذا الكتاب المدرسي الموحد في مدارسها، وهو يخدم الصف الثالث الثانوي علمي في كل من دولة الإمارات العربية المتحدة ومملكة البحرين وسلطنة عمان ودولة قطر والمملكة العربية السعودية، والصف الثاني عشر علمي في دولة الكويت.

د. حميد فايز حميد
أ. محمد هلال اليوسفي

د. عبدالله الحواج
أ. هدى إسماعيل العوضي
أ. ناهدة إبراهيم الخياط
أ. سلوى لطيف مطر

د. منصور غلوم حسين
أ. علي عبدالله الصراف
أ. إبراهيم حسين القطان

د. محمد بن علوي البار
د. محمد القاضي
د. يوسف بن صالح الشنيفي
د. أحمد شمس الدين الشيخ



أ. محمد راشد بن سعيد الحديدي
أ. الحسيني محمد الغرباوي

د. نصرة رضا حسن الباقر
أ. عبدالله محمد النعمة

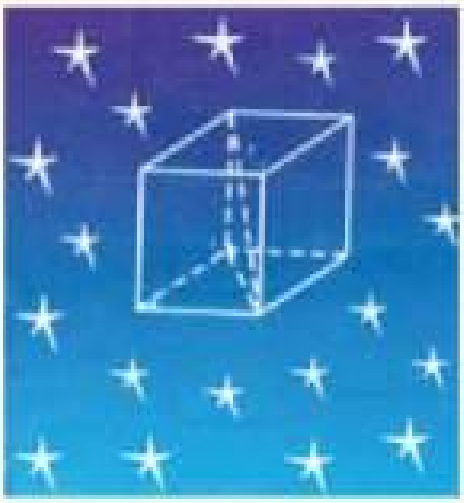
الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

المحتوى

المحتوى

الموضوع | الصفحة

الفصل الثالث ٣



المقدمة

المربي الفاضل . . .
المربية الفاضلة . . .

يسر مكتب التربية العربي لدول الخليج/المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج، أن يضع بين يديك كتاب الطالب لرياضيات الصف الثاني عشر/علمي في دولة الكويت المعادل للصف الثالث الثانوي علمي في كل من: دول الإمارات العربية المتحدة، ومملكة البحرين، وسلطنة عُمان، ودولة قطر، والمملكة العربية السعودية. وذلك استكمالاً لمسيرة توحيد وتطوير مناهج الرياضيات لمراحل التعليم العام. وقد وضع هذا الكتاب في ظل منهج خليجي موحد، من أهم ملامحه أنه:

* يتناول محتوى موحداً في كل الدول الأعضاء بالمكتب، بقصد بناء الإنسان وتنمية المجتمع في إطار وحدة الفكر والهدف الخليجي.
* يتناول في محتواه موضوعات تربط دراسة الرياضيات مع تكنولوجيا العصر مثل الحاسبات الإلكترونية.
* يعكس الاتجاهات العالمية المعاصرة في الرياضيات المدرسية.
* يتم بناؤه من خلال عمل جماعي تشارك فيه جميع الدول الأعضاء، وينبع من فكرها وتطلعاتها وواقعها.
* يؤكد على الدور الوظيفي للرياضيات وخاصة فيما يتعلق بحل المشكلات، ويؤكد على إيجابية ونشاط المتعلم.
* يراعي الفروق الفردية من خلال تنوع الأنشطة وتقديم توجيهات عمل في كتاب المعلم.
* يأتي بناؤه في تتابع تطويري، محاوره: التخطيط والإعداد، والتجريب، والتقويم المصاحب والتحسين، ثم التعميم، مع المتابعة التطويرية في ضوء التغذية الراجعة.

هذا ويتضمن محتوى منهج الثاني عشر الحد الأدنى من المعرفة والثقافة الرياضية اللازمة لمتطلبات هذا الصف من أجل المواطنة ومن أجل متابعة الدراسة.

وقد جاء كتاب الطالب في جزأين:

الجزء الأول:

يتناول ثلاثة موضوعات وهي: النهايات والاتصال والاشتقاق، وتطبيقات هندسية ورياضية على الاشتقاق.

الجزء الثاني:

يتناول ثلاثة موضوعات وهي: التكامل وتطبيقاته والقطوع المخروطية وهندسة الفضاء.

أيها المربي الفاضل..
أيتها المربية الفاضلة..

إذا كانت كتب الرياضيات الموحدة قد حرصت على تقديم الأفضل، مادة وطريقة، فإنَّ الدور الذي ننتظره منك هو الذي يؤكد هذا الاتجاه وينميه، ويجعله وسيلة لإثارة الدافعية لدى المتعلم، فيكون تعلمه معتمداً على نشاطه، ويكون نشاطه منطلقاً من رغبة ذاتية، ويستطيع المعلم أن يهيئ للرغبة دوافعها، وإننا لعلى يقين من النجاح والتوفيق لجميع الزملاء من معلمين ومعلمات فيما قصدنا إليه، متى صحت النية وصدق العزم.

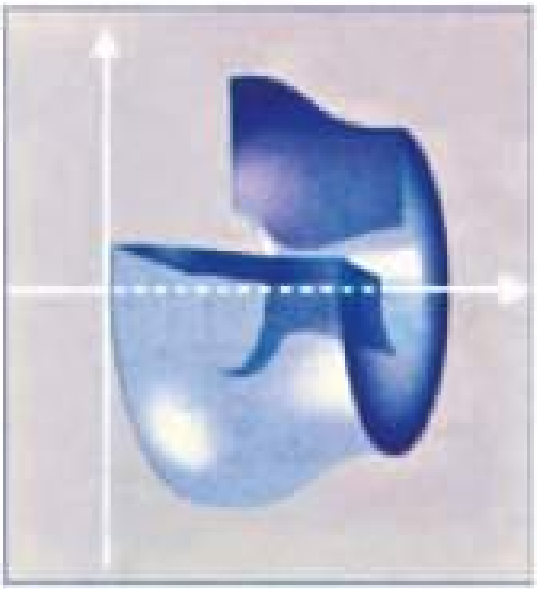
والله من وراء القصد، وهو يهدي السبيل،

مدير المركز
د. رشيد الحمد

الفصل الأول

التكامل وتطبيقاته

Integration and Its Applications



الدالة المقابلة - التكامل غير المحدد

١-١

Antiderivative Function - Indefinite Integration

درسنا الاشتقاق في الفصل الثاني من الجزء الأول، وأصبحنا قادرين على إيجاد المشتقة ق′ إذا علمت الدالة ق حيث:

$$ق'(س) = \frac{ء}{ءس} ق(س)$$

وفي هذا الفصل نتناول عملية عكسية لعملية الاشتقاق، بمعنى أنه إذا علمت المشتقة ق′، فكيف نحصل على الدالة الأصلية ق؟

إذا كانت ق′(س) = د(س)، فإننا نسمي الدالة د مشتقة الدالة ق، وسنسمي الدالة ق دالة مقابلة للدالة د.

ملاحظة مهمة: ستتعامل في هذا الفصل مع دوال متصلة على فترات معينة.

تعريف ١

الدالة المقابلة

يقال إن ق دالة مقابلة للدالة د في فترة ما ف إذا كانت

$$ق'(س) = د(س) \qquad \forall\ س \in ف$$

ولتوضيح ذلك:

إذا كانت د(س) = ٢س فإن

الدالة: ق(س) = س^{٢} دالة مقابلة للدالة د وذلك لأن:

$$\frac{ء}{ءس}(س^{٢}) = ٢س$$

وإذا كانت د(س) = س^{٢} فإن

الدالة: ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} دالة مقابلة للدالة د وذلك لأن:

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{٣}س^{٣}\right) = \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢} = س^{٢}$$

وإذا كانت د(س) = ٣س^{٢} + ٥ فإن

الدالة: ق(س) = س^{٣} + ٥س دالة مقابلة للدالة د وذلك لأن:

$$\frac{ء}{ءس}(س^{٣} + ٥س) = ٣س^{٢} + ٥$$

وهكذا. . .

وكما أمكننا في دراستنا للاشتقاق التوصل إلى العديد من القواعد لإيجاد المشتقة، سنحاول في دراستنا الحالية التوصل إلى بعض القواعد التي تستخدم في إيجاد الدالة المقابلة . .

سبق أن أوضحنا أن الدالة : ق(س) = $س^٢$ دالة مقابلة للدالة :

د(س) = ٢س

حيث $\frac{ء}{وس}$ ($س^٢$) = ٢س حسب تعريف الدالة المقابلة .

ولكن، هل الدالة : ق(س) = $س^٢$ هي الدالة المقابلة الوحيدة؟

نعلم أن $\frac{ء}{وس}$ ($س^٢$ + ٢) = ٢س ،

$\frac{ء}{وس}$ ($س^٢$ − ٥) = ٢س

$\frac{ء}{وس}$ ($س^٢$ − $\frac{١}{٢}$) = ٢س

وهكذا . . .

$\frac{ء}{وس}$ ($س^٢$ + ث) = ٢س ، حيث ث ثابت

ويقودنا ذلك إلى القاعدة الآتية :

قاعـدة

إذا كانت ق دالة مقابلة للدالة د في فترة ما، فإنه في نفس الفترة تكون : ق(س) + ث هي الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د حيث ث ثابت .

مثال ١

تحقق من أن الدالة : ق(س) = $س^٤$ هي دالة مقابلة للدالة

د(س) = ٤$س^٣$

ثم اكتب الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د .

الحل

من الملاحظ أن:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(\text{س}^{٤}) = ٤\text{س}^{٣}$$

$\therefore$ ق$'$(س) = د(س)

$\therefore$ ق دالة مقابلة للدالة د.

ووفقاً للقاعدة السابقة تكون:

الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة: د(س) = ٤س^{٣} هي:

ق(س) = س^{٤} + ث ، حيث ث ثابت. ■

ونلاحظ مما سبق ما يأتي:

١ إذا كانت د(س) = ٠ $\forall$ س $\in$ ف ، فإن الدالة:

ق(س) = ث ، حيث ث ثابت، هي الصورة العامة للدوال المقابلة في الفترة ف.

٢ إذا كانت كل من د ، هـ دالة مقابلة للدالة ق في الفترة ف، فإن:

د(س) = هـ(س) + ث ، حيث ث ثابت $\forall$ س $\in$ ف

٣ إذا كانت د$'$(س) = هـ(س) $\forall$ س $\in$ ف فإن:

د(س) = هـ(س) + ث ، حيث ث ثابت $\forall$ س $\in$ ف

مثال ٢

تحقق من أن الدالة: ق(س) = $\sqrt{١ + \text{س}^{٤}}$ دالة مقابلة للدالة:

$$\text{د(س)} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٤}}}$$

الحل

ق يمكن أن تكون دالة مقابلة للدالة د إذا كان:

ق$'$(س) = د(س)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}(١ + \text{س}^{٤})^{-\frac{١}{٢}} \times ٤\text{س}^{٣} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{\sqrt{١ + \text{س}^{٤}}} = \text{د(س)}$$

$\therefore$ ق دالة مقابلة للدالة د ■

التكامل غير المحدد

سنستخدم الصيغة الآتية للتعبير عن الصورة العامة للدوال المقابلة لدالة د:

تعريف ٢

الصيغة: $\int$ د(س) ءس = ق(س) + ث

حيث ق′(س) = د(س) ، ث ثابت،

تعبر عن الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د في فترة ما ف .

سنسمي $\int$ د(س) ءس التكامل غير المحدد للدالة د،

والرمز $\int$ رمز التكامل، د(س) الدالة المراد تكاملها (المكامل)، ث ثابت التكامل،

وعملية إيجاد ق(س) + ث التي تحقق:

$$\int \text{د(س) ءس} = \text{ق(س)} + \text{ث}$$

هي عملية إيجاد ناتج التكامل، أو تكامل د(س) بالنسبة إلى س .

ووصف هذا التكامل بأنه غير محدد ناتج من أن $\int$ د(س) ءس يمثل الصورة العامة للدوال المقابلة وليس دالة واحدة بعينها.

أمثلة توضيحية:

١ $\int$ ٣س^{٢} ءس = س^{٣} + ث

ذلك لأن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (س^{٣} + ث) = ٣س^{٢}

٢ $\int$ س^{٣} ءس = $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ + ث

ذلك لأن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{١}{٤}$ س^{٤} + ث) = س^{٣}

٣ $\int$ ص$^{-٢}$ ءص = − ص$^{-١}$ + ث

ذلك لأن $\frac{\text{ء}}{\text{ءص}}$ (− ص$^{-١}$ + ث) = ص$^{-٢}$

مثال ٣

تحقق من صحة كل مما يأتي:

أ $\int \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

ب $\int \text{س}^{٥}\ \text{ءس} = \frac{١}{٦}\text{س}^{٦} + \text{ث}$

حـ $\int \text{ه}^{-٤}\ \text{ءه} = -\frac{\text{ه}^{-٣}}{٣} + \text{ث}$

ء $\int \text{ص}\sqrt{١ + \text{ص}^{٢}}\ \text{ءص} = \frac{١}{٣}(١ + \text{ص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

الحل

أ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س} + \text{ث}) = ١$ ، $\therefore \int \text{ءس} = \int ١ \cdot \text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$

ب $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\frac{١}{٦}\text{س}^{٦} + \text{ث}) = \text{س}^{٥}$ ، $\therefore \int \text{س}^{٥}\ \text{ءس} = \frac{١}{٦}\text{س}^{٦} + \text{ث}$

حـ $\frac{\text{ء}}{\text{ءه}}(-\frac{\text{ه}^{-٣}}{٣} + \text{ث}) = \text{ه}^{-٤}$ ، $\therefore \int \text{ه}^{-٤}\ \text{ءه} = -\frac{\text{ه}^{-٣}}{٣} + \text{ث}$

ء $\frac{\text{ء}}{\text{ءص}}[\frac{١}{٣}(١ + \text{ص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}] = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٢}(١ + \text{ص}^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times ٢\text{ص}$

$= \text{ص}\sqrt{١ + \text{ص}^{٢}}$

$\therefore \int \sqrt{١ + \text{ص}^{٢}}\ \text{ص}\ \text{ءص} = \frac{١}{٣}(١ + \text{ص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$ ■

ملاحظة:

يلاحظ مما سبق أن عملية إيجاد التكامل غير المحدد لدالة ما، ما هي إلا إيجاد الصورة العامة للدوال المقابلة لها.

قاعدة القوى:

حيث إن $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ث}\right) = \text{س}$ حيث ث ثابت،

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{ث}\right) = \text{س}^{٢}$ ،

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{ث}\right) = \text{س}^{٣} ،$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{س}^{\text{ر}+١}}{\text{ر} + ١} + \text{ث}\right) = \text{س}^{\text{ر}} \text{ حيث ر عدد نسبي } \neq -١$$

∴ يمكن استخدام القاعدة الآتية:

قاعدة

$$\int \text{س}^{\text{ر}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ر}+١}}{\text{ر} + ١} + \text{ث} ،$$

حيث ث ثابت ، ر عدد نسبي ، ر = −١

مثال ٤

أوجد $\int \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\ \text{ءس}$.

الحل

$$\int \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\frac{٤}{٣}+١}}{\frac{٤}{٣} + ١} + \text{ث} = \frac{٣}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٣}} + \text{ث}$$

النظرية الآتية مفيدة في إيجاد التكامل غير المحدد:

نظرية ١

إذا كان لكل من د ، هـ دالة مقابلة في فترة ما ف فإن:

i $\int \text{م د(س)}\ \text{ءس} = \text{م} \int \text{د(س)}\ \text{ءس}$: م ثابت $\neq ٠$

ii $\int [\text{د(س)} \pm \text{هـ(س)}]\ \text{ءس} = \int \text{د(س)}\ \text{ءس} \pm \int \text{هـ(س)}\ \text{ءس}$

مثال ٥

أوجد $\int (٣س^{٢} + ٥س)\, ءس$

الحل

$$\int (٣س^{٢} + ٥س)\, ءس = \int ٣س^{٢}\, ءس + \int ٥س\, ءس$$

$$= ٣\int س^{٢}\, ءس + ٥\int س\, ءس$$

$$= ٣ \times \frac{س^{٣}}{٣} + ٥ \times \frac{س^{٢}}{٢} + ث$$

$$= س^{٣} + \frac{٥}{٢}س^{٢} + ث$$

مثال ٦

أوجد $\int \left(\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ١\right) ءس$

الحل

$$\int \left(\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س} + ١\right) ءس = \int \left(س^{-٢} + س^{\frac{١}{٢}} + ١\right) ءس$$

$$= \int س^{-٢}\, ءس + \int س^{\frac{١}{٢}}\, ءس + \int ءس$$

$$= \frac{س^{-١}}{-١} + \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + س + ث$$

$$= \frac{-١}{س} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + س + ث$$

مثال ٧

أوجد $\int \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

الحل

نحاول في هذا المثال كتابة الدالة المطلوب تكاملها في صورة أخرى وذلك بإجراء عملية القسمة حيث إن درجة البسط أكبر من درجة المقام.

$$\therefore \int \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{س}^{٢} + ٢ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \text{س}^{٢} \, \text{ءس} + \int ٢ \cdot \text{ءس} + \int \text{س}^{-٢} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$$

والآن سنقدم تعميماً لقاعدة القوى:

من المعلوم أن:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left[(\text{د}(\text{س}))^{\text{ر}}\right] = \text{ر}\left[\text{د}(\text{س})\right]^{\text{ر}-١} \text{د}'(\text{س}).$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left[(\text{د}(\text{س}))^{\text{ر}+١}\right] = (\text{ر} + ١) \left[\text{د}(\text{س})\right]^{\text{ر}} \text{د}'(\text{س})$$

تعميم

$$\int \left[\text{د}(\text{س})\right]^{\text{ر}} \text{د}'(\text{س}) \, \text{ءس} = \frac{\left[\text{د}(\text{س})\right]^{\text{ر}+١}}{\text{ر} + ١} + \text{ث}$$

حيث ث ثابت ، ر عدد نسبي ، ر $\neq$ −١.

مثال ٨

أوجد $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣}}\, \text{ءس}$.

الحل

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣}}\, \text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} - ٣)^{-\frac{١}{٢}} (\text{س})\, \text{ءس} .$$

نلاحظ أن $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٣$ ،

$\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س}$.

وأنه يمكن جعل الدالة على صورة القاعدة بالضرب في ٢ والقسمة على ٢ كالتالي:

$$\int (\text{س}^{٢} - ٣)^{-\frac{١}{٢}} (\text{س})\, \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int (\text{س}^{٢} - ٣)^{-\frac{١}{٢}} (٢\text{س})\, \text{ءس} .$$

$$= \frac{١}{٢} \left[\frac{(\text{س}^{٢} - ٣)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}_{١} \right]$$

$$= \sqrt{\text{س}^{٢} - ٣} + \frac{١}{٢} \text{ث}_{١}$$

$$= \sqrt{\text{س}^{٢} - ٣} + \text{ث} .$$

حيث $\text{ث} = \frac{١}{٢} \text{ث}_{١}$ ■

مثال ٩

أوجد $\int \text{س}(٢\text{س} - ١)^{٥}(٢\text{س} + ١)^{٥}\, \text{ءس}$.

الحل

$$\int \text{س}(٢\text{س} - ١)^{٥}(٢\text{س} + ١)^{٥}\, \text{ءس} = \int \left((٢\text{س} - ١)(٢\text{س} + ١)\right)^{٥} (\text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \int (٤\text{س}^{٢} - ١)^{٥} (\text{س})\, \text{ءس} .$$

$$= \frac{١}{٨} \int (٤\text{س}^{٢} - ١)^{٥} (٨\text{س})\, \text{ءس}$$ لماذا؟

$$= \frac{١}{٨}\left[\frac{(٤س^{٢} - ١)^{٦}}{٦} + ث_{١}\right]$$

$$= \frac{١}{٤٨}(٤س^{٢} - ١)^{٦} + \frac{١}{٨}ث_{١}$$

$$= \frac{١}{٤٨}(٤س^{٢} - ١)^{٦} + ث$$

حيث $ث = \frac{١}{٨}ث_{١}$ ■

تطبيقات هندسية Geometry Applications :

علمت فيما سبق أن ميل المماس أو ميل منحنى الدالة: ص = د(س) عند أي نقطة (س ، د(س)) هو د′(س) بشرط أن تكون د′(س) موجودة.

وبالعكس إذا كان لدينا ميل المماس أو ميل المنحنى عند أي نقطة (س ، د(س)) بحيث كان الميل دالة في المتغير س

أي $\frac{ءص}{ءس}$ = ق(س) مثلاً ، وأردنا إيجاد معادلة المنحنى فإن:

$$ص = \int ق(س)\, ءس$$

هي الصورة العامة لمعادلة المنحنى ولتحديد المعادلة المطلوبة نحتاج لمعلومات إضافية.

مثال ١٠

إذا كان ميل المنحنى د عند أي نقطة (س ، ص) يساوي (٢س − ١) فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٣).

الحل

د′(س) = ٢س − ١

∴ د(س) = $\int$ د′(س) ءس

= $\int$ (٢س − ١) ءس

∴ د(س) = س^{٢} − س + ث

، ولتعيين ثابت التكامل ث،

نعلم أن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣)،

∴ د(١) = ٣

∴ د(١) = (١)^{٢} − ١ + ث = ٣

ث = ٣

∴ معادلة المنحنى هي:

د(س) = س^{٢} − س + ٣ ■

مثال ١١

إذا كان د″(س) = ٦س فأوجد معادلة المنحنى ص = د(س) علماً بأن المماس لهذا المنحنى عند س = ١ هو المستقيم: ص + ٢س − ٦ = ٠

الحل

د″(س) = ٦س

∴ د′(س) = ∫ د″(س) ءس

د′(س) = ∫ ٦س ءس

د′(س) = ٣س^{٢} + ث$_{١}$ _____ (١)

ولتعيين ثابت التكامل ث$_{١}$

∵ المستقيم ص + ٢س − ٦ = ٠ مماس للمنحنى عند س = ١

وميل هذا المستقيم = −٢

∴ ميل المنحنى عند (س = ١) هو د′(١) = −٢ _____ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

−٢ = ٣ + ث$_{١}$ ⇐ ث$_{١}$ = −٥

∴ د′(س) = ٣س^{٢} − ٥

د(س) = ∫ د′(س) ءس

د(س) = ∫ (٣س^{٢} − ٥) ءس

د(س) = س^{٣} − ٥س + ث$_{٢}$ _____ (٣)

ولتعيين ثابت التكامل $ث_٢$

عند ص = ١ ، ص = ٤

النقطة (١ ، ٤) هي نقطة تماس المستقيم والمنحنى.

أي أن د(١) = ٤ .....(٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن:

$٤ = ١ - ٥ + ث_٢$

$\therefore$ $ث_٢ = ٨$

$\therefore$ معادلة المنحنى المطلوبة هي:

$د(س) = س^٣ - ٥س + ٨$.

تمارين

١ - ١

● أوجد الصورة العامة للدوال المقابلة ق(س) + ث لكل دالة من الدوال في التمارين من ١ إلى ١٠.

١ $\text{د(س)} = \text{٢س} - ٣$

٢ $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + \sqrt{٢}$

٣ $\text{د(س)} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

٤ $\text{د(س)} = \text{س}^{-\frac{٤}{٣}}$

٥ $\text{د(س)} = \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

٦ $\text{د(س)} = \text{٦س}^{٢} - \text{٦س} + ١$

٧ $\text{د(س)} = \frac{١}{\text{س}^{٣}} + \frac{٦}{\text{س}^{٧}}$

٨ $\text{د(س)} = \frac{\text{٢س}^{٣} - \text{٣س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢}}$

٩ $\text{د(س)} = (\text{٢س} + ١)(\text{٣س} + ٢)$

١٠ $\text{د(س)} = \text{٢٠س}^{٧} - \text{٧س}^{٤} + ٦$

● أوجد التكامل غير المحدد في كل من التمارين ١١ - ٢٠:

١١ $\int (\text{س}^{٣} + \sqrt{\text{س}})\, \text{ءس}$

١٢ $\int (\text{س}^{٢} + ١)^{٢}\, \text{ءس}$

١٣ $\int \text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} - ٣)\, \text{ءس}$

١٤ $\int \frac{\text{ن}^{٤} - \text{٢ن}^{٣} + ١}{\text{ن}^{٢}}\, \text{ءن}$

١٥ $\int \frac{\text{س}^{٣} - \text{٣س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

١٦ $\int (\text{٣ن}^{٢} - \text{٢ن})^{٢}\, \text{ءن}$

١٧ $\int ٣(\text{٣س} + ١)^{٢}\, \text{ءس}$

١٨ $\int \text{٢س}(\text{س}^{٢} - ٤)^{٢}\, \text{ءس}$

١٩ $\int \frac{\text{٨س} - ٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\, \text{ءس}$

٢٠ $\int \left(\frac{١}{\text{ص}^{٣}} - \frac{١}{\text{ص}^{٢}}\right) \text{ءص}$

٢١ $\int \frac{١}{\sqrt{\sqrt{\text{س}}\,\sqrt{١ + \sqrt{\text{س}}}}}\, \text{ءس}$

٢٢ $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + \text{٣س}}}\, \text{ءس}$

٢٣ $\int \frac{(\text{٥س} - ١)^{٣}}{\text{س}^{٥}}\, \text{ءس}$

٢٤ $\text{٢س}^{٣}(\text{س}^{٢} + ١)^{٧}\, \text{ءس}$

٢٥ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٢س (٣س − ١) فأوجد معادلة الدالة د علماً بأن د(١) = ٣

٢٦ إذا كان ميل المماس عند أي نقطة (س ، ص) على منحنى الدالة د يعطى بالعلاقة د′(س) = ٦س^{٢} − ٣٠س + ٣٦ فأوجد معادلة الدالة د علماً بأن القيمة العظمى المحلية للدالة د = ٢٨ ثم أوجد القيمة الصغرى المحلية.

٢٧ منحنى يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (١ ، ٣) وميله عند أي نقطة عليه يساوي س$\sqrt{أ}$ حيث أ ثابتة أوجد قيمة أ وكذلك معادلة المنحنى.

٢٨ منحنى له نقطة انعطاف (٢ ، −٣) وميل المماس له عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي ل س^{٢} − ١٢س + ٩ حيث ل ثابت أوجد القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية لهذا المنحنى.

١-٢

The Definite Integral

التماساً للسهولة ولأننا سنتعامل فقط مع دوال متصلة، رأينا أن يكون المدخل إلى التكامل المحدد بالاعتماد مباشرة على النظرية الأساسية في الحسبان (التفاضل والتكامل) والتي تساعد على إيجاد التكامل للدوال المتصلة بمجرد الحصول على دالة مقابلة للدالة المعطاة.

وتعرفنا في البند السابق على مفهوم الدالة المقابلة حيث تكون ق دالة مقابلة للدالة د في فترة ما ف عندما يكون ق′(س) = د(س) ∀ س ∈ ف.

وعلمنا أن الصيغة:

∫ د(س) ءس = ق(س) + ث

(حيث ق′(س) = د(س) ، ث ثابت)

تعبر عن الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د في فترة ما ف.

كذلك علمنا أن ∫ د(س) ءس يسمى التكامل غير المحدد وذلك لأن ناتج التكامل لا يكون محدداً أو معيناً ولأنه يعتمد على المتغير س والثابت ث.

لكن عندما س = أ فإن ناتج التكامل = ق(أ) + ث ، حيث ث ثابت،

وعندما س = ب فإن ناتج التكامل = ق(ب) + ث.

ونلاحظ أن الفرق بين ناتجي التكامل عند س = أ ، س = ب هو الفرق بين الناتجين السابقين.

أي [ق(ب) + ث] - [ق(أ) + ث].

أي يساوي ق(ب) - ق(أ)

وهي قيمة معينة لا تعتمد على قيمة الثابت ث.

تعريف ٣

التكامل المحدد

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب] ، ولتكن ق هي إحدى دوالها المقابلة.
التكامل المحدد للدالة د على الفترة [أ ، ب] ونرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس هو العدد الحقيقي ق(ب) - ق(أ).

لاحظ أن:

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$ يكتب أيضاً على الصورة $\left[ق(س) \right]_{أ}^{ب}$

أي أن

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \left[ق(س) \right]_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$$

ملاحظات:

١ $\int_{أ}^{ب}$ هو رمز التكامل المحدد.

٢ أ هو الطرف (أو الحد) الأسفل للتكامل.

ب هو الطرف (أو الحد) الأعلى للتكامل.

د(س) الدالة المراد تكاملها أو «المكامل»

ءس تشير إلى أن متغير التكامل هو س.

ويعبر عنه رمزياً بالآتي:

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$ ويقرأ: «التكامل المحدد للدالة د بالنسبة إلى س من س = أ إلى س = ب».

٣ قيمة التكامل المحدد عدد حقيقي لا يتعلق بالرمز س أي أن:

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \int_{أ}^{ب} د(ص)\ ءص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\ ءع = \ldots\ldots\ldots\ldots$

ولذلك يسمى المتغير هنا متغيراً شكلياً.

٤ يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد ثم التعويض عن المتغير (س) مثلاً بحدي التكامل.

أي أن

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \left[\int د(س)\ ءس \right]_{أ}^{ب}$$

في تعريف (٣) السابق اشترطنا اتصال الدالة د وذلك لأن النظرية (٢) التالية تكفل أن المقدار ق(ب) − ق(أ) موجود وحقيقي. ونقول في هذه الحالة أن الدالة قابلة للتكامل.

نظـريـة ٢

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] ، فإنها تكون قابلة للتكامل في هذه الفترة.

نظـريـة ٣

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب] :

إذا كانت الدالة ت معرفة كالتالي :

$$ت(س) - ت(أ) = \int_{أ}^{س} د(ن)\ ءن \qquad \forall\ س \in [أ ، ب]$$

فإن ت دالة مقابلة للدالة د في [أ ، ب]

مثال ١

الدالة د: $د(ن) = ٣ن^{٢} - ٤ن + ٥$.

متصلة على [١ ، ٧] فإذا كانت :

$$ت(س) = \int_{١}^{س} د(ن)\ ءن \qquad \text{حيث } س \in [١ ، ٧].$$

فأوجد ت(س) ثم أوجد ت(١) ، ت(٣).

الحل

∵ د متصلة على [١ ، ٧].

$$\therefore\ ت(س) = \int_{١}^{س} (٣ن^{٢} - ٤ن + ٥)\ ءن$$

$$= \left[ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٥ن\right]_{١}^{س}$$

$$= (س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س) - (١ - ٢ + ٥)$$

$$= س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س - ٤ .$$

$$ت(١) = (١)^{٣} - ٢(١) + ٥(١) - ٤ = \text{صفر}،$$

$$ت(٣) = (٣)^{٣} - ٢(٣)^{٢} + ٥(٣) - ٤$$

$$= ٢٧ - ١٨ + ١٥ - ٤ = ٢٠$$

تدريب (١):

في مثال (١) السابق أوجد $\int_{١}^{٧}$ د(ن) ءن ، ت(٧) ماذا نلاحظ؟

مثال ٢

أوجد قيمة: $\int_{-١}^{٣}$ (٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥) ء

الحل

واضح أن الدالة:

ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} + ٥س هي دالة مقابلة للدالة:

د(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥ في الفترة [−١ ، ٣]

∴ $\int_{-١}^{٣}$ (٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٥) ءس = $\left[\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}\right]_{-١}^{٣}$

= [(٣)^{٤} − ٢(٣)^{٣} + ٥(٣)] − [(−١)^{٤} − ٢(−١)^{٣} + ٥(−١)]

= (٨١ − ٥٤ + ١٥) − (١ + ٢ − ٥)

= ٤٢ + ٢ = ٤٤.

تدريب (٢): أوجد

١ $\int_{-٢}^{٣}$ ءس

٢ $\int_{٤}^{٢}$ ٥ص ءص

مثال ٣

أوجد قيمة التكامل $\int_{١}^{٨}$ $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$ ءس =

الحل

بفرض د(س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$ = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$

د دالة متصلة على [١ ، ٨]

والدالة: ق(س) = $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{٢}{٣}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ دالة مقابلة للدالة د

$$\therefore \int_{١}^{٨} \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}\, ءس = \left[س^{\frac{٢}{٣}}\right]_{١}^{٨} = \left[\sqrt[٣]{س^{٢}}\right]_{١}^{٨}$$

$$= \left[\sqrt[٣]{س^{٢}}\right]_{س=٨} - \left[\sqrt[٣]{س^{٢}}\right]_{س=١}$$

$$= \sqrt[٣]{٦٤} - \sqrt[٣]{١} = ٣$$

مثال ٤

أوجد $\int_{١}^{٤} (٢ - \sqrt{س})\, ءس$.

الحل

نفرض أن $د(س) = ٢ - \sqrt{س}$

$= ٢ - (س)^{\frac{١}{٢}}$

د دالة متصلة على [١ ، ٤] لماذا؟

الدالة: $ق(س) = ٢س - \frac{٢}{٣}(س)^{\frac{٣}{٢}}$ دالة مقابلة للدالة د.

$$\therefore \int_{١}^{٤} (٢ - \sqrt{س})\, ءس = \left[٢س - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \left[٢س - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{س=٤} - \left[٢س - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{س=١}$$

$$= \left[٨ - \frac{٢}{٣} \times ٨\right] - \left[٢ - \frac{٢}{٣}\right]$$

$$= \frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣}$$

تدريب (٣):

استفد من مثال (٤) السابق في إيجاد

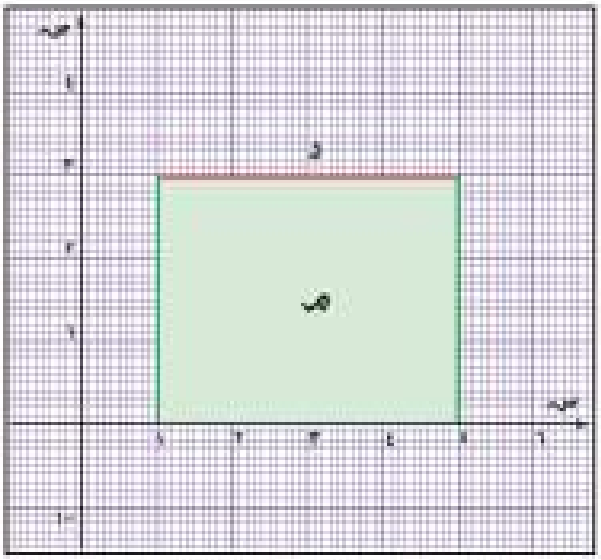
$\int_{٢}^{٣} (٢ - \sqrt{س})\, ءس$.

مثال ٥

إذا كان شكل (١ - ١) المرسوم يمثل المنطقة المستوية ص المحددة ببيان الدالة

د : د(س) = ٣

ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٥ فأوجد:



شكل (١-١)

أ مساحة المنطقة ص

ب $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس

جـ ماذا نستنتج من (أ) ، (ب).

الحل

أ لاحظ أن المنطقة المظللة ص هي منطقة مستطيلة.

طولها = ٤ وحدات طول وعرضها = ٣ وحدات طول.

∴ مساحة المنطقة ص = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة.

ب $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس = $\int_{١}^{٥}$ ٣ ءس

= $\left[٣س\right]_{١}^{٥}$

= $\left[٣س\right]_{س = ٥}$ − $\left[٣س\right]_{س = ١}$

= ١٥ − ٣

= ١٢

جـ نستنتج من (أ) ، (ب) أن

مساحة المنطقة ص = $\int_{١}^{٥}$ د(س) ءس وحدة مربعة.

مثال ٦

إذا كان شكل (١ - ٢) المرسوم يمثل المنطقة المستوية م المحددة.

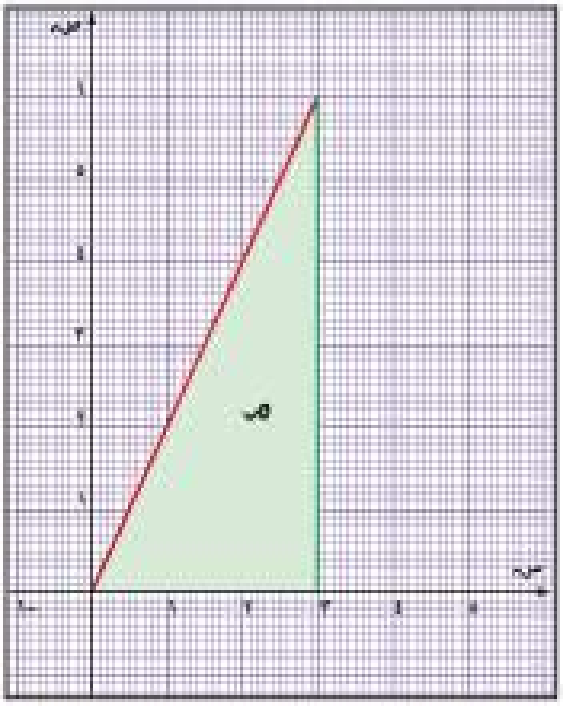
بيان الدالة ق : ق(س) = ٢س

ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٣ فأوجد:

أ مساحة المنطقة م.

ب $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) ءس.

حـ ماذا نستنتج من (أ) ، (ب) .



شكل ١-٢

الحل

أ لاحظ أن المنطقة المظللة م هي منطقة مثلثة

طول قاعدتها = ٣ وحدات طول، وارتفاعها = ٦ وحدات طول.

∴ مساحة المنطقة م = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٦

= ٩ وحدات مربعة.

ب $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) ءس = $\int_{٠}^{٣}$ ٢س ءس

= [س^{٢}]$_{٠}^{٣}$

= ٩

حـ نستنتج من (أ) ، (ب) أن:

مساحة المنطقة م = $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) ءس وحدة مربعة.

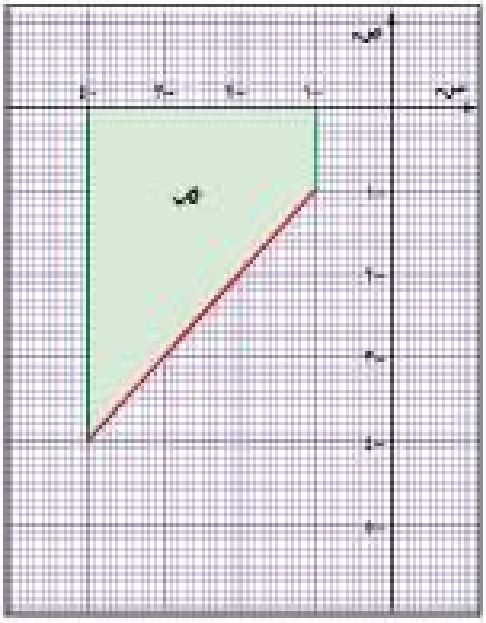
مثال ٧

إذا كان شكل (١ - ٣) يمثل المنطقة المستوية ص المحددة ببيان الدالة ق : ق(س) = س ومحور السينات والمستقيمين س = -٤ ، س = -١ فأوجد:

أ مساحة المنطقة ص.

ب $\int_{-٤}^{-١}$ ق(س) ءس.

جـ ماذا تستنتج من (أ) ، (ب)



شكل (١-٣)

الحل

أ لاحظ أن المنطقة المظللة ص هي منطقة شبه منحرف، طولا قاعدتيه المتوازيتين هما ١ وحدة طول، ٤ وحدة طول. وارتفاعها ٣ وحدات طول.

∴ مساحة المنطقة ص = $\frac{١}{٢}$ (١ + ٤) × ٣

= $\frac{١٥}{٢}$ وحدة مربعة.

ب $\int_{-٤}^{-١}$ ق(س) ءس = $\int_{-٤}^{-١}$ س ءس

= $\left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{-٤}^{-١}$

= $\frac{١}{٢} - \frac{١٦}{٢}$

= $\frac{-١٥}{٢}$

جـ نستنتج من (أ) ، (ب) أن:

مساحة المنطقة ص = - $\int_{-٤}^{-١}$ ق(س) ءس وحدة مربعة.

نستنتج من الأمثلة السابقة أن هناك علاقة بين التكامل المحدد على فترة ومساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات في تلك الفترة، والحقيقة أن المساواة التي تحققت في الأمثلة السابقة (٥)، (٦)، (٧) ليست صدفة كما سنرى من النظرية التالية:

نظرية ٤

لتكن د دالة قابلة للتكامل في الفترة [أ ، ب]:

١ إذا كانت د(س) ≥ ٠ لكل قيم س ∈ [أ ، ب] فإن م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة:

م = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس (وحدة مربعة).

٢ إذا كانت د(س) ≤ ٠ لكل قيم س ∈ [أ ، ب] فإن م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة:

م = − $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس (وحدة مربعة).

مثال ٨

ارسم منحنى الدالة د : د(س) = س^{٢} في الفترة [−٣ ، ٠] ثم أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = −٣ ، س = ٠

الحل

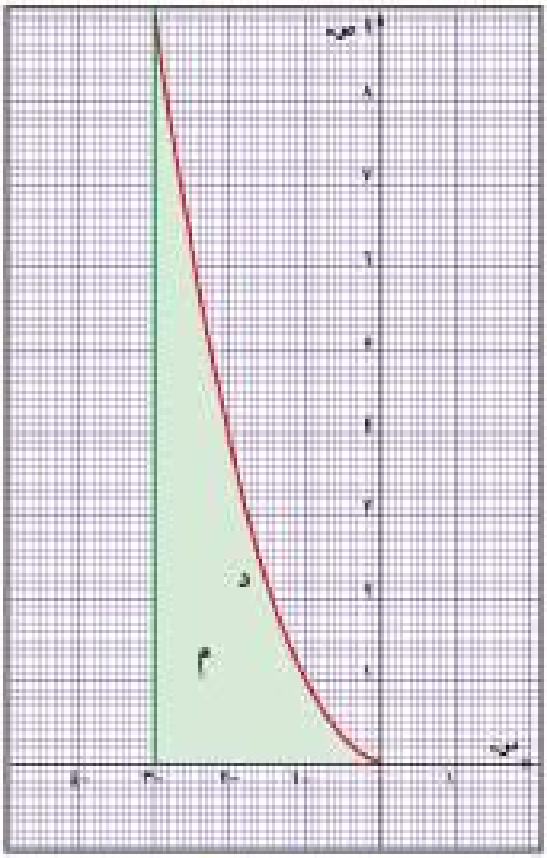
شكل (١ − ٤أ) يمثل بيان الدالة د : د(س) = س^{٢} في [−٣ ، ٠]. نلاحظ من الشكل أن: د(س) ≥ ٠ ∀ س ∈ [−٣ ، ٠].

∴ مساحة المنطقة المطلوبة = م

= $\int_{-٣}^{٠}$ س^{٢} ءس.

= $\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-٣}^{٠}$

= ٠ − (−٩) = ٩ وحدة مربعة.



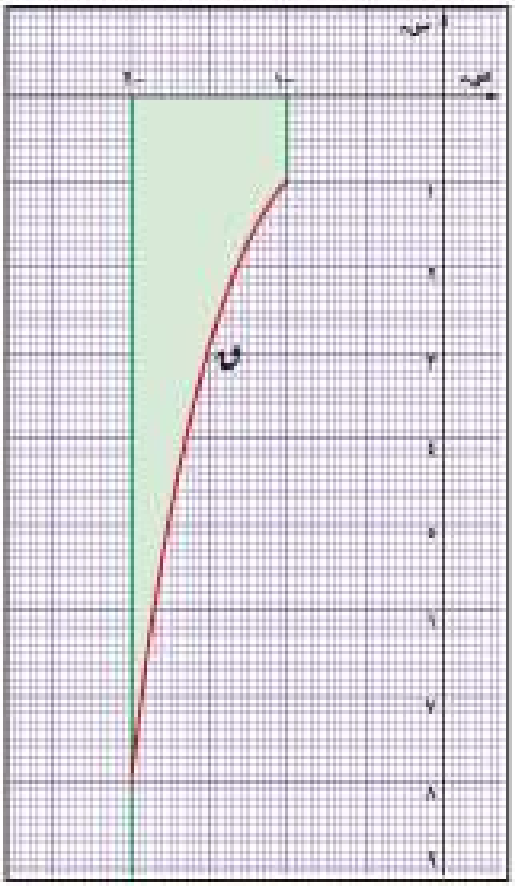
شكل (١−٤أ)

مثال ٩

إذا كان شكل (١ - ٤ب) يوضح بيان الدالة ق:

ق(س) = س^{٣} في الفترة [-٢ ، -١]

فأوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = -٢ ، س = -١



شكل (١ - ٤ب)

الحل

نلاحظ من الشكل أن

ق(س) $\geq$ ٠ $\forall$ س $\in$ [-٢ ، -١].

$\therefore$ مساحة المنطقة المطلوبة = م

$$= -\int_{-٢}^{-١} \text{س}^{٣}\ \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{-٢}^{-١}$$

$$= -\left[\frac{١}{٤} - ٤\right]$$

$$= -\left[-\frac{١٥}{٤}\right]$$

$$= \frac{١٥}{٤}$$ وحدة مربعة.

مثال ١٠

لتكن الدالة د : د(س) = س^{٢} - ١ ، س $\in$ [١ ، ٤].

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤.

الحل

نوجد أولاً نقط تقاطع بيان الدالة د مع محور السينات.

وذلك بوضع: س^{٢} - ١ = ٠

$\therefore$ (س - ١)(س + ١) = ٠

أما س = ١ أو س = -١.

نلاحظ أن كلاً من −١ ، ١ ∉ (١ ، ٤).

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي للفترة (١ ، ٤) ولتكن ٢ مثلاً

د(٢) = (٢)^{٢} − ١ = ٤ − ١ = ٣ > ٠

∴ د(س) ⩾ ٠ ∀ س ∈ [١ ، ٤].

∴ مساحة المنطقة المطلوبة = $\int_{١}^{٤}$ د(س) ءس

= $\int_{١}^{٤}$ (س^{٢} − ١) ءس

= $\left[\frac{س^{٣}}{٣} - س\right]_{١}^{٤}$

= $\left(\frac{٦٤}{٣} - ٤\right) - \left(\frac{١}{٣} - ١\right)$

= $\frac{٦٤}{٣} - ٤ - \frac{١}{٣} + ١$

= $\frac{٦٣}{٣} - ٣$

= ٢١ − ٣

= ١٨ وحدة مساحة.

مثال ١١

ارسم بيان الدالة: د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

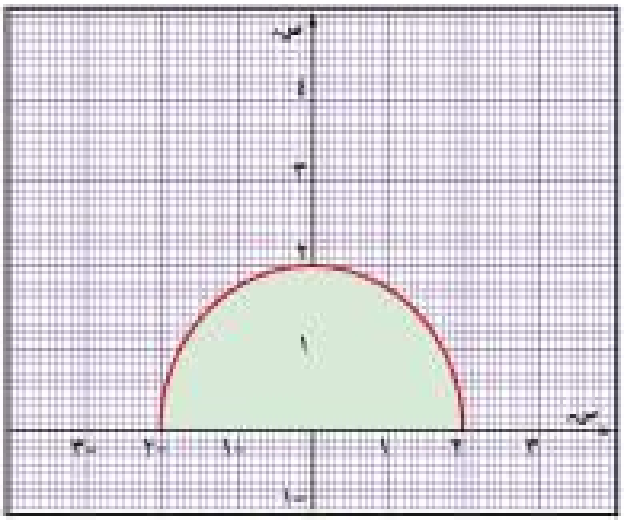
ثم أوجد $\int_{-٢}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ءس

الحل

شكل (١ − ٥) يوضح بيان الدالة:

د(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

والمنحنى المطلوب هو النصف العلوي للدائرة: س^{٢} + ص^{٢} = ٤



شكل ١-٥

∴ مساحة المنطقة المحددة ببيان الدالة د

ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٢ هي:

$$م = \frac{١}{٢}(\pi \text{ س}^{٢})$$

$$م = \frac{\pi}{٢} \times (٢)^{٢}$$

$$م = ٢\pi$$

$$\therefore \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس} = ٢\pi$$

تدريب (٤):

استفد من مثال (١١) السابق في إيجاد $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$.

تمارين

١ - ٢

● في التمرينات من (١) إلى (٢٤) أوجد التكاملات المحددة التالية :

١ $\int_{1}^{3} (4\text{س} - 2)\ \text{ءس}$

٢ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}\ \text{ءس}$

٣ $\int_{1}^{4} \text{س}^{2}\ \text{ءس}$

٤ $\int_{-1}^{2} (\text{س}^{2} - 6\text{س} - 1)\ \text{ءس}$

٥ $\int_{1}^{7} \frac{1}{2}\text{س}\ \text{ءس}$

٦ $\int_{-1}^{2} (2\text{س} + 3)\ \text{ءس}$

٧ $\int_{0}^{3} (\text{س}^{2} + 1)\ \text{ءس}$

٨ $\int_{0}^{4} (\frac{1}{3}\text{س}^{2} + 3)\ \text{ءس}$

٩ $\int_{0}^{1} (\text{س}^{2} + \text{س})\ \text{ءس}$

١٠ $\int_{0}^{2} (4 - \text{س}^{2})\ \text{ءس}$

١١ $\int_{0}^{3} \text{س}^{2}\ \text{ءس}$

١٢ $\int_{-2}^{4} (3\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1)\ \text{ءس}$

١٣ $\int_{1}^{4} (6\text{س}^{5} - 5\text{س}^{4} - 22)\ \text{ءس}$

١٤ $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{\text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

١٥ $\int_{1}^{4} \frac{2}{5\text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

١٦ $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

١٧ $\int_{-4}^{-2} \left(\text{س}^{2} + \frac{1}{\text{س}^{2}}\right)\ \text{ءس}$

١٨ $\int_{1}^{4} \frac{8 - \text{س}^{4}}{2\text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

١٩ $\int_{1}^{4} \text{س}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

٢٠ $\int_{1}^{2} \frac{\text{س}^{2}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

٢١ $\int_{2}^{4} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س} - 1}}\ \text{ءس}$

٢٢ $\int_{2}^{3} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt[3]{\text{س} - 1}}\ \text{ءس}$

٢٣ $\int_{0}^{5} \sqrt{25 - \text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

٢٤ $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

(إرشاد: في التمارين (٢٣)، (٢٤) ارسم بيان الدالة المكاملة)

● في التمارين (٢٥) - (٢٩) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

٢٥ د(س) = ٦ حيث أ = -٣ ، ب = ٢

٢٦ د(س) = س + ٧ حيث أ = -٢ ، ب = ٣

٢٧ د(س) = $س^{٢}$ حيث أ = ٠ ، ب = ٢

٢٨ د(س) = $-س^{٢}$ حيث أ = ٠ ، ب = ٤

٢٩ د(س) = $-\sqrt{س}$ حيث أ = ١ ، ب = ٩

٣٠ لتكن د: [٠ ، ب] ⟵ ح ، د(س) = $س^{٢}$ فأثبت أن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ب تساوي $\frac{١}{٣}ب^{٣}$.

٣١ إذا كان د(س) = $\frac{٢س^{٣}}{\sqrt{١ + س^{٤}}}$ ، و(س) = $١ + \sqrt{١ + س^{٤}}$

فأثبت أن و دالة مقابلة للدالة د، واستفد من ذلك في إيجاد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = $\frac{١}{٢}$ ، س = ٠

علماً بأن د(س) ≥ ٠ لكل س ≥ ٠

٣٢ ارسم بيان الدالة: د(س) = $-\sqrt{١ - س^{٢}}$.

ثم أوجد $\int_{٠}^{١} -\sqrt{١ - س^{٢}}\ ءس$.

٣٣ ارسم بيان الدالة: د(س) = $\frac{١}{٢}\sqrt{٩ - ٤س^{٢}}$

ثم أوجد $\int_{-\frac{٣}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \frac{١}{٢}\sqrt{٩ - ٤س^{٢}}\ ءس$.

٣٤ ارسم بيان الدالة: د(س) = $-\sqrt{٥ - س^{٢}}$

ثم أوجد قيمة المقدار $-\frac{٢}{٣}\int_{-\sqrt{٥}}^{٠} \sqrt{٥ - س^{٢}}\ ءس$.

٣٥ الدالة د: د(ن) = $٤ن^{٣} - ٦ن^{٢}$ متصلة على [-١ ، ٢]

فإذا كانت ت(س) = $\int_{-١}^{س} د(ن)\ ءن$ حيث س ∈ [-١ ، ٢]

فأوجد ت(س) ثم أوجد ت(-١) ، ت(١)

١-٣ خواص التكامل المحدد

Properties of definite Integral

رأينا كيف عرّفنا التكامل المحدد لدالة متصلة باستخدام التكامل غير المحدد (تعريف ٣)، لذا يمكن الاستفادة من هذا التعريف ومن خواص التكامل غير المحدد للوصول إلى الخواص التالية للتكامل المحدد.

إذا كانت كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب] :

١ $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس$

٢ $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس = ٠$

٣ $\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث $ك \in ح$

٤ $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm هـ(س)]\, ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$

مثال ١

أوجد $\int_{١}^{٣} (٢س^{٢} + ٣س - ٥)\, ءس$

الحل

$$\int_{١}^{٣} (٢س^{٢} + ٣س - ٥)\, ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} ٢س^{٢}\, ءس + \int_{١}^{٣} ٣س\, ءس - \int_{١}^{٣} ٥\, ءس$$

$$= ٢\int_{١}^{٣} س^{٢}\, ءس + ٣\int_{١}^{٣} س\, ءس - ٥\int_{١}^{٣} ءس$$

$$= ٢\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} + ٣\left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٣} - ٥\left[س\right]_{١}^{٣}$$

$$= ٢\left(٩ - \frac{١}{٣}\right) + ٣\left(\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢}\right) - ٥(٣ - ١) = ١٩\frac{١}{٣}$$ ■

تدريب (١): أكمل:

$$\int_{١}^{٣} (٢س^{٢} + ٣س - ٥)\, ءس = \left[\frac{٢}{٣}س^{٣} + \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٥س\right]_{١}^{٣}$$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

مثال ٢

أوجد قيمة التكامل: $\int_{١}^{٣} \frac{س^{٤} - ٣س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\, ءس$

الحل

$$\int_{١}^{٣} \frac{س^{٤} - ٣س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\, ءس = \int_{١}^{٣} \left(\frac{س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٣س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٢}}\right) ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} س^{٢}\, ءس - ٣\int_{١}^{٣} ءس + ٥\int_{١}^{٣} س^{-٢}\, ءس$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} - ٣\left[س\right]_{١}^{٣} + ٥\left[\frac{س^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \left(٩ - \frac{١}{٣}\right) - ٣(٣ - ١) + ٥\left(-\frac{١}{٣} + ١\right) = ٦$$

٥ إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]، وكانت د(س) ≥ ٠

∀ س ∈ [أ ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس ≥ ٠

مثال ٣

بيّن أن $\int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ١)\, ءس \geq ٠$

الحل

حيث إن $س^{٢} + ١ \geq ٠$ ∀ س ∈ [-١ ، ٢]

$\therefore \int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ١)\, ءس \geq ٠$

٦ إذا كانت كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب]

وكانت د(س) ≤ هـ(س) ∀ س ∈ [أ ، ب]، فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

البرهان:

∵ كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب]

∴ هـ(س) − د(س) متصلة على [أ ، ب]

وحيث إن د(س) ≤ هـ(س) ∀ س ∈ [أ ، ب]

∴ [هـ(س) − د(س)] ≥ ٠ ∀ س ∈ [أ ، ب]

$$\therefore \int_{أ}^{ب} [هـ(س) - د(س)]\ ءس \geq ٠$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس - \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \geq ٠$$

$$\therefore \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

مثال ٤

أثبت دون حساب قيمة التكامل أن:

$$\int_{-١}^{٢} (س^٢ + ١)\ ءس \geq \int_{-١}^{٢} (س - ١)\ ءس$$

الحل

نفرض أن ق(س) = س^٢ + ١ − (س − ١)

أي أن ق(س) = س^٢ − س + ٢

لاحظ أن ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ ح لماذا؟

∴ س^٢ + ١ − (س − ١) ≥ ٠

∴ س^٢ + ١ ≥ س − ١

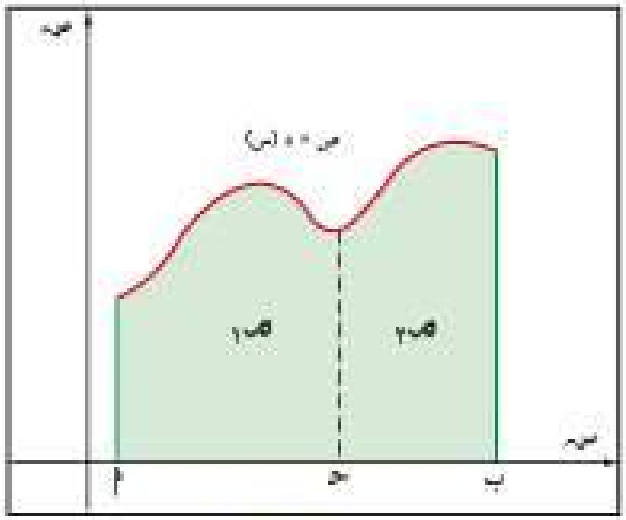
$$\therefore \int_{-١}^{٢} (س^٢ + ١)\ ءس \geq \int_{-١}^{٢} (س - ١)\ ءس$$

٧ إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]، وكان أ < حـ < ب فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{حـ} د(س)\,ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\,ءس$$

فمثلاً: في شكل (١ – ٦)

نلاحظ أن د دالة متصلة على [أ ، ب] ، د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] ونعلم أن $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس$ هو مساحة المنطقة المظللة في الشكل.



شكل ١-٦

وحيث إن أ < حـ < ب .

يكون $\int_{أ}^{حـ} د(س)\,ءس$ هو مساحة المنطقة ص١ ،

$\int_{حـ}^{ب} د(س)\,ءس$ هو مساحة المنطقة ص٢

ومن الشكل نلاحظ أن:

مساحة المنطقة المظللة = مساحة ص١ + مساحة ص٢

أي أن $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{حـ} د(س)\,ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\,ءس$.

٨ إذا كانت د دالة متصلة على فترة ما ف وكانت أ ، ب ، حـ ∈ ف فإن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{أ}^{حـ} د(س)\,ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\,ءس$$

مثال ٥

عبّر عما يأتي بتكامل واحد: $\int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس - \int_{٥}^{٣} د(س)\,ءس$

الحل

$= \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس - \int_{٥}^{٣} د(س)\,ءس$

$= \int_{-١}^{٣} د(س)\,ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{٥} د(س)\,ءس$ ■

يمكن استخدام قاعدة القوى في التكامل المحدد كما يلي:

قاعدة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١}\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

حيث ن عدد نسبي ، ن ≠ −١

وكذلك يمكن تعميم قاعدة القوى في التكامل المحدد كما يلي:

تعميم

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس} = \left[\frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١}\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$ حيث ن عدد نسبي ، ن ≠ −١ .

مثال ٦

أوجد $\int_{٠}^{٢} ٢\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}\ \text{ءس}$

الحل

$$\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١}\ ٢\text{س}^{٢}\ \text{ءس} = \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{١}{٢}}\ \text{س}^{٢}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣}\int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{١}{٢}}\ (٣\text{س}^{٢})\ \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣}\int_{٠}^{٢} \left[\text{د}(\text{س})\right]^{\frac{١}{٢}}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس}$$

حيث $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ١$

$$\therefore \text{التكامل} = \left[\frac{٢}{٣} \times \frac{(\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٤}{٩}\left[(\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٤}{٩}[٢٧ - ١] = \frac{٤}{٩} \times ٢٦ = \frac{١٠٤}{٩}$$

مثال ٧

أوجد قيمة $\int_{٢}^{٤} \frac{س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + ١}{س^{٢} + ٤س + ٤} \, ءس$

الحل

في حالة ما إذا كان المكامل حدودية نسبية بسطها من درجة أكبر من أو تساوي درجة المقام، يلزم تبسيط الحدودية النسبية من خلال قسمة البسط على المقام:

$$\frac{س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س + ١}{س^{٢} + ٤س + ٤} = س + \frac{١}{س^{٢} + ٤س + ٤}$$

$$= س + \frac{١}{(س + ٢)^{٢}}$$

$$\therefore \text{التكامل} = \int_{٢}^{٤} س \, ءس + \int_{٢}^{٤} \frac{١}{(س + ٢)^{٢}} \, ءس$$

$$= \int_{٢}^{٤} س \, ءس + \int_{٢}^{٤} (س + ٢)^{-٢} \, ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{٢}^{٤} + \left[\frac{(س + ٢)^{-١}}{-١}\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{١٦}{٢} - \frac{٤}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٦} - \frac{١}{٤}\right) = ٦\frac{١}{١٢}$$

مثال ٨

أوجد $\int_{١}^{٢} س^{٧} \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٧} ءس$.

الحل

$$\int_{١}^{٢} س^{٧} \left(١ - \frac{١}{س}\right)^{٧} ءس = \int_{١}^{٢} \left(س\left(١ - \frac{١}{س}\right)\right)^{٧} ءس$$

$$= \int_{١}^{٢} (س - ١)^{٧} \, ءس$$

$$= \left[\frac{(س - ١)^{٨}}{٨}\right]_{١}^{٢} = \frac{١}{٨} - ٠ = \frac{١}{٨}$$

مثال ٩

أوجد $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{س}}$ ءس .

الحل

$$\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{س}} \text{ ءس} = \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - ١)^{٣} \times \frac{١}{\sqrt{س}} \text{ ءس}$$

$$= ٢ \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - ١)^{٣} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} \text{ ءس}$$

$$= ٢ \left[\frac{(\sqrt{س} - ١)^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{١}{٢} \left[(\sqrt{س} - ١)^{٤}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{١}{٢} [١ - ٠]$$

$$= \frac{١}{٢}$$

مثال ١٠

أوجد $\int_{-١}^{١} (ص + ٢)^{٤} (ص + ٧) \text{ ءص}$.

الحل

$$\int_{-١}^{١} (ص + ٢)^{٤} (ص + ٢ - ٢ + ٧) \text{ ءص}$$

$$= \int_{-١}^{١} (ص + ٢)^{٤} (ص + ٢ + ٥) \text{ ءص}$$

$$= \int_{-١}^{١} \left[(ص + ٢)^{٤} (ص + ٢) + ٥(ص + ٢)^{٤}\right] \text{ ءص}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[(\text{ص} + ٢)^{٥} + ٥(\text{ص} + ٢)^{٤} \right] \, \text{ءص}$$

$$= \left[\frac{(\text{ص} + ٢)^{٦}}{٦} + (\text{ص} + ٢)^{٥} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{٣^{٦}}{٦} + ٣^{٥} - \left(\frac{١}{٦} + ١ \right) \right]$$

$$= \frac{٢٤٣}{٢} + ٢٤٣ - \frac{٧}{٦}$$

$$= ٣٦٣\frac{١}{٣}$$

تمارين

١ - ٣

بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة:**

١ إذا كانت ق دالة متصلة على [٣ ، ٧] وكان

$\int_{٣}^{س} ق(ع)\, دع = س^{٢} - ٢س + أ$ فإن أ = −٣

٢ $\forall\, أ \in ح$ فإن $\int_{-أ}^{أ} (س^{٢} + ١)\, دس \geq ٠$

٣ إذا كانت د(س) = $٣س^{٢}(\sqrt{س} - ١)$ فإن إحدى الدوال المقابلة للدالة د هي

ق : ق(س) = $س^{٢}\left(\frac{٢}{٣} س \sqrt{س} - س\right)$

٤ $\int \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}\, دس = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + ٢س + ث$ حيث ث ثابت

• **ثانياً: لكل مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح.**

١ إذا كان $\int_{٢}^{٥} هـ(س)\, دس = ٢$ فإن $\int_{٢}^{٥} (٣هـ(س) - ١)\, دس$ هو

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ليس أياً مما سبق

٢ إذا كان $\int_{١}^{٧} ق(س)\, دس = ٩$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ٦$

فإن $\int_{٧}^{٣} ٢ق(س)\, دس =$

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) −٦ (د) ٦

٣ إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٣د(س)\, دس = ٩$ وكان $\int_{٣}^{٤} ٢د(س)\, دس = ٦$

فإن $\int_{٤}^{٥} ٥د(س)\, دس =$

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) صفر (د) ٥

٤ $\int_{-1}^{1} س^{3}\ ءس =$

(أ) صفراً (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

٥ إذا كانت د دالة متصلة على [١ ، ٤] وكان

$ق(س) = \int_{1}^{س} د(ع)\ ءع = ٢س^{2} - ٣س + ك$ ،

حيث ك ثابت فإن ق(٢) =

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

أسئلة مقالية:

- **ثالثاً: أثبت دون حساب قيمة التكامل أن:**

١ $\int_{1}^{3} (س^{2} + ٢)\ ءس \geqslant \int_{1}^{3} (٢س - ٣)\ ءس$

٢ $\int_{2}^{3} (س^{2} - ٦س)\ ءس \leqslant ٠$

٣ $\int_{2}^{3} (س^{2} + ٦س) \geqslant ٠$

- **رابعاً: عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:**

٤ $\int_{5}^{1} س^{2}\ ءس + \int_{1}^{5} س^{2}\ ءس$

٥ $\int_{-2}^{1} \sqrt{س + ٣}\ ءس - \int_{5}^{1} \sqrt{س + ٣}\ ءس$

- **خامساً: أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:**

٦ $\int_{1}^{1} ٤\ ءس$

٧ $\int_{1}^{3} -ص\ ءص$

٨ $\int_{1}^{4} \sqrt{١٦س^{5}}\ ءس$

٩ $\int_{0}^{1} (٢س - ٣)(٥س + ١)\ ءس$

١٠ $\int_{-1}^{1} (س^{2} + ١)^{2}\ ءس$

١١ $\int_{-4}^{-1} \frac{١ - س^{5}}{٢س^{2}}\ ءس$

١٢ $\int_{-2}^{1} \frac{٢س^{3} - ١٢س^{2} + ١٨س + ٥}{٩ - ٦س + س^{2}}\ ءس$

١٣ $\int_{٥}^{٨} \sqrt{٣س + ١}\ ءس$

١٤ $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{٢س + ٢}}\ ءس$

١٥ $\int_{-٦}^{-١} \left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

١٦ $\int_{٣}^{٧} س\sqrt{٢س^{٢} - ١٧}\ ءس$

١٧ $\int_{-١}^{٠} \frac{٥س}{\sqrt{٣ - س^{٢}}}\ ءس$

١٨ $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{س}(\sqrt{س} + ١)^{٢}}\ ءس$

١٩ $\int_{١}^{٢} (س - ١)^{٦} (س + ١)^{٦}\ س\ ءس$

٢٠ $\int_{-٢}^{٠} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}\ ءس$

٢١ $\int_{١}^{٢} \frac{(س + ٢)^{٤}}{س^{٦}}\ ءس$

٢٢ $\int_{٢}^{٦} س\sqrt{\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}}\ ءس$

٢٣ $\int_{-١}^{١} (س + ٢)^{٤} (س + ٣)\ ءس$

٢٤ $\int_{١}^{٤} \frac{(\sqrt{س} - ١)^{٣}}{\sqrt{س}}\ ءس$

٢٥ $\int_{٠}^{٤} \frac{\sqrt{س}(س - ١)}{\sqrt{س} + ١}\ ءس$

٢٦ $\int_{٢}^{٤} س^{٧} \left(١ - \frac{٣}{س}\right) ءس$

٢٧ $\int_{٣}^{٤} \frac{٢س - ٥}{(س - ٥)^{٣}}\ ءس$

٢٨ $\int_{٠}^{٣} |س^{٢} - ١|\ ءس$

- سادساً: أجب عما يأتي

٢٩ إذا كان $\int_{١}^{٢} د(س)\ ءس = ٧$ ، $\int_{١}^{٢} ق(س)\ ءس = -٤$ فأوجد

أ $\int_{١}^{٢} ٣\ د(س)\ ءس$

ب $\int_{١}^{٢} -٥\ ق(س)\ ءس$

ج $\int_{١}^{٢} (٣د(س) - ٥ق(س))\ ءس$

د $\int_{٢}^{١} (٣د(س) - ٤ق(س))\ ءس$

٣٠ إذا كان $\int_{-٢}^{٣} د(س)\ ءس = ٥$ فأوجد

أ $\int_{٣}^{-٢} د(س)\ ءس$

ب $\int_{-٢}^{٣} د(س)\ ءس + \int_{٣}^{-٢} د(س)\ ءس$

جـ $\int_{-٢}^{١} د(س)\ ءس + \int_{١}^{٣} د(س)\ ءس$

د $\int_{-٢}^{٣} ٢\ د(س)\ ءس + \int_{٣}^{-٢} ٣\ د(س)\ ءس$

٣١ إذا كان $د(س) = \int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{(٢س + ٥)^{٢}}}$ ، $د(١١) = ٥$ فأوجد د(س)

٣٢ إذا كان $د(س) = \int \sqrt{١ + ٣س}\ ءس$ ، $د\left(\frac{-١}{٣}\right) = \frac{٧}{٩}$ فأوجد د(٨)

٣٣ إذا كان $د''(س) = ٢ - ٦س$ ، $د'(١) = ٤$ ، $د(٠) = ١$ فأوجد د(س)

٣٤ إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ٢$ ، ص = ٠ عندما س = ٠ فأوجد ص

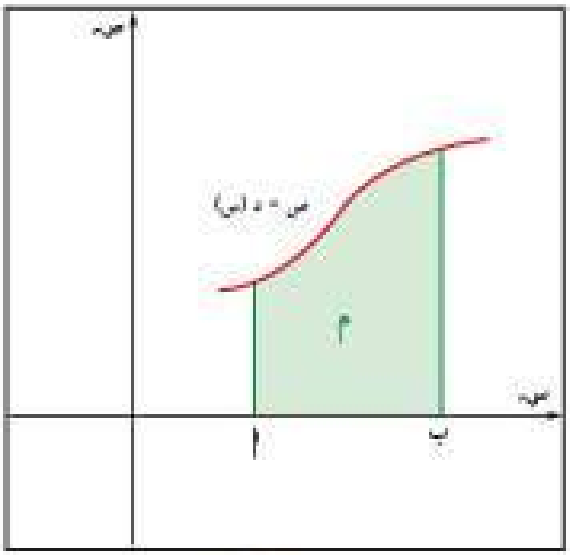
١ – ٤

The Area

علمنا فيما سبق أن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة :

$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس .$$

حيث د دالة متصلة على [أ ، ب] ،
د(س) ≥ ٠ انظر شكل (١ – ٧)

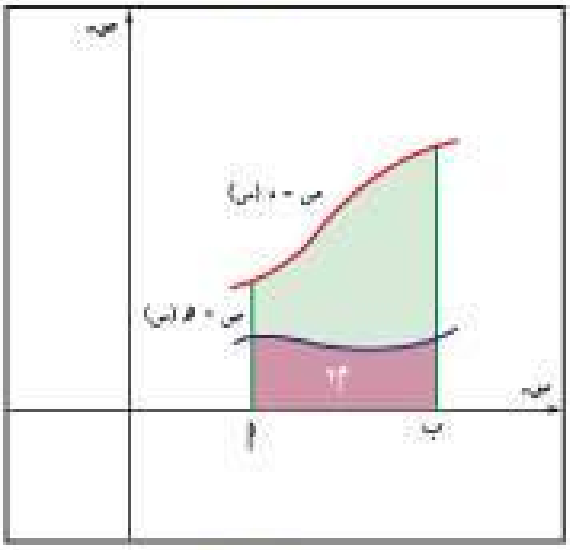


شكل (١–٧)

في هذا البند سنحاول حساب مساحات مناطق في الحالات العامة.

اعتبر كلاً من الدالتين د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب] ، د(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠ كما في شكل (١ – ٨ أ) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

$$م_١ = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$$



شكل (١–٨أ)

ومساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة هـ ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

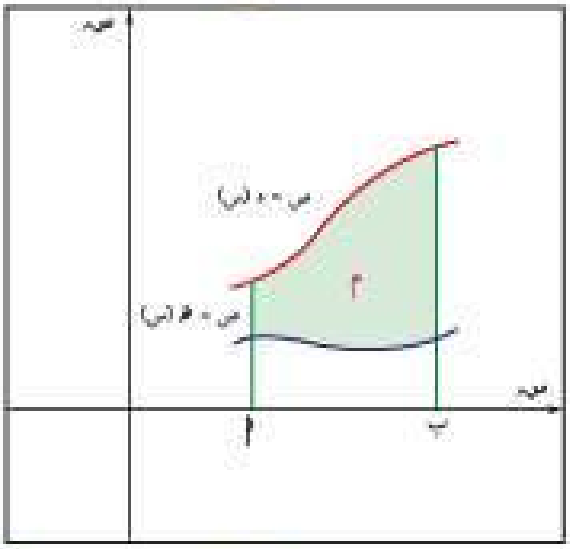
$$م_٢ = \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

تكون مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة هـ والمستقيمين س = أ ، س = ب كما في شكل (١ – ٨ب) هي:

$$م = م_١ - م_٢$$

$$= \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$$

$$= \int_{أ}^{ب} (د(س) - هـ(س))\ ءس$$



شكل (١–٨ب)

نظـريـة ٥

لتكن د ، هـ دالتين متصلتين على [أ ، ب] ،

د(س) ≥ هـ(س) ∀ س ∈ [أ ، ب]

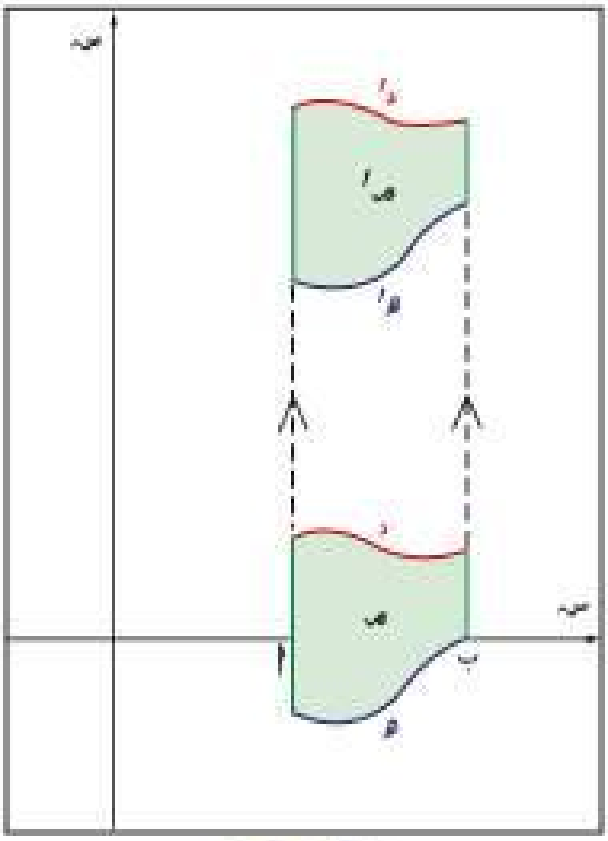
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) ومنحنى الدالة: ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - هـ(س)] \, ءس$$

لاحظ أننا لم نشترط في نظرية (٥) أن تكون كل من د(س) و هـ(س) موجبة في الفترة [أ ، ب]

فمساحة المنطقة م في شكل (١ - ٩) تساوي مساحة المنطقة م′.

لاحظ أن م′ هي صورة للمنطقة م تحت تأثير انسحاب في الاتجاه الموجب لمحور الصادات مسافة قدرها حـ بحيث تكفي هذه المسافة لجعل المنطقة م′ فوق محور السينات.



شكل ١-٩

مثال ١

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة:

ص = س^{٢} + ١

والمحور السيني والمستقيمين س = -١ ، س = ٢.

الحل

الدالة: ص = س^{٢} + ١ متصلة وموجبة على الفترة [-١ ، ٢]

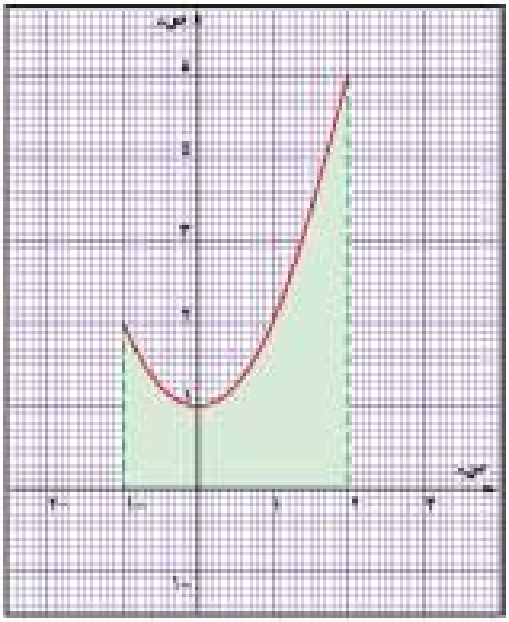
$$\therefore \text{المساحة} = \int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ١) \, ءس$$

$$= \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٨}{٣} + ٢\right) - \left(-\frac{١}{٣} - ١\right)$$

$$= \frac{١٤}{٣} + \frac{٤}{٣}$$

$$= \frac{١٨}{٣} = ٦$$ وحدات مربعة. ■



شكل (١-١٠)

مثال ٢

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{ص} = ٤\text{س}$

الحل

نفرض $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٤\text{س}$.

وفي البداية نعين نقط تقاطع المنحنيين وذلك بوضع:

$$\text{س}^{٢} = ٤\text{س}$$

$$\therefore \text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$$

$$\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$$

$$\therefore \text{س} = ٠ \text{ أو } \text{س} = ٤$$

وبالتعويض في أحدهما:

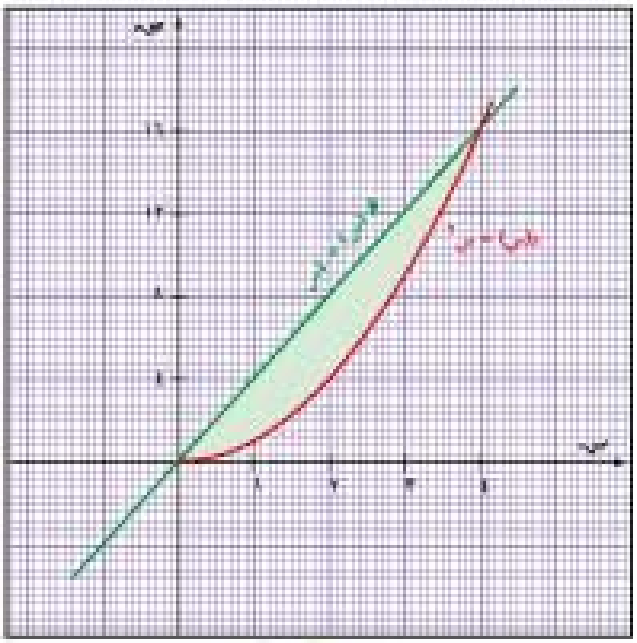
$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠ ،$$

$$\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = ١٦$$

$\therefore$ نقطتا التقاطع هما $(٠ ، ٠)$ ، $(٤ ، ١٦)$

وعند رسم المنحنيين رسماً تقريبياً يتضح أن:

$$\text{هـ}(\text{س}) \geqslant \text{د}(\text{س}) \qquad \forall \text{ س} \in [٠ ، ٤]$$



شكل (١-١١)

للتحقق من ذلك جبرياً:

اختر أي عدد ينتمي للفترة (٠ ، ٤) وليكن ١ مثلاً:

ثم أوجد: د(١) = $(١)^{٢}$ = ١ ، هـ(١) = ٤ × ١ = ٤

قارن بين الناتجين تجد أن: ٤ > ١ ،

نستنتج أن هـ(س) ≥ د(س) $\forall$ س ∈ [٠ ، ٤]

∴ المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٤} \left[هـ(س) - د(س)\right] ءس = \int_{٠}^{٤} (٤س - س^{٢}) ءس$

$= \left[\frac{٤}{٢}س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٤}$

$= ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} = ١٠\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مثال ٣

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: د(س) = $-س^{٢}$ + ٥س − ٤

ومنحنى الدالة: هـ(س) = −س − ٤

الحل

لتعيين نقطتي تقاطع المنحنيين:

$-س^{٢}$ + ٥س − ٤ = −س − ٤ ⇐

$س^{٢}$ − ٦س = ٠ ⇐ س (س − ٦) = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = ٦

عند رسم المنحنيين رسماً تقريبياً يتضح أن د(س) ≥ هـ(س) في الفترة [٠ ، ٦]

وللتحقق من ذلك جبرياً:

نختار أي عدد ينتمي للفترة (٠ ، ٦) وليكن ١ مثلاً:

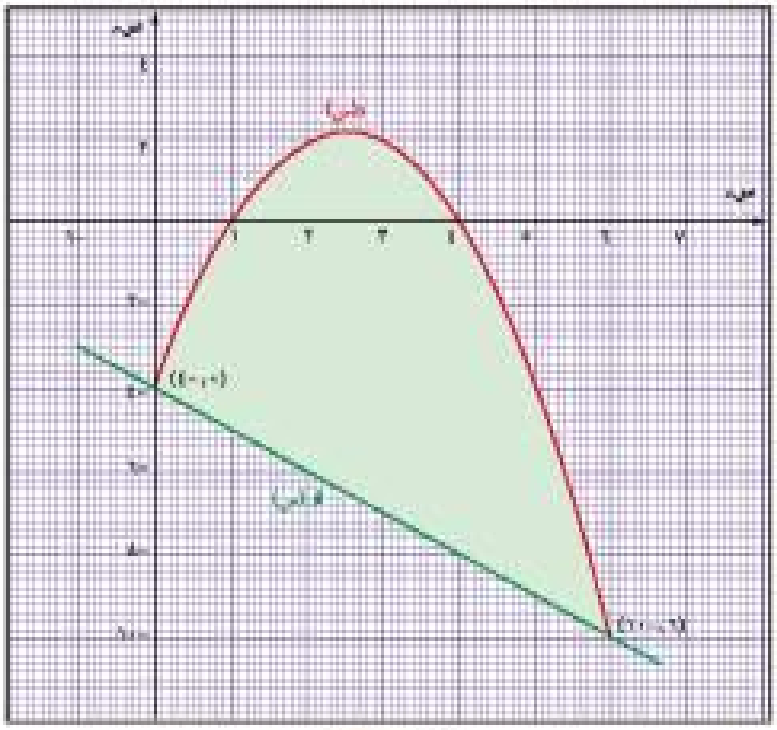
نوجد: د(١) = $-(١)^{٢}$ + ٥(١) − ٤

= صفر،

هـ(١) = (−١) − ٤ = −٥

∵ ٠ > −٥

∴ د(س) ≥ هـ(س) في الفترة [٠ ، ٦].



شكل ١-١٢

∴ المساحة المطلوبة = $\int_{٠}^{٦} \left[د(س) - هـ(س) \right] ءس$

= $\int_{٠}^{٦} \left[(-س^{٢} + ٥س - ٤) - (-س - ٤) \right] ءس$

= $\int_{٠}^{٦} (-س^{٢} + ٦س) ءس$

= $\left[-\frac{١}{٣} س^{٣} + ٣س^{٢} \right]_{٠}^{٦}$ = ٣٦ وحدة مربعة

مثال ٤

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيين:

ص = $س^{٤}$ + ١ ، ص = ٢$س^{٢}$

الحل

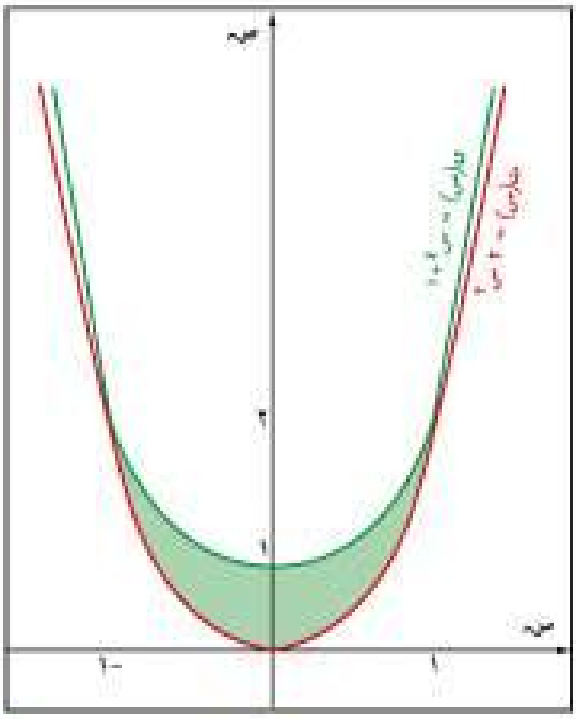
نفرض ق(س) = $س^{٤}$ + ١

ت(س) = ٢$س^{٢}$

لإيجاد نقطتي التقاطع نضع:

$س^{٤}$ + ١ = ٢$س^{٢}$

∴ $س^{٤}$ − ٢$س^{٢}$ + ١ = ٠



شكل ١-١٣

$\therefore$ $(\text{س}^{٢} - ١)^{٢} = ٠$

$\therefore$ $\text{س} = \pm ١$

نلاحظ من الشكل المرسوم أن $\text{ق}(\text{س}) \geqslant \text{ت}(\text{س})$ $\forall$ $\text{س} \in [-١ ، ١]$.

وللتحقق من ذلك نختار أي عدد ينتمي للفترة $(-١ ، ١)$ وليكن (٠) مثلاً:

نوجد $\text{ق}(٠) = ١$ ، $\text{ت}(٠) = ٠$

$\because$ $١ > ٠$

$\therefore$ $\text{ق}(\text{س}) \geqslant \text{ت}(\text{س})$ $\forall$ $\text{س} \in [-١ ، ١]$.

$\therefore$ المساحة $= \int_{-١}^{١} \left[(\text{س}^{٤} + ١) - (٢\text{س}^{٢})\right] \, \text{ءس}$

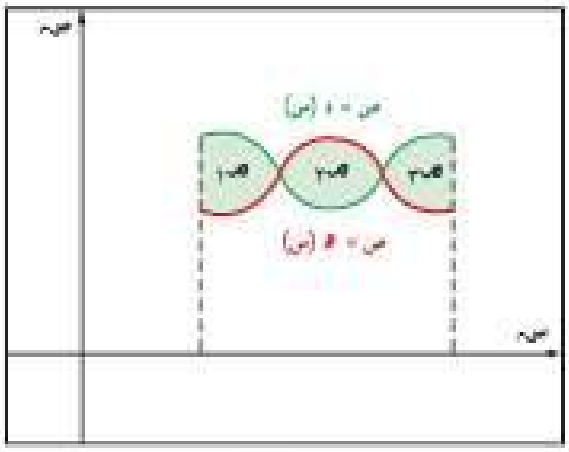
$$= \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \text{س} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(\frac{١}{٥} + ١ - \frac{٢}{٣}\right) - \left(-\frac{١}{٥} - ١ + \frac{٢}{٣}\right)$$

$$= \frac{١٦}{١٥}$$ وحدة مربعة ■

والآن لو كان المطلوب هو إيجاد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ ، $\text{ص} = \text{هـ}(\text{س})$ حيث $\text{د}(\text{س}) \geqslant \text{هـ}(\text{س})$ لبعض قيم س و $\text{هـ}(\text{س}) \geqslant \text{د}(\text{س})$ للقيم الأخرى من س. هنا يجب تجزئة المنطقة هـ إلى مناطق جزئية $\text{هـ}_{١}$ ، $\text{هـ}_{٢}$ ، $\text{هـ}_{٣}$ ، . . . . حيث مساحاتها هي $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ ، $\text{م}_{٣}$ ، . . . . على الترتيب انظر شكل (١ - ١٤) وبالتالي يمكننا أن ندرك أن مساحة المنطقة هـ تساوي مجموع مساحات المناطق الجزئية $\text{هـ}_{١}$ ، $\text{هـ}_{٢}$ ، $\text{هـ}_{٣}$ ، . . .

أي أن $\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} + \text{م}_{٣} + \ldots$



شكل (١-١٤)

نظرية ٦

مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) ، ومنحنى الدالة: ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} |د(س) - هـ(س)| \, ءس$$

لاحظ أن:

$$|د(س) - هـ(س)| = \begin{cases} د(س) - هـ(س) & \text{عندما } (س) \geqslant هـ(س) \\ هـ(س) - د(س) & \text{عندما } هـ(س) \geqslant د(س) \end{cases}$$

مثال ٥

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة:

ص = س^{٣} − ٣س^{٢} − س + ٣

والمحور السيني، والمستقيمين س = −١ ، س = ٢

الحل

لاحظ أن معادلة المحور السيني هي ص = ٠

∴ لإيجاد نقاط التقاطع

نضع س^{٣} − ٣س^{٢} − س + ٣ = ٠

س^{٢} (س − ٣) − (س − ٣) = ٠

(س − ٣) (س^{٢} − ١) = ٠

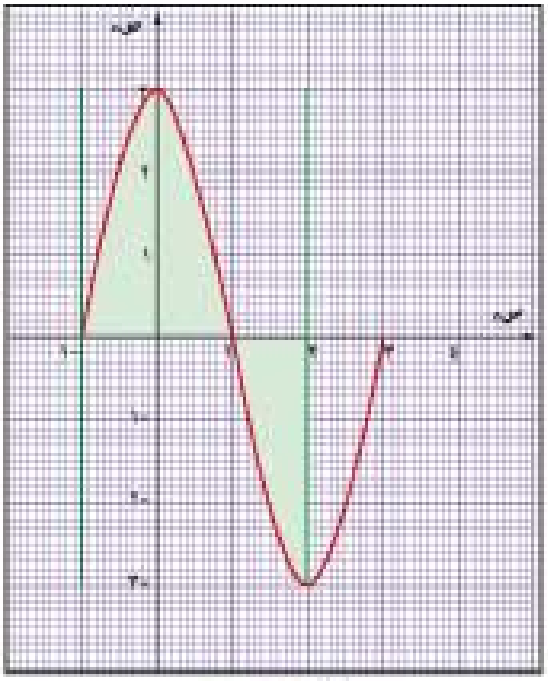
(س − ٣) (س − ١) (س + ١) = ٠

∴ منحنى الدالة يقطع محور السينات

عند س = −١ ، ١ ، ٣

نرسم المنحنى رسماً تقريبياً.

انظر شكل (١ − ١٥)



شكل ١−١٥

مساحة المنطقة المطلوبة = $\int_{-1}^{2} |س^3 - 3س^2 - س + 3 - 0|$ ءس

$= \int_{-1}^{1} (س^3 - 3س^2 - س + 3)$ ءس $- \int_{1}^{2} (س^3 - 3س^2 - س + 3)$ ءس... لماذا؟

$= \left[\frac{1}{4}س^4 - س^3 - \frac{1}{2}س^2 + 3س\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{4}س^4 - س^3 - \frac{1}{2}س^2 + 3س\right]_{1}^{2}$

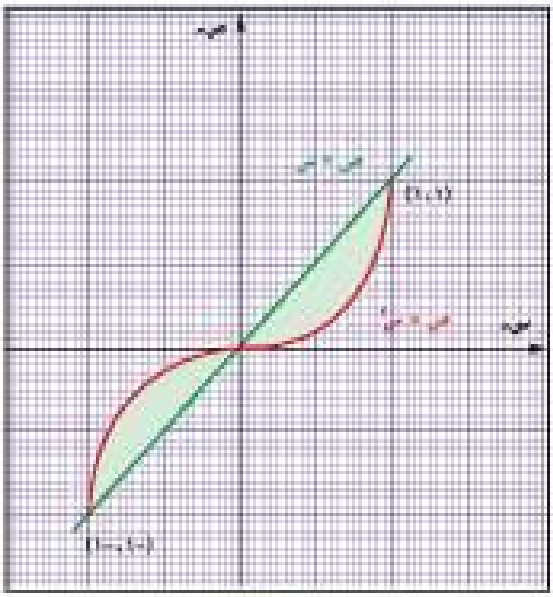
$= \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\right) - \left(0 - \frac{7}{4}\right)$

$= 4 + \frac{7}{4} = 5\frac{3}{4}$ وحدة مربعة.

مثال ٦

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:

ص = $س^3$ ، ص = س



شكل (١-١٦)

الحل

لإيجاد نقط التقاطع

$س^3 = س$

$\therefore$ $س^3 - س = 0$

$\therefore$ $س(س^2 - 1) = 0$

$\therefore$ $س(س + 1)(س - 1) = 0$

$\therefore$ س = ٠ ، -١ ، ١

وشكل (١ - ١٦) يمثل رسم تقريبي للدالتين

المساحة = $\int_{-1}^{1} |س^3 - س|$ ءس

المساحة = $\int_{-1}^{0} (س^3 - س)$ ءس + $\int_{0}^{1} (س - س^3)$ ءس

$= \left[\frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{2}س^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}س^2 - \frac{1}{4}س^4\right]_{0}^{1}$

$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

مثال ٧

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين :

$د(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = \frac{س}{٢}$

والمستقيمين س = ٠ ، س = ٩

الحل

نوجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بوضع د(س) = هـ(س)

أي أن $\sqrt{س} = \frac{س}{٢}$

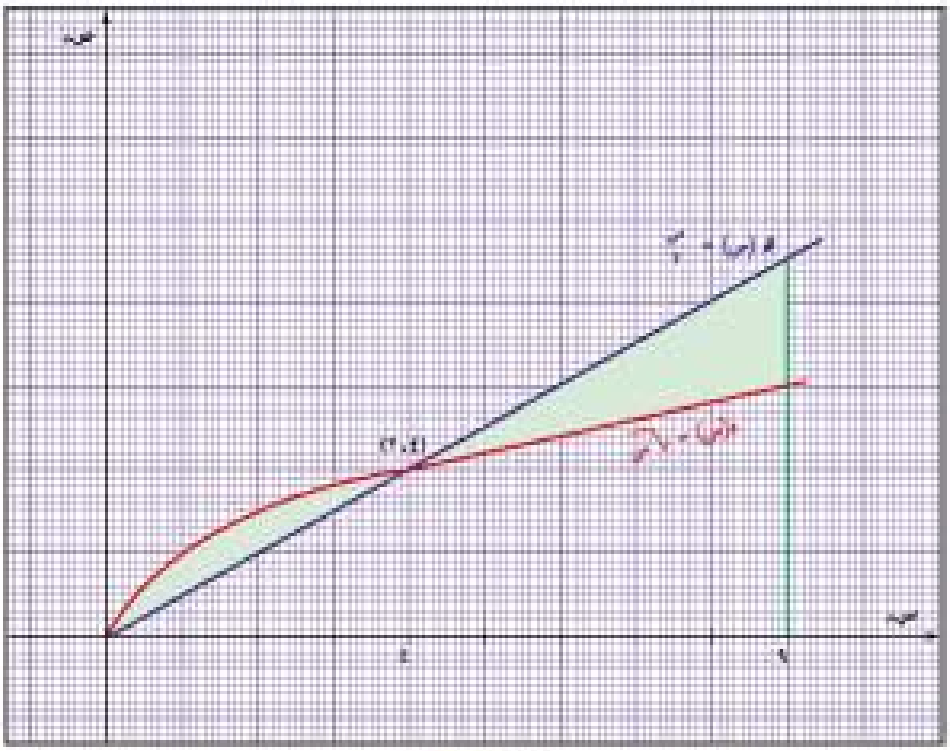
$\therefore س = \frac{س^٢}{٤}$

$س^٢ - ٤س = ٠$

$س (س - ٤) = ٠$

إما س = ٠ أو س = ٤

الشكل (١ – ١٧) يوضح بيان المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها .



شكل ١–١٧

من الشكل نلاحظ أن:

$\text{د}(\text{س}) \geqslant \text{هـ}(\text{س})$ حيث $١ \leqslant \text{س} \leqslant ٤$ ،

$\text{هـ}(\text{س}) \geqslant \text{د}(\text{س})$ حيث $٤ \leqslant \text{س} \leqslant ٩$

$\therefore$ المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٩} \left| \sqrt{\text{س}} - \frac{\text{س}}{٢} \right| \, \text{ءس}$.

$$= \int_{٠}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} - \frac{\text{س}}{٢} \right) \text{ءس} + \int_{٤}^{٩} \left(\frac{\text{س}}{٢} - \sqrt{\text{س}} \right) \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} \right]_{٠}^{٤} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{٢}{٣} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٤}^{٩}$$

$$= \left(\frac{٢}{٣} \times ٨ - ٤ \right) + \left[\frac{٨١}{٤} - \frac{٢}{٣} \times ٢٧ - \left(٤ - \frac{٢}{٣} \times ٨ \right) \right]$$

$$= \frac{١٦}{٣} - ٤ + \frac{٨١}{٤} - ١٨ - ٤ + \frac{١٦}{٣}$$

$$= \frac{١١}{١٢} \, ٤ \text{ وحدة مساحة}$$

تمارين

١ - ٤

● أوجد مساحة المنطقة المحددة في كل مما يأتي:

١ ص = س - س^{٢} ومحور السينات

٢ ص = ١ - س^{٢} ، ص = -٣

٣ ص = س^{٢} ، ص = ٤س

٤ ص = ٢ - س^{٢} ، ص = -س

٥ ص = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨س ومحور السينات

٦ ص = س^{٤} ، ص = ٢ - س^{٢}

٧ ص = -س^{٢} + ٦ ، ص + ٢س - ٣ = ٠

٨ ص = $\frac{١}{٢}$س ، ص = -س ، س = ٠ ، س = ١

٩ ص = س (س + ١) (س - ٢) ، ص = ٤س

١٠ ص = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س ومحور السينات.

١١ ص = -$\sqrt{\text{س}}$ ، ص = س ، س = ٠ ، س = ١٠

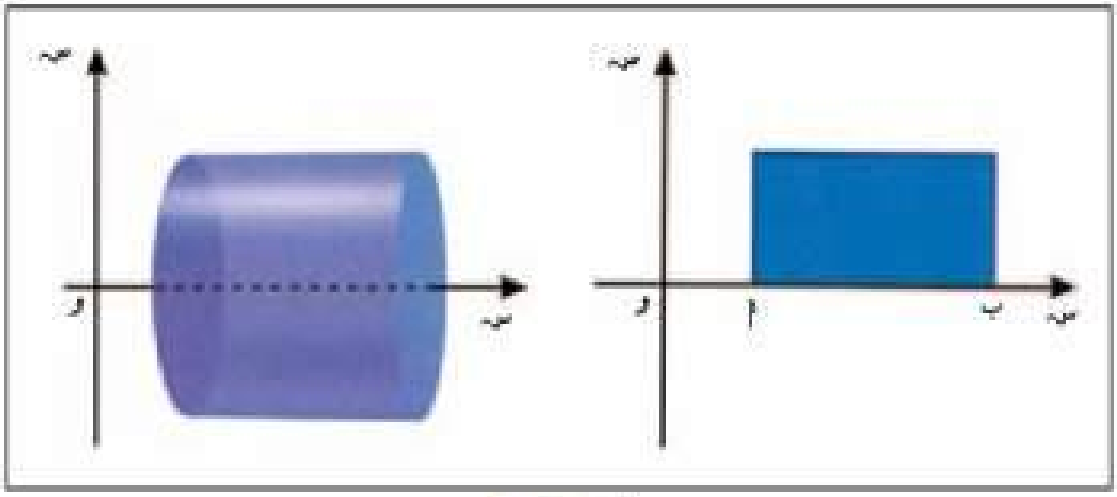
١-٥ حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of The Solids of Revolution

إذا دارت منطقة مستوية حول مستقيم في مستواها فإن الجسم الناتج من الدوران يسمى «جسم دوراني»، ويسمى المستقيم «محور الدوران».

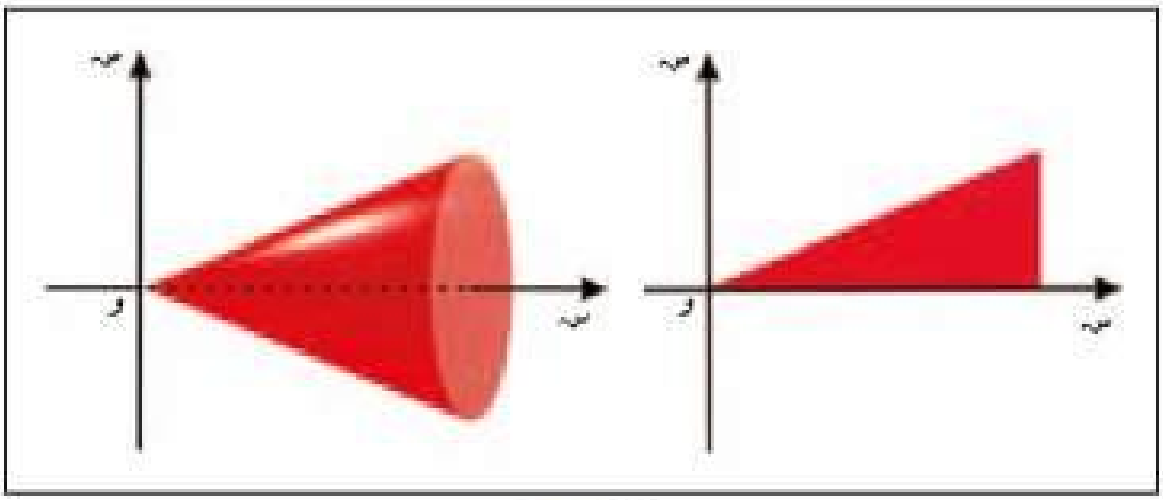
على سبيل المثال:

إذا دارت المنطقة المستطيلة في شكل (١ - ١٨) حول المحور السيني دورة كاملة فإن الجسم الدوراني الناتج هو أسطوانة دائرية قائمة.



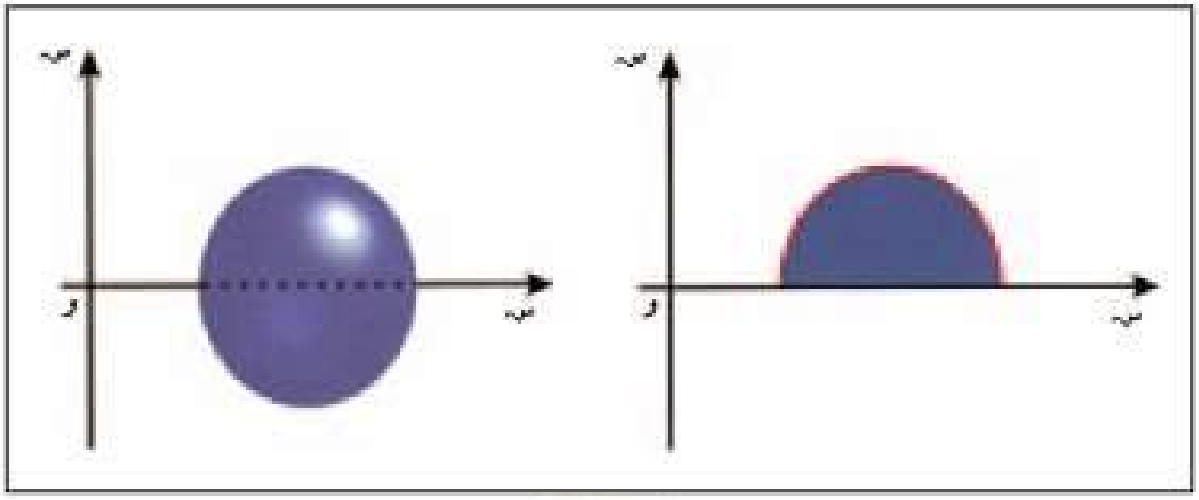
شكل (١-١٨)

وإذا دارت منطقة المثلث في شكل (١ - ١٩) حول المحور السيني دورة كاملة فإن الجسم الدوراني الناتج هو مخروط دائري قائم.



شكل (١-١٩)

وإذا دارت منطقة نصف دائرية كما في شكل (١ – ٢٠) حول المحور السيني دورة كاملة فإن الجسم الدوراني الناتج هو كرة.

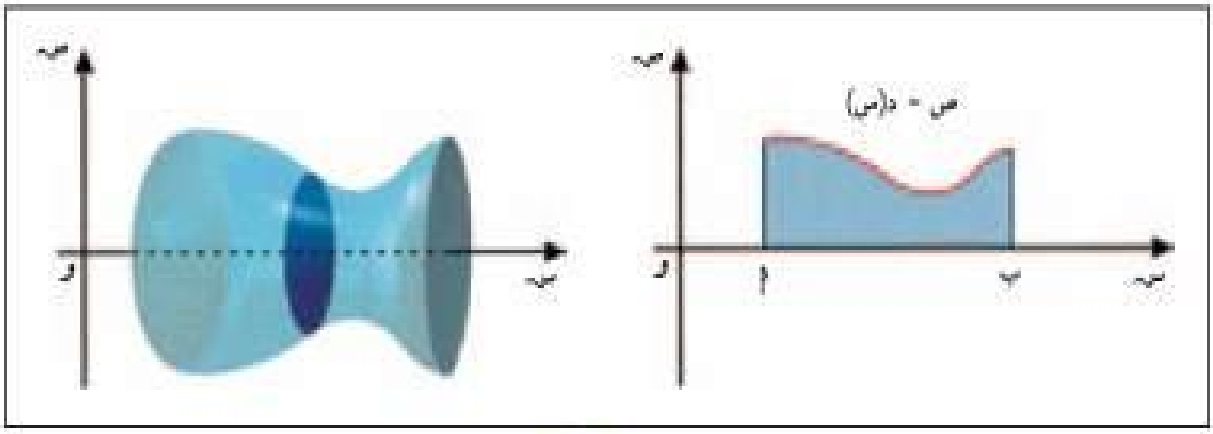


شكل (١-٢٠)

سوف ندرس في هذا البند «استخدام التكامل لإيجاد حجوم الأجسام الدورانية»، وسنقتصر دراستنا على حجوم الأجسام الناتجة من الدوران حول المحور السيني.

أولاً: حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني

إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنى ص = د (س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني نتج الجسم الدوراني الموضح في شكل (١ – ٢١).



شكل (١-٢١)

ولحساب حجم مثل هذا الجسم الدوراني فإننا نستخدم القانون التالي:

قانون

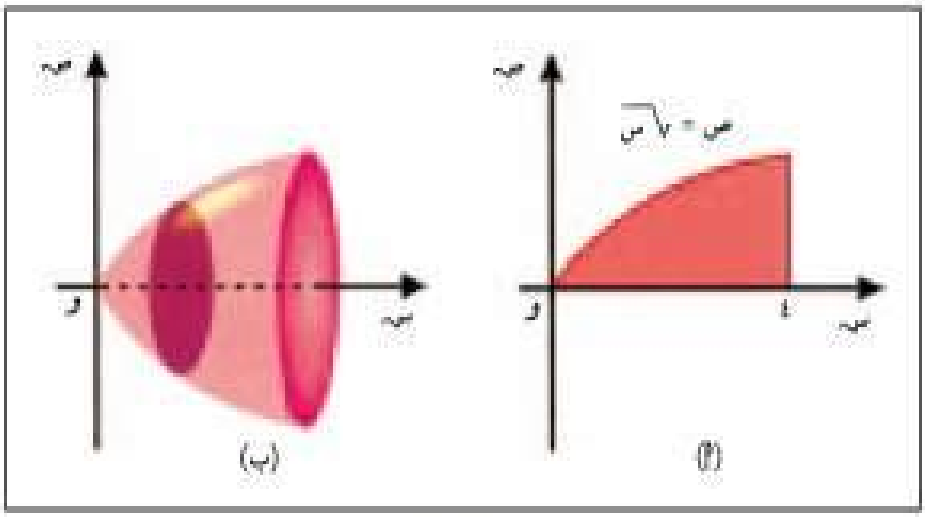
$$\text{حجم الجسم الدوراني} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \pi \left(\text{د}(\text{س})\right)^{2} \, \text{ءس}$$

مثال ١

ارسم المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ والمحور السيني والمستقيم $\text{س} = ٤$ ثم أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور السيني.

الحل

نرسم المنطقة كما في شكل (١ – ٢٢ أ)



شكل ١-٢٢

وحجم الجسم الناتج من الدوران $= \int_{٠}^{٤} \pi \left(\sqrt{\text{س}}\right)^{2} \, \text{ءس}$ شكل (١ – ٢٢ ب)

$$= \pi \left[\frac{\text{س}^{2}}{2}\right]_{٠}^{٤}$$

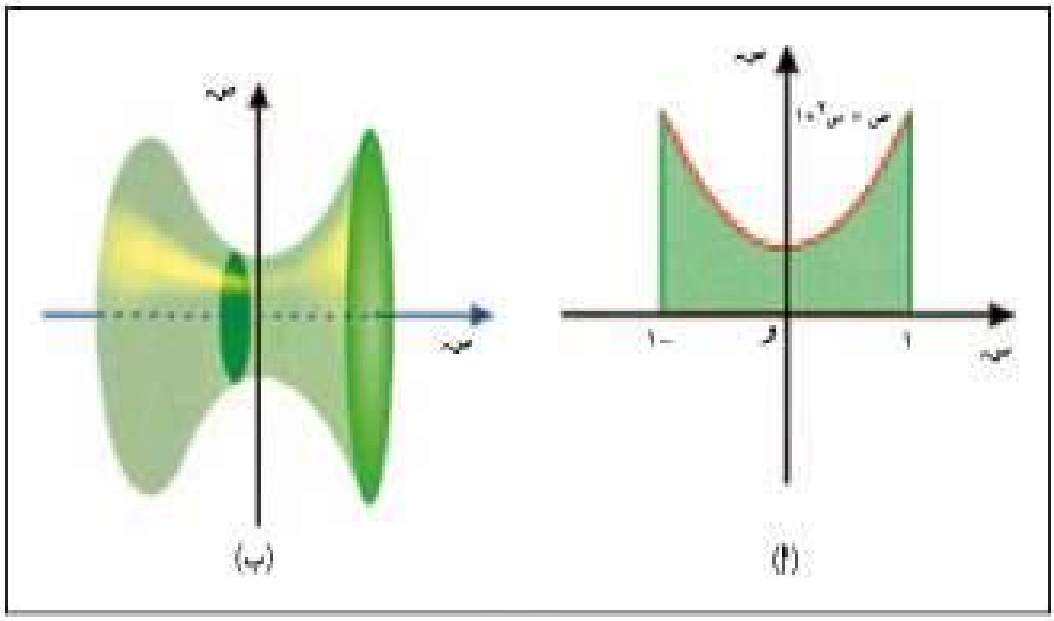
$$= \pi \frac{١٦}{٢} = ٨\pi \text{ وحدة مكعبة.}$$

مثال ٢

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = س^{٢} + ١ والمحور السيني والمستقيمين س = −١ ، س = ١ حول المحور السيني.

الحل

شكل (١ − ٢٣ أ) يوضح المنطقة المطلوبة.



شكل (١ − ٢٣)

∴ حجم الجسم الناتج من الدوران = $\int_{-١}^{١} \pi$ ص^{٢} ءس شكل (١ − ٢٣ ب)

$$= \int_{-١}^{١} \pi (\text{س}^{٢} + ١)^{٢} \, \text{ءس}$$

$$= \pi \int_{-١}^{١} (\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١) \, \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س} \right]_{-١}^{١}$$

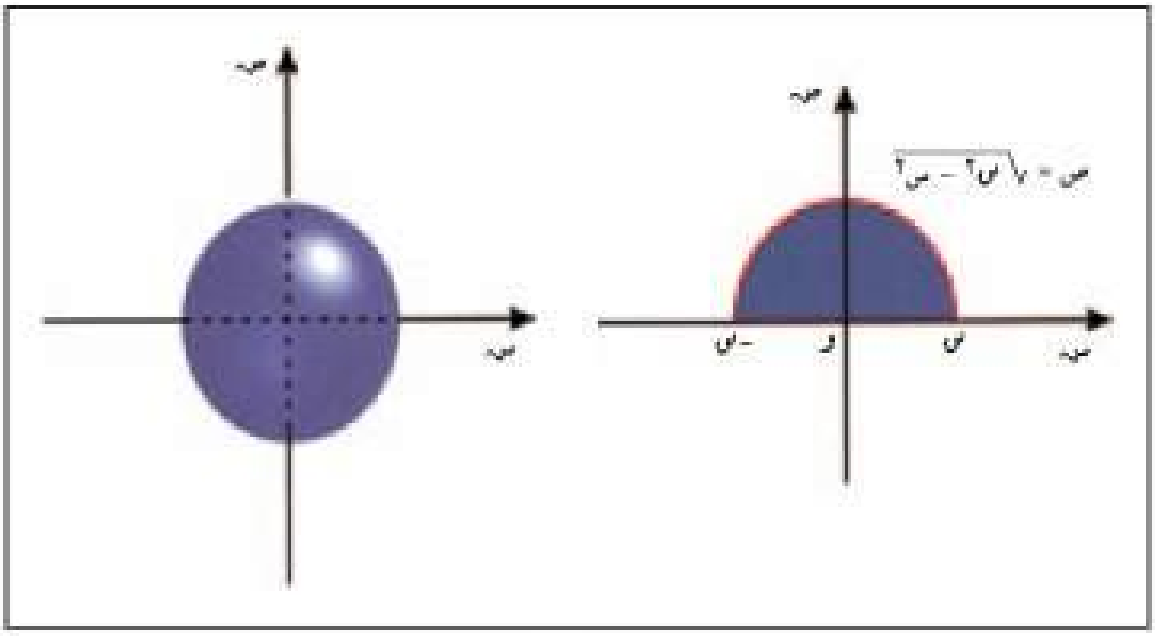
$$= \frac{٥٦}{١٥}\pi \text{ وحدة مكعبة.}$$

مثال ٣

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بنصف الدائرة: $\text{ص} = \sqrt{\text{ن}^2 - \text{س}^2}$ حول المحور السيني.

الحل

واضح أن دوران منطقة نصف الدائرة حول المحور السيني ينتج عنه كرة كما في شكل (١ – ٢٤).



شكل (١ – ٢٤)

$$\text{حجم الجسم الناتج من الدوران} = \int_{-\text{ن}}^{\text{ن}} \pi\, \text{ص}^2\, \text{وس}$$

$$= \int_{-\text{ن}}^{\text{ن}} \pi\, (\text{ن}^2 - \text{س}^2)\, \text{وس}$$

$$= \pi \left[\text{ن}^2\, \text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-\text{ن}}^{\text{ن}}$$

$$= \pi \left(\left[\text{ن}^3 - \frac{1}{3}\text{ن}^3\right] - \left[-\text{ن}^3 + \frac{1}{3}\text{ن}^3\right]\right)$$

$$= \pi \left(\left(\frac{2\text{ن}^3}{3}\right) - \left(-\frac{2\text{ن}^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi\, \text{ن}^3$$

ثانياً: حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنيين والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني

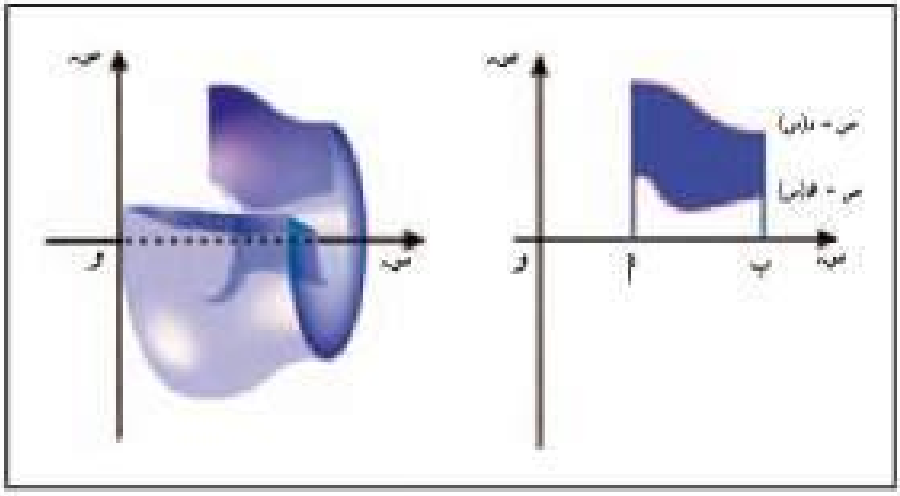
إذا اعتبرنا المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) ومنحنى الدالة: ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب وكانت د(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠

كما في شكل (١ - ٢٥) فإن حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة بأكملها حول المحور السيني يعطى بالقانون التالي:

قانون

حجم الجسم الناتج من الدوران = $\pi \int_{أ}^{ب} \left[\left(د(س)\right)^{٢} - \left(هـ(س)\right)^{٢} \right] ءس$

حيث د(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)



شكل (١-٢٥)

مثال ٤

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة:

ص = ٥س ، ومنحنى الدلة: ص = س^{٢}

والمستقيمين: س = ٠ ، س = ٣ حول محور السينات.

الحل

∀ س ∈ (٠ ، ٣)

فإن ٥ ≥ س ≥ ٠

$\therefore$ ٥س $\geqslant$ س^{٢} $\geqslant$ ٠ $\qquad \forall$ س $\in$ (٠ ، ٣)

$\therefore$ الحجم = $\int_{٠}^{٣} \pi \left[(٥س)^{٢} - (س^{٢})^{٢} \right]$ ءس

= $\pi \int_{٠}^{٣} (٢٥س^{٢} - س^{٤})$ ءس

= $\pi \left[\frac{٢٥}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{٠}^{٣}$

= $\pi \left(٢٢٥ - \frac{٢٤٣}{٥} \right) = \frac{٨٨٢}{٥} \pi$ وحدة مكعبة.

مثال ٥

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين

ص = س^{٢} ، ص = $\sqrt{س}$ حول المحور السيني.

الحل

ص = س^{٢} ، ص = $\sqrt{س}$

$\therefore$ س^{٢} = $\sqrt{س}$ ..... (١)

بتربيع الطرفين س^{٤} = س

$\therefore$ س (س^{٣} − ١) = ٠

$\Leftarrow$ س = ٠ أو س = ١

(لاحظ أن قيمتي س تحقق (١))

$\therefore$ نقطتا تقاطع المنحنيين هما (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

$\because$ $\sqrt{س} \geqslant$ س^{٢} $\geqslant$ ٠ لجميع قيم س في الفترة [٠ ، ١]

$\therefore$ الحجم = $\int_{٠}^{١} \pi \left[(\sqrt{س})^{٢} - (س^{٢})^{٢} \right]$ ءس

= $\pi \int_{٠}^{١} (س - س^{٤})$ ءس

= $\pi \left[\frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{٠}^{١}$

= $\pi \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٥} \right) = \frac{٣}{١٠} \pi$ وحدة مكعبة.

تمارين

١ – ٥

● في التمارين من ١ – ١٠ ارسم المنطقة المحددة بمنحنيات المعادلات المعطاة وأوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة حول المحور السيني.

١ ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} ، س = ٤ ، ص = ٠

٢ ص = $\frac{١}{س}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

٣ ص = س^{٣} ، س = ٢ ، ص = ٠

٤ ص = ٤س^{٢} ، ص = ٤س

٥ س – ٢ص = ٠ ، ص^{٢} – ٢س = ٠

٦ ص = –س^{٣} ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

٧ ص = س + ١ ، ص = س – ١ ، س = ١ ، س = ٤

٨ ص = ٤س – س^{٢} ، ص = س

٩ ص = ١ – س^{٢} ، س + ص = ١

١٠ ص = س^{٢} ، ص = س

● في التمارين من ١١ – ١٢ استخدم التكامل المحدد لاستنتاج الصيغ التي تعطي حجوم المجسمات التالية:

١١ أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ن وارتفاعها ع.

١٢ مخروط دائري قائم ارتفاعه ع وطول نصف قطر قاعدته ن.

١-٦ تطبيقات أخرى على التكامل

Another Applications on The Integral

في هذا البند سوف نعرض بعض التطبيقات المتنوعة على التكامل.

مثال ١

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ت عند أي نقطة عليه (س ، ص) فإنه يعطى بالعلاقة:

ت′(س) = ٣س^{٢} − ٦س − ٩

وإذا كان للمنحنى قيمة عظمى محلية تساوي ١٠ فأوجد

أ معادلة منحنى الدالة ت.

ب القيمة الصغرى المحلية إن وجدت.

جـ $\int_{٠}^{١}$ ت(س) ءس

الحل

أ ت(س) = $\int$ (٣س^{٢} − ٦س − ٩) ءس

ت(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ث

ولإيجاد قيمة الثابت

∵ ت′(س) = ٣ (س^{٢} − ٢س − ٣)

= ٣ (س − ٣) (س + ١)

ت′(س) = ٠ عند س = ٣ أو س = −١

س	−∞	−١	٣	+∞
إشارة ت′(س)	+ +	− −	+ +
ت(س)	↗	↘	↗

من الجدول يتضح أنه توجد قيمة عظمى محلية هي ت(−١).

∵ ت(−١) = ١٠ ،

ت(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ث

$\therefore \quad ١٠ = (-١)^{٣} - ٣(-١)^{٢} - ٩(-١) + ث$

$\therefore \quad ث = ٥$

$\therefore$ معادلة المنحنى هي:

$ت(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥$

ب من الجدول يتضح أن القيمة الصغرى المحلية عند س = ٣

$\therefore \quad ت(٣) = (٣)^{٣} - ٣(٣)^{٢} - ٩(٣) + ٥$

$= ٢٧ - ٢٧ - ٢٧ + ٥$

$= -٢٢$

جـ $\int_{٠}^{١} ت(س)\, ءس = \int_{٠}^{١} (س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س - ٥)\, ءس$

$= \left[\frac{س^{٤}}{٤} - س^{٣} - \frac{٩}{٢} س^{٢} + ٥س \right]_{٠}^{١}$

$= \left[\frac{١}{٤} - ١ - \frac{٩}{٢} + ٥ - ٠ \right]$

$= -\frac{١}{٤}$

مثال ٢

إذا كان الميل العمودي لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي $\sqrt{٥ - ٤س}$ فأوجد:

أ معادلة المنحنى إذا كان يمر بالنقطة (-٥ ، ٣)

ب $\int_{-١}^{١} د'(س)\, ءس$

الحل

أ ميل العمودي $= \frac{-١}{د'(س)}$ حيث $د'(س) \neq ٠$

$\therefore \quad \frac{-١}{د'(س)} = \sqrt{٥ - ٤س}$

$$\therefore \quad د'(س) = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٤س}}$$

معادلة المنحنى هي $د(س) = \int د'(س)\, ءس$

$$= \int \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٤س}}\, ءس$$

$$= \frac{١}{٤} \int -٤ (٥ - ٤س)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= \frac{١}{٤} \left[\frac{(٥ - ٤س)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث \right]$$

$$\therefore \quad د(س) = \frac{١}{٢} \sqrt{٥ - ٤س} + \frac{١}{٤} ث$$

ولتعيين قيمة ث.

$$\because \quad د(-٥) = ٣$$

$$٣ = \frac{١}{٢} \sqrt{٥ - ٤(-٥)} + \frac{١}{٤} ث$$

$$٦ = ٥ + \frac{١}{٢} ث$$

$$\therefore \quad ث = ٢$$

$$\therefore \quad د(س) = \frac{١}{٢} \sqrt{٥ - ٤س} + \frac{١}{٢}$$

$$د(س) = \frac{١}{٢} (١ + \sqrt{٥ - ٤س})$$

ب $\int_{-١}^{١} د'(س)\, ءس = \left[\frac{١}{٢} (١ + \sqrt{٥ - ٤س}) \right]_{-١}^{١}$ لماذا؟

$$= \frac{١}{٢} [(١ + ١) - (١ + ٣)]$$

$$= \frac{١}{٢} [-٢]$$

$$= -١$$

تدريب (١):

في مثال (٢) السابق:

أوجد $\int_{-١}^{١}$ د(س) ءس

مثال ٣

تقوم مجموعة من العمال بعمل حفرة من الرمال فإذا كان معدل حجم الرمال المرفوعة بالمتر المكعب في الساعة يعطي بالعلاقة $\frac{ءح}{ءن} = ١٢ - \frac{ن}{٣}$.

فاحسب حجم الرمال المرفوعة خلال ثلاث الساعات الأولى من بدء العمل.

الحل

$$\frac{ءح}{ءن} = ١٢ - \frac{ن}{٣}$$

$$\therefore ح = \int_{٠}^{٣} \frac{ءح}{ءن} ءن$$

$$= \int_{٠}^{٣} \left(١٢ - \frac{ن}{٣}\right) ءن$$

$$= \left[١٢ن - \frac{ن^٢}{٦}\right]_{٠}^{٣}$$

$$= \left(١٢ن - \frac{ن^٢}{٦}\right)_{ن=٣} - \left(١٢ن - \frac{ن^٢}{٦}\right)_{ن=٠}$$

$$= \left(٣٦ - \frac{٣}{٢}\right) - (٠)$$

$= ٣٤\frac{١}{٢}$ متر مكعب.

تمارين

١ - ٦

١ إذا كان ص = د(س) ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س - ٣) (٧ - س) وكان لمنحنى الدالة قيمة عظمى محلية تساوي $\frac{٤٧}{٣}$. فأوجد معادلة المنحنى، وأوجد أيضاً القيم الصغرى المحلية إن وجدت.

٢ إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = د(س) عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ فأوجد معادلة هذا المنحنى إذا علمت أنه يمر بالنقطة (١ ، ٢).

٣ إذا كان $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ = أس + ب وكان لمنحنى الدالة: ص = د(س) قيمة صغرى محلية تساوي (-١) عند س = صفر، وله نقطة انعطاف عند النقطة (١ ، ١) فأوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب وعين الدالة: ص = د(س).

٤ إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (س ، ص) عليه يساوي س^٢ - ٢س - ٣ ، وكان للمنحنى قيمة صغرى محلية تساوي (-٥) فعيّن معادلة المنحنى بالصورة ص = د(س)، وأوجد القيم العظمى المحلية لمنحنى الدالة د إن وجدت.

٥ إذا كان ميل منحنى يعطى بالعلاقة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س^٣ - ٢س + ٥ فأوجد معادلة المنحنى بالصورة ص = د(س) علماً بأن النقطة (٠ ، -٣) ∈ د.

٦ في تجربة ما، كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز (مقدراً بالمتر المكعب) بالنسبة للضغط ضـ الواقع عليها (مقدراً بالنيوتن/ متر مربع) هو $\frac{\text{ءح}}{\text{ءضـ}}$ = $\frac{-\text{أ}}{\text{ضـ}^٢}$ حيث أ ثابت.

وكان ح = ١٥ متراً مكعباً عندما ضـ = ٢ نيوتن/ متر مربع

وكان ح = ١٠ متراً مكعباً عندما ضـ = ١ نيوتن/ متر مربع

فأوجد العلاقة بين الحجم والضغط.

١ – ٧ ملخص وتمارين عامة Summary and General Exercises

١ يقال إن ق دالة مقابلة للدالة د في فترة ما ف إذا كانت ق′(س) = د(س) ∀ س ∈ ف

٢ إذا كانت ق دالة مقابلة للدالة د في فترة ما فإنه في نفس الفترة تكون:
ق(س) + ث حيث ث ثابت، هي الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د

٣ إذا كانت د(س) = ٠ ∀ س ∈ ف فإن الدالة: ق(س) = حـ ، حيث حـ ثابت هي الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د في الفترة ف.

٤ إذا كانت كل من د ، هـ دالة مقابلة للدالة ق في الفترة ف ، فإن:
د(س) = هـ(س) + ث حيث ث ثابت ∀ س ∈ ف

٥ إذا كانت د′(س) = هـ′(س) ∀ س ∈ ف فإن:
د(س) = هـ(س) + ث ∀ س ∈ ف

٦ ∫ د(س) ءس = ق(س) + ث، حيث ق′(س) = د(س) ، ث ثابت، تعبر عن الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة د في فترة ما ف

٧ ∫ د(س) ءس يسمى التكامل غير المحدد للدالة د حيث:
∫ رمز التكامل، د(س) الدالة المراد تكاملها أو «المكامل»، ث ثابت التكامل،

٨ عملية إيجاد ق(س) + حـ المذكورة سابقاً والتي تحقق:
∫ د(س) ءس = ق(س) + ث
هي عملية إيجاد ناتج التكامل، أو تكامل د(س) بالنسبة إلى س .

٩ وصف التكامل ∫ د(س) ءس بأنه تكامل غير محدد ناتج من أن ∫ د(س) ءس يمثل الصورة العامة للدوال المقابلة وليس دالة محددة بعينها.

١٠ عملية إيجاد التكامل غير المحدد لدالة ما هي إلا إيجاد الصورة العامة للدوال المقابلة.

١١ ∫ س^ر ءس = $\frac{\text{س}^{\text{ر}+١}}{\text{ر}+١}$ + ث حيث ث ثابت ، ر ≠ −١ ، ر عدد نسبي.

١٢ ∫ [د(س)]^ر د′(س) ءس = $\frac{[\text{د(س)}]^{\text{ر}+١}}{\text{ر}+١}$ + ث ، حيث ث ثابت، ر عدد نسبي ، ر ≠ −١.

١٣ إذا كان لكل من د ، هـ دالة مقابلة في فترة ما ف فإن:

i $\int$ م د(س) ءس = م $\int$ د(س) ءس : م ثابت $\neq$ ٠

ii $\int$ [د(س) ± هـ(س)] ءس = $\int$ د(س) ءس ± $\int$ هـ(س) ءس

١٤ التكامل المحدد:

لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب]، ولتكن ق هي إحدى دوالها المقابلة.

التكامل المحدد للدالة د على الفترة [أ ، ب] ونرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس هو العدد الحقيقي ق(ب) − ق(أ) أي أن:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \Big[ق(س)\Big]_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ).$$

١٥ التعبير الرمزي $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس يقرأ «التكامل المحدد للدالة د بالنسبة إلى س من س = أ إلى س = ب».

١٦ إذا كان التكامل المحدد للدالة د من أ إلى ب موجوداً فإنه يقال إن الدالة د قابلة للتكامل في [أ ، ب]

١٧ قيمة التكامل المحدد عدد حقيقي لا يتعلق بالرمز س ولذلك:

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \int_{أ}^{ب} د(ص)\ ءص = \int_{أ}^{ب} د(ع)\ ءع = \cdots$$

١٨ لتكن د دالة متصلة على [أ ، ب]

إذا كانت الدالة ت معرفة كالتالي:

ت(س) = $\int_{أ}^{ب}$ د(ن) ءن $\qquad \forall$ س $\in$ [أ ، ب]

فإن ت دالة مقابلة للدالة د في [أ ، ب].

١٩ لتكن د دالة قابلة للتكامل في الفترة [أ ، ب].

أ إذا كانت د(س) $\geq$ ٠ لكل قيم س $\in$ [أ ، ب] فإن م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة.

م = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ءس.

ب إذا كانت د(س) ≥ ٠

لكل قيم س ∈ [أ ، ب] فإن م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة:

$$م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$$

٢٠ إذا كانت كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب] فإن

أ $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\ ءس$.

ب $\int_{أ}^{أ} د(س)\ ءس = ٠$

حـ $\int_{أ}^{ب} ك\ د(س)\ ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$ حيث ك ∈ ح .

د $\int_{أ}^{ب} [د(س) \pm هـ(س)]\ ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$

هـ إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب] ،

وكانت د(س) ≥ ٠ ∀ س ∈ [أ ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \geq ٠$

و إذا كانت كل من د ، هـ دالة متصلة على [أ ، ب]

وكانت د(س) ≤ هـ(س) ∀ س ∈ [أ ، ب] فإن

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$.

٢١ إذا كانت د دالة متصلة على فترة ما ف وكان أ ، حـ ، ب ∈ ف.

فإن $\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \int_{أ}^{حـ} د(س)\ ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\ ءس$

٢٢ $\int_{أ}^{ب} س^{ن}\ ءس = \left[\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}\right]_{أ}^{ب}$: ن ≠ −١ ، ن عدد نسبي

$\int_{أ}^{ب} [د(س)]^{ن}\ د'(س)\ ءس = \left[\frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن + ١}\right]_{أ}^{ب}$: ن ≠ −١ ، ن عدد نسبي

٢٣ مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

هي $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس$

٢٤ لتكن د ، هـ دالتين متصلتين على [أ ، ب] ، د(س) ≥ هـ(س)

∀ س ∈ [أ ، ب]، فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) ومنحنى الدالة ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - هـ(س)] \, ءس.$$

٢٥ مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) ، ومنحنى الدالة: ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} |د(س) - هـ(س)| \, ءس$$

علماً بأن $|د(س) - هـ(س)| = \begin{cases} د(س) - هـ(س) & \text{عندما } د(س) \geq هـ(س) \\ هـ(س) - د(س) & \text{عندما } هـ(س) \geq د(س) \end{cases}$.

٢٦ حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة: ص = د(س) والمحور السيني والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني هو:

$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \, [د(س)]^{٢} \, ءس$$

٢٧ حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران منقطة محددة بالمنحنيين ص = د(س) ، ص = هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب حول المحور السيني هو:

$$ح = \int_{أ}^{ب} \pi \, [(د(س))^{٢} - (هـ(س))^{٢}] \, ءس$$

حيث د(س) ≥ هـ(س) ≥ ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

تمارين عامة

١ - ٧

➤ بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يأتي:**

١ إذا كانت د متصلة على الفترة [١ ، ٥] فإن:

$$\int_{١}^{٥} د(س)\ ءس + \int_{٥}^{١} د(س)\ ءس = ٠$$

٢ إذا كانت ق متصلة على الفترة [١ ، ٤] فإن:

$$\int_{١}^{٣} ق(س)\ ءس - \int_{٤}^{٣} (س)\ ءس = ٠$$

٣ إذا كانت د متصلة على [٢ ، ٩] فإن:

$$\int_{٢}^{٥} د(س)\ ءس - \int_{٥}^{٩} د(س)\ ءس = \int_{٢}^{٩} د(س)\ ءس$$

٤ إذا كانت ق دالة متصلة على [١ ، ٤] فإن:

$$\int_{١}^{٣} ق(س)\ ءس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\ ءس - \int_{٤}^{١} ق(س)\ ءس = ٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس$$

٥ بفرض أن د متصلة على الفترة [٢ ، ٩] يكون:

$$\int_{٢}^{٩} د(س)\ ءس + \int_{٩}^{٤} د(س)\ ءس = ٢ \int_{٢}^{٤} د(س)\ ءس$$

• **ثانياً: لكل بند مما يلي أربعة خيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إحدى الدوال المقابلة للدالة: د(س) = س (س^{٢} + ١) هي الدالة: ق(س) =

(أ) (س^{٢} + ١)^{٢} (ب) $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} + ١)^{٢}

(ج) $\frac{١}{٤}$ (س^{٢} + ١)^{٢} (د) ٣س^{٢} + ١

٢ إحدى الدوال المقابلة للدالة: د(س) = -٢ (٢س - ١)$^{-٢}$ هي الدالة: ق(س) =

(أ) $\frac{١}{٢س - ١}$ (ب) -٨ (٢س - ١)$^{-٣}$

(ج) $\frac{-٤}{(٢س - ١)^{٢}}$ (د) $\frac{-٢}{٢س - ١}$

٣ إذا كانت الدالة: د(س) = س^{٢} + س دالة مقابلة للدالة ق فإنه:

$\int_{-١}^{٣}$ ق(س) ءس =

(أ) ١٢ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) ١٣ $\frac{١}{٣}$

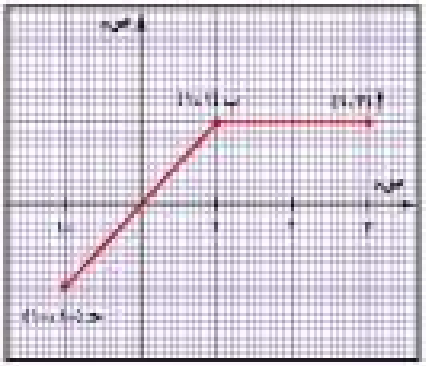
٤ إحدى الدوال المقابلة للدالة: د(س) = $\frac{٣}{(س - ١)^{٢}}$ هي الدالة: ق(س) =

(أ) $\frac{٣}{س - ١}$ (ب) $\frac{س - ٤}{س - ١}$

(ج) $\frac{١}{(س + ١)^{٢}}$ (د) $\frac{٦}{(س - ١)^{٢}}$

٥ إذا كان بيان الدالة د يمثله $\overline{أب} \cup \overline{بج}$ كما هو موضح بالشكل وكانت م مساحة المنطقة المحددة ببيان الدالة د ومحور السينات،

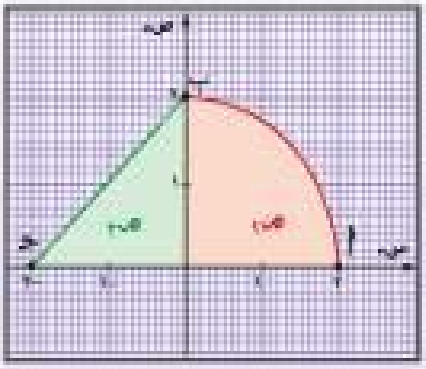
والمستقيمين س = -١ ، س = ٣ مقدرة بالوحدات المربعة هي:



(أ) ٣ (ب) ٤

(ج) ٢ (د) ٥

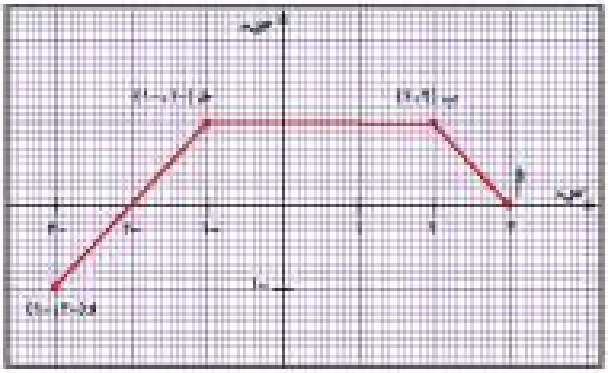
٦ إذا كانت المنطقة المظللة م = م$_{١}$ ∪ م$_{٢}$ حيث: م$_{١}$ منطقة ربع دائرية ، م$_{٢}$ منطقة مثلثة و ب جـ كما هو موضح بالشكل فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوي



(أ) $\frac{٤٠}{٣}$ π (ب) ٤ + ٢π

(ج) $\frac{١٦}{٣}$ π (د) ٨π

٧ إذا كان بيان الدالة د يمثله $\overline{\text{أب}} \cup \overline{\text{ب جـ}} \cup \overline{\text{جـ د}}$ فإن $\int_{-٣}^{٣}$ د(س) ءس =



(أ) $\frac{٨}{٢}$ (ب) $\frac{٧}{٢}$

(جـ) ٤ (ء) $\frac{٩}{٢}$

٨ لتكن د : [١ ، ٤] ← ح دالة متصلة

وكانت ق(س) = $\int_{١}^{س}$ د(ع) ءع

= ٢س^{٢} − ٣س + ك حيث ك ثابت فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤ (مقدرة بالوحدات المربعة) تساوي:

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) ٤٣ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢٨ (ء) ٢١

٩ إذا كان ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة د يساوي $\sqrt{س}$ (س − ١) وكان منحنى الدالة د يمر بالنقطة (٠ ، ٠) فإن د(١) يساوي:

(أ) صفر (ب) $\frac{-٤}{١٥}$ (جـ) $\frac{٤}{١٥}$ (ء) $\frac{١٥}{٤}$

١٠ إذا كانت كل من ق ، د دالة متصلة على [١ ، ٢]

وكان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) ءس = ٣ ، $\int_{٢}^{١}$ د(س) ءس = ٢

فإن $\int_{١}^{٢}$ (٢ ق(س) − د(س) + ١) ءس =

(أ) ٩ (ب) ٧ (جـ) ٥ (ء) ٣

١١ إذا كان ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة د يساوي ٢س + ٧ وكان د(−١) = ٠ فإن د(−٢) يساوي

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (ء) −٤

١٢ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة ببيان الدالة: د(س) = س^{٣} في الفترة [−١ ، ١] حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوي

(أ) $\frac{٢\pi}{٧}$ (ب) $\frac{\pi}{٧}$ (جـ) $\frac{٢}{٧\pi}$ (ء) $\frac{٧}{\pi}$

١٣ حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة ببيان الدالة: د(س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ و ص = ٠ والمستقيمين س = -١ ، س = ١ مقدراً بالوحدات المكعبة يساوي

(أ) π (ب) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ج) ٢π (د) $\frac{٥\pi}{٢}$

١٤ مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٩ - \text{س}^٢}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوي

(أ) $٤\frac{١}{٢}\pi$ (ب) ٣π (ج) ٦π (د) ٩π

١٥ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة عليه يساوي $\sqrt[٣]{\text{س}^٢ - ١}$ وكان (٠ ، ٠) ∈ د فإن د($\sqrt{٢}$) يساوي

(أ) -١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) ١ (د) ليس أياً مما سبق

١٦ إذا كان ق(س) = $\int_{١}^{\text{س}}$ د(ع) ءع = $\text{س}^٢$ - ٥س + ك حيث ك ثابت فإن ك =

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٤ (د) -٤

أسئلة مقالية:

● **أولاً: أوجد التكاملات الآتية:**

١ $\int \frac{\text{س}^٢}{(\text{س}^٣ + ١)^٢}$ ءس

٢ $\int_{٠}^{٢} (\text{س} - ١)(٢\text{س} - ٣)$ ءس

٣ $\int ٥\text{س}^٤ (\text{س}^٥ - ٣)$ ءس

٤ $\int \text{س}^٢ (\text{س}^٣ - ٣\text{س} + ١)$ ءس

٥ $\int (٢\text{س} - ١)^٦$ ءس

٦ $\int_{٠}^{٢} (\text{س}^٢ - ٣)^٢$ ءس

٧ $\int \text{س} (١ + ٣\text{س}^٢)^٥$ ءس

٨ $\int \frac{\text{س ءس}}{(\text{س}^٢ + ١)^٣}$

٩ $\int \frac{٣\text{س ءس}}{(\text{س}^٢ + ٢)^٢}$

● ثانياً: أجب عما يلي:

١ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة: ص = د(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢س (س − ١) فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٠).

٢ اشتركت متسابقتان لمدة أربع دقائق في الكتابة على الحاسوب فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى بالعلاقة $\frac{\text{ءك}}{\text{ءن}}$ = ٩٠ + ١٢ن − ٦ن^{٢} كلمة لكل دقيقة حيث ك عدد الكلمات التي تكتبها في زمن قدره ن دقيقة وسرعة المتسابقة الثانية تعطى بالعلاقة $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ = ٨٥ + ١٥ن − ٦ن^{٢} كلمة لكل دقيقة حيث ل عدد الكلمات التي تكتبها خلال زمن ن دقيقة، أي المتسابقتين تكتب كلمات أكثر؟

● ثالثاً: أوجد المساحة المحددة:

١ بالمنحنى ص = س^{٢} والمستقيم ص = ٤

٢ بمنحنى الدالة: د(س) = ٩ − س^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = −١ ، س = ٢

٣ بالمنحنى ص = ٤ − س^{٢} والمستقيم ص = ٣س

٤ بالمنحنيين ص = س^{٢} − ٣س − ٤ ، ص = ٢ (س + ١)

٥ بالمنحنيين د(س) = ٥س − س^{٢} ، ق(س) = س^{٢} − ٣س

● رابعاً: أوجد حجم الجسم الناتج من دوران:

١ المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س (س − ٢) ومحور السينات حول المحور السيني.

٢ المنطقة المحددة بالمنحنى ص = (س − ١)^{٢} ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢ حول المحور السيني.

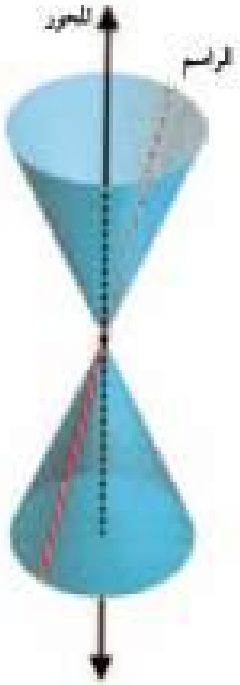
القطوع المخروطية

Conics Sections

الفصل الثاني

٢-١ القطع المخروطي

Conic Section



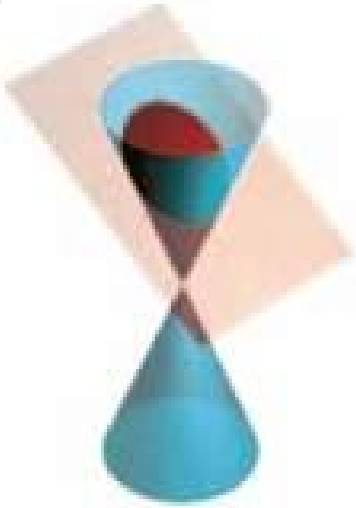
شكل ٢-١

القطوع المخروطية هي منحنيات تنتج من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة كالمبين في شكل (٢ - ١).

يختلف شكل المنحنى الناتج من تقاطع المستوي مع المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة باختلاف وضع هذا المستوي، فعندما يتغير من وضعه العمودي على المحور م إلى وضعه الموازي له تنتج القطوع المخروطية.

وسنعتبر الحالات الأربع الآتية:

شكل ٢-٢



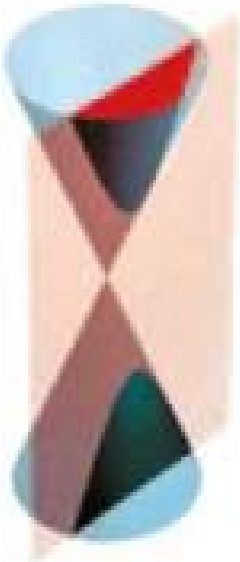
شكل ٢-٣

١ إذا كان المستوي عمودياً على محور المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة، فإن المنحنى الناتج يكون «دائرة» انظر شكل (٢ - ٢) وإذا كان المستوي ليس عمودياً على محور المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة، وليس موازياً لراسم فيه، فإن المنحنى الناتج يسمى «قطعاً ناقصاً». انظر شكل (٢ - ٣).

٢ إذا كان المستوي موازياً لراسم واحد فقط في المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة ولا يحويه، فإن المنحنى الناتج يسمى «قطعاً مكافئاً» انظر شكل (٢ – ٤).

٣ إذا كان المستوي موازياً لمحور المخروط الدائري القائم ثنائي القاعدة ولا يحويه فإن المنحنى الناتج يسمى «قطعاً زائداً» – انظر شكل (٢ – ٥).

شكل ٢-٤



شكل ٢-٥

وهكذا، توجد ثلاثة أنواع من القطوع المخروطية، وهي:

القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد. وقد سبقت دراسة الدائرة وهي حالة خاصة من حالات القطع الناقص، وسنقوم فيما يلي بدراسة هذه القطوع المخروطية.

٢-٢ القطع المكافئ

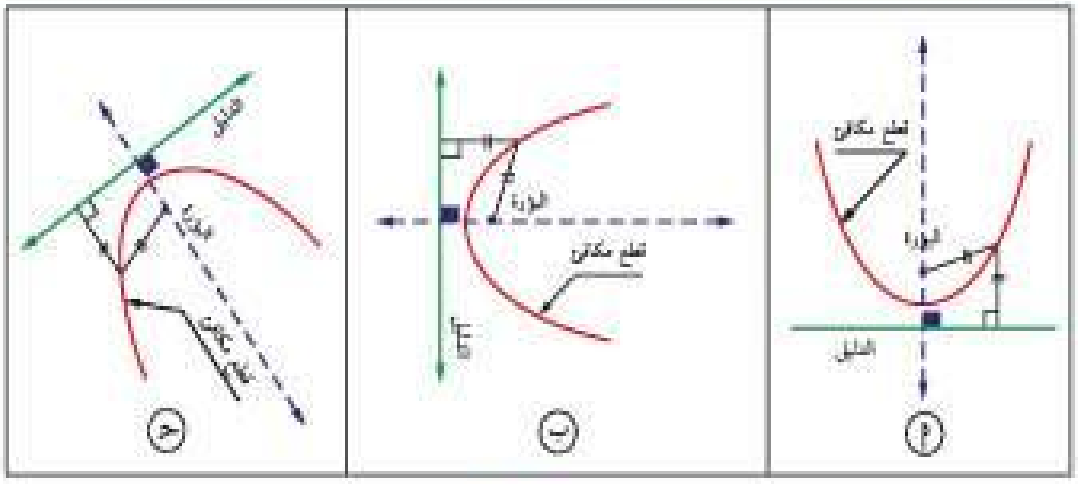
Parabola Section

سبق أن ذكرنا أنه عند قطع مستوي لمخروط دائري قائم ثنائي القاعدة وعندما يكون هذا المستوي موازياً لراسم واحد فقط منه وهذا المستوي لا يحوي الراسم ينتج منحنى يسمى قطعاً مكافئاً. فما هو هذا القطع المكافئ وما هي خصائصه؟

هذا ما سندرسه في هذا البند.

تعريف ١

١ القطع المكافئ هو مجموعة نقاط المستوي التي يتساوى بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (البؤرة) Focus في المستوي مع بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) Directrix في المستوي (لا يحتوي النقطة).



شكل ٢-٦

تعريف ٢

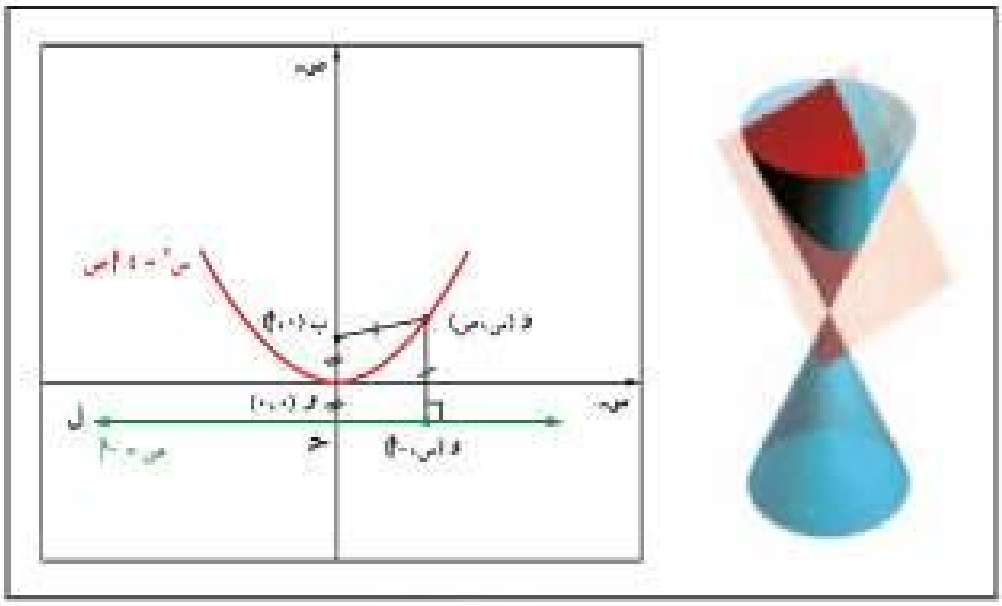
محور القطع المكافئ هو المستقيم المار بالبؤرة Focus والعمودي على الدليل Directrix.

تعريف ٣

رأس القطع المكافئ: هو نقطة تقاطع محور القطع المكافئ مع المنحنى.

ملاحظة: القطع المكافئ يكون متناظراً دائماً حول محوره.

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه Vertex نقطة الأصل



شكل (٢-٧)

في شكل (٢ – ٧):

قطع مكافئ، رأسه نقطة الأصل، وبؤرته تنتمي إلى محور الصادات، ولتكن ب (٠ ، أ) : أ > ٠

لاحظ أنه في هذه الحالة يكون الدليل موازياً لمحور السينات وفتحة المنحنى إلى أعلى.

حسب تعريف القطع المكافئ: و ب = و ح = أ

∴ معادلة الدليل هي: ص = -أ

إذا كانت م (س ، ص) تنتمي إلى القطع المكافئ، فإن:

م ب = م ء حيث $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ ل ، ل هو دليل القطع، وتكون ء هي النقطة (س ، -أ)

∵ م ء = |ص + أ| ، م ب = $\sqrt{\text{س}^2 + (\text{ص} - \text{أ})^2}$ ، ولكن $(\text{م ب})^2 = (\text{م ء})^2$

∴ $\text{س}^2 + (\text{ص} - \text{أ})^2 = (\text{ص} + \text{أ})^2$

∴ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{أ ص} + \text{أ}^2 = \text{ص}^2 + 2\text{أ ص} + \text{أ}^2$

معادلة

$$\text{س}^2 = 4\text{أ ص} \qquad (1)$$

وهي الصورة القياسية لمعادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل، وبؤرته تنتمي إلى الجزء الموجب للمحور الصادي، ودليله يوازي المحور السيني، ومحوره هو المحور الصادي.

ماذا لو كانت فتحة القطع المكافئ إلى أسفل؟

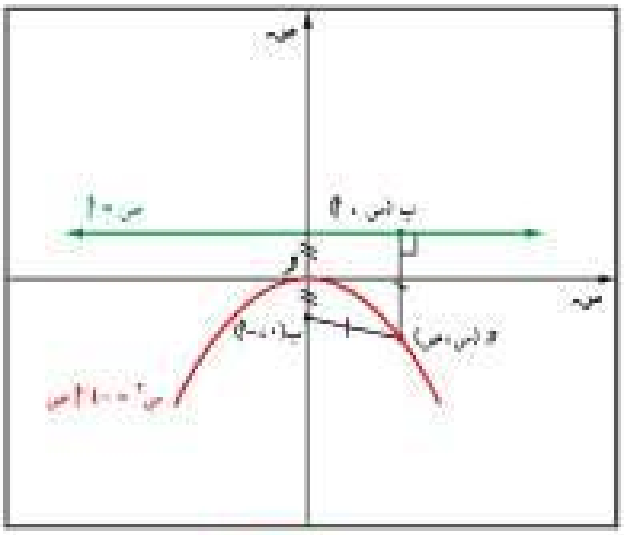
انظر شكل (٢ - ٨)

في هذه الحالة، ستكون:

البؤرة (٠ ، -أ) ، أ > ٠

ومعادلة الدليل: ص = أ

وبالأسلوب السابق نفسه يمكن الحصول على معادلة القطع المكافئ في هذه الحالة وهي:



شكل ٢-٨

معادلة

$$س^٢ = -٤ أ ص \qquad (٢)$$

كل من المعادلتين (١) ، (٢) تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متناظراً حول المحور الصادي، بؤرته تنتمي إلى المحور الصادي، ودليله يوازي المحور السيني، ولكن الأول منهما فتحته لأعلى، أما الثاني ففتحته لأسفل.

مثال ١

أوجد بؤرة ودليل القطع المكافئ س^٢ = ٨ ص ثم ارسمه.

الحل

معادلة القطع المكافئ هي: س^٢ = ٨ ص والمعادلة في الصورة القياسية هي:

س^٢ = ٤ أ ص

∴ ٤ أ = ٨ ⇐ أ = ٢

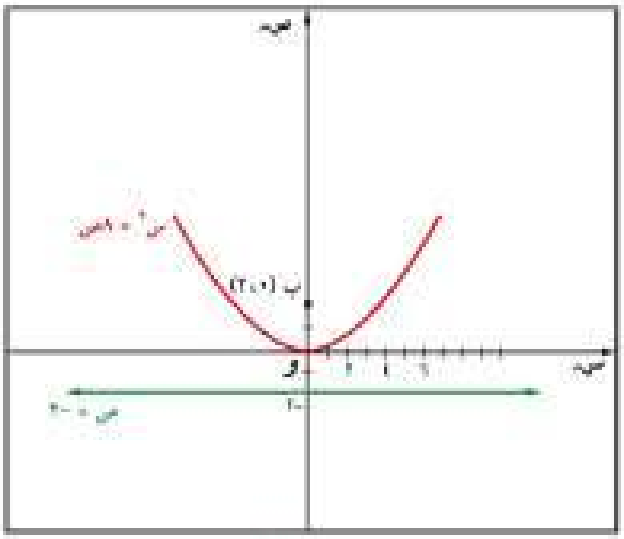
واضح أن القطع المعطى فتحته لأعلى.

∴ البؤرة هي (٠ ، ٢)

والدليل هو المستقيم:

ص = -٢

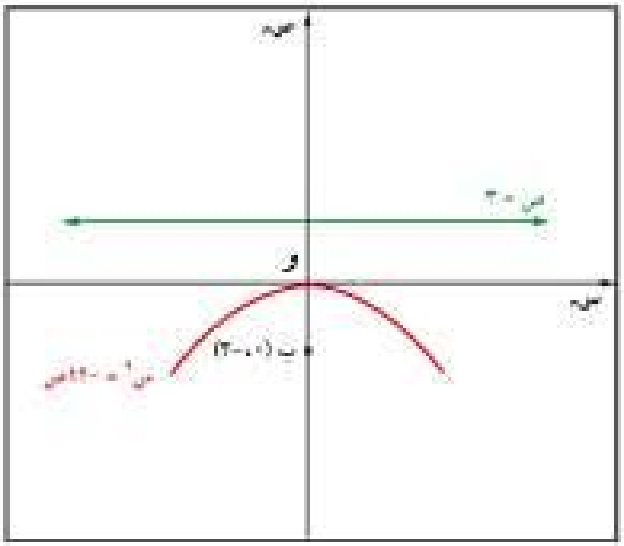
رسم القطع في شكل (٢ - ٩)



شكل ٢-٩

مثال ٢

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته هي (٠ ، -٣)، ودليله هو المستقيم ص = ٣ ثم ارسم تخطيطاً للقطع.



شكل ٢-١٠

الحل

البؤرة هي (٠ ، -٣)

والدليل هو المستقيم: ص = ٣

(٠ ، ٠) هي رأس القطع لماذا؟

∴ أ = ٣

والقطع فتحته لأسفل

∴ معادلته هي:

س² = -٤ أ ص أي: س² = -١٢ ص

هناك وضعان آخران للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل، فقد تكون فتحة القطع إلى اليمين، وحينئذ يكون متناظراً حول المحور السيني، وتكون البؤرة هي النقطة (أ ، ٠) ، أ > ٠ والدليل هو المستقيم: س = -أ.

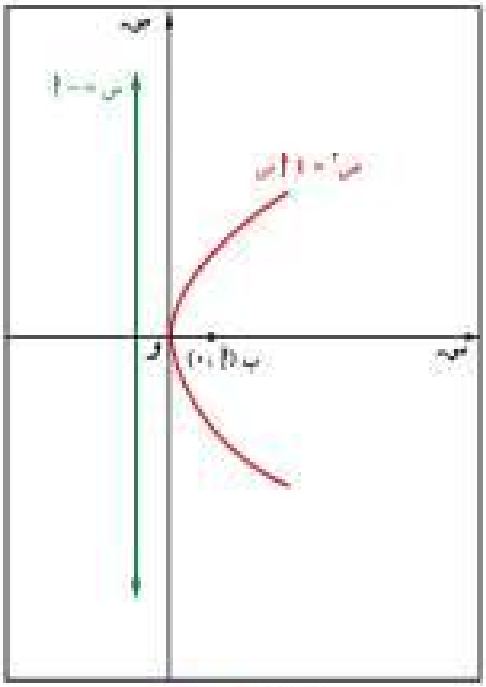
ويمكن استنتاج معادلة القطع المكافئ في هذا الوضع وهي:

معادلة

ص² = ٤ أ س (٣)

وهي صورة قياسية أخرى لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل.

انظر شكل (٢ - ١١).



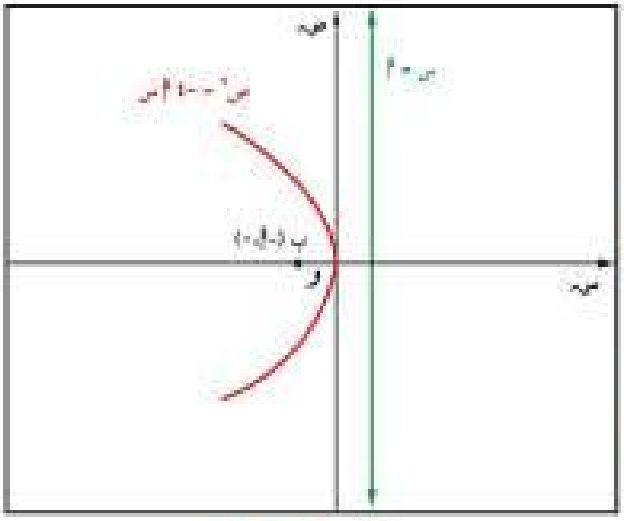
شكل ٢-١١

أما إذا كانت فتحة القطع المكافئ إلى اليسار، فإنه يكون متناظراً حول المحور السيني، وتكون بؤرته النقطة (-أ ، ٠) ، ودليله المستقيم: س = أ

وتأخذ معادلته الصورة:

معادلة

$$ص^٢ = -٤أس \qquad (٤)$$



شكل (٢-١٢)

انظر شكل (٢ - ١٢)

∴ كل من المعادلتين (٣) ، (٤) تمثل قطعاً مكافئاً رأسه نقطة الأصل، متناظراً حول المحور السيني، بؤرته تنتمي إلى المحور السيني، ودليله يوازي المحور الصادي، ولكن الأول منهما فتحته إلى اليمين والثاني فتحته إلى اليسار.

والجدول التالي يلخص الحالات الأربع السابقة:

القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل (أ عدد حقيقي موجب)				
الصورة القياسية للمعادلة	$س^٢ = ٤أص$	$س^٢ = -٤أص$	$ص^٢ = ٤أس$	$ص^٢ = -٤أس$
الفتحة	إلى أعلى	إلى أسفل	إلى اليمين	إلى اليسار
محور التناظر	محور الصادات	محور الصادات	محور السينات	محور السينات
البؤرة:	(٠ ، أ)	(٠ ، -أ)	(أ ، ٠)	(-أ ، ٠)
الدليل:	ص = -أ	ص = أ	س = -أ	س = أ

مثال ٣

أوجد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ:

$ص^٢ = -٧س$ ثم ارسم تخطيطاً للقطع.

الحل

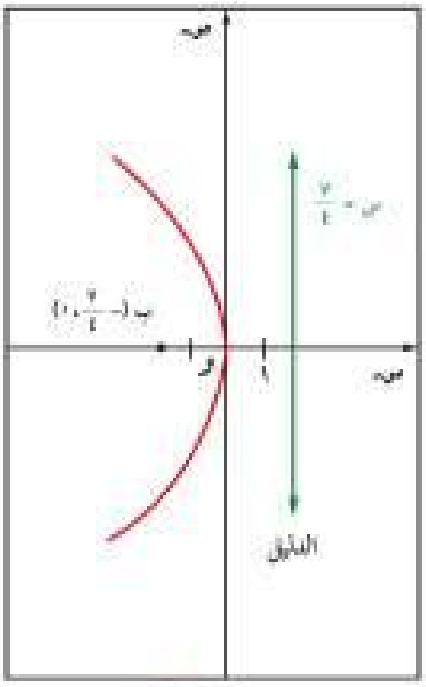
القطع المكافئ $ص^٢ = -٧س$ فتحته إلى اليسار،

∴ $-٤أ = -٧ \Leftarrow أ = +\frac{٧}{٤}$

∴ البؤرة هي $(-\frac{٧}{٤} ، ٠)$

ومعادلة الدليل هي: $س = \frac{٧}{٤}$

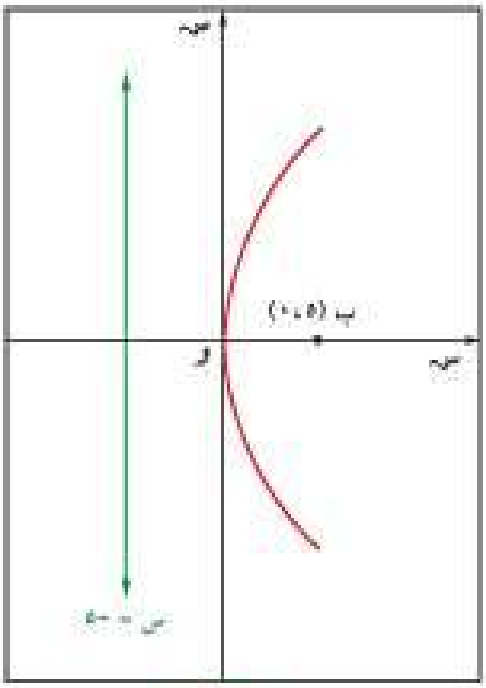
والرسم في شكل (٢ - ١٣)



شكل (٢-١٣)

مثال ٤

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٥ ، ٠) ومعادلة دليله هي س = −٥، ثم ارسم تخطيطاً للقطع.



شكل ٢-١٤

الحل

واضح أن القطع المكافئ فتحته إلى اليمين

∴ المعادلة المطلوبة على الصورة:

$ص^٢ = ٤ أ س$ لماذا؟

ولكن أ = ٥ لماذا؟

∴ المعادلة هي: $ص^٢ = ٤ \times ٥ س$ ، أي:

$ص^٢ = ٢٠ س$

رسم القطع في شكل (٢ − ١٤).

مثال ٥

جسر معلق ارتفاع كل من حامليه ٧٠ متراً والمسافة بينهما ٦٠٠ متراً وسلسلته على شكل قطع مكافئ، أدنى نقطة فيه على ارتفاع ١٠ أمتار عن الطريق (شكل (٢ − ١٥)). أوجد معادلة القطع المكافئ آخذاً محور الصادات منطبقاً على محوره ومتجهاً نحو الأعلى والعمودي عليه من رأس القطع محوراً للسينات. ثم أوجد طول القضيب الذي يحمل الجسر والواقع على بعد ٩٠ متراً من رأسه.

الحل

واضح من الشكل أن القطع المكافئ فتحته إلى أعلى

∴ معادلته: $س^٢ = ٤ أ ص$

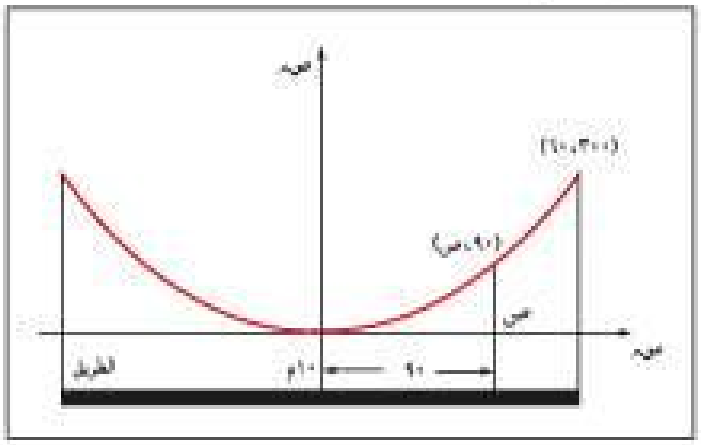
∵ النقطة (٣٠٠ ، ٦٠)

تنتمي إلى القطع

∴ $(٣٠٠)^٢ = ٤ أ \times ٦٠$

∴ $أ = \frac{٩٠٠٠٠}{٤ \times ٦٠}$

$أ = \frac{١٥٠٠}{٤}$



شكل ٢-١٥

∴ معادلة القطع هي:

$$س^٢ = ٤ \times \frac{١٥٠٠}{٤} ص$$

$$س^٢ = ١٥٠٠ ص$$

لنفرض الآن أن نقطة تقاطع القضيب المذكور مع السلسلة هي (٩٠ ، ص)

$$∴ (٩٠)^٢ = ١٥٠٠ ص$$

$$∴ ص = \frac{(٩٠)^٢}{١٥٠٠} = ٥,٤$$

وعليه فإن طول القضيب = ٥,٤ + ١٠ = ١٥,٤ متراً

مثال ٦

مصباح كشاف في باخرة على شكل قطع مكافئ دوراني (أي السطح الناشئ عن دوران قطع مكافئ حول محوره) فإذا كان قطر فتحة المصباح ٣٠سم وأكبر عمق له ٢٠سم، أوجد البعد البؤري للمصباح (أي بعد البؤرة عن الرأس).

الحل

نختار المحورين كما هو مبين بشكل (٢ – ١٦) بحيث نقطة الأصل تمثل رأس القطع وبؤرته تنتمي لمحور السينات وفتحته إلى اليمين.

فتكون معادلة القطع بهذا الوضع هي:

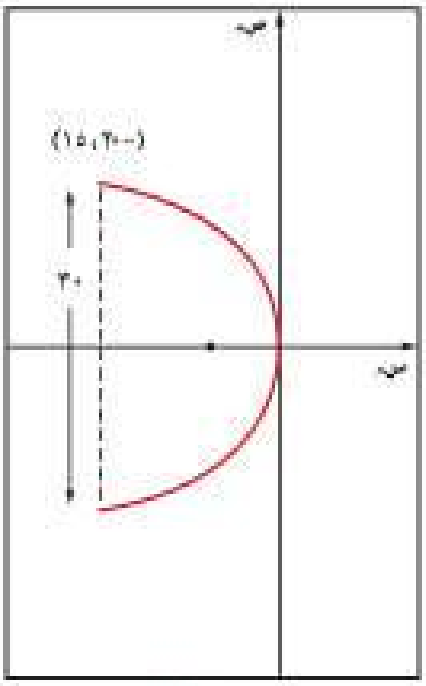
$$ص^٢ = -٤ أ س$$

∵ النقطة (–٢٠ ، ١٥) تنتمي إلى القطع المكافئ

$$∴ ٢٢٥ = -٤ أ \times (-٢٠)$$

$$أ = \frac{٢٢٥}{٤ \times ٢٠} = \frac{٤٥}{١٦}$$

$$∴ \text{البعد البؤري المطلوب} = \frac{٤٥}{١٦}$$

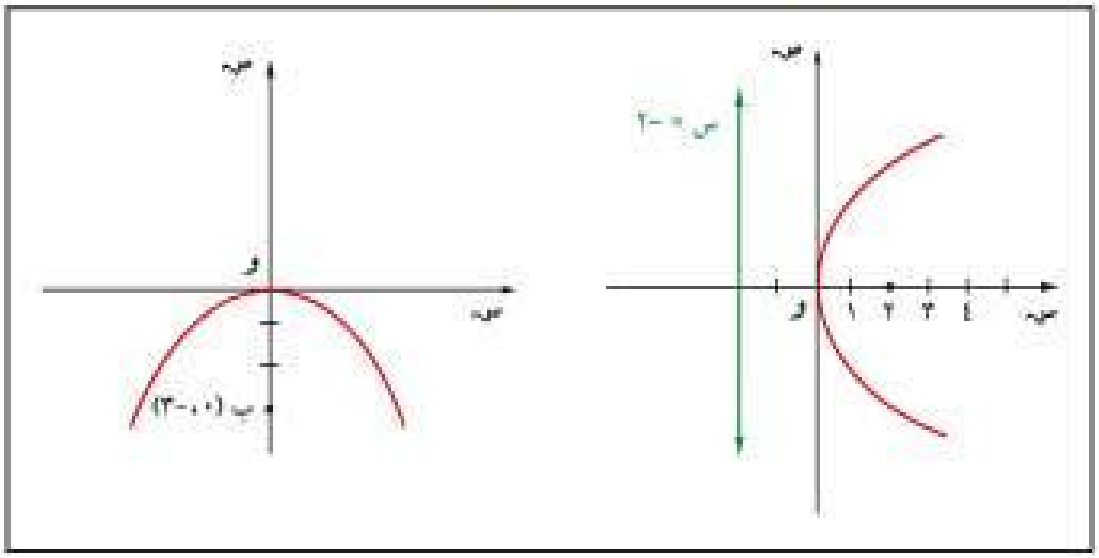


شكل ٢-١٦

تمارين

٢ - ٢

- **أولاً: اكتب معادلة القطع المكافئ الممثل في كل شكل من الأشكال الآتية:**



- **ثانياً: أجب عما يلي:**

١ أوجد البؤرة ومعادلة الدليل لكل قطع مكافئ فيما يلي:

أ $ص^٢ = ٨س$

ب $ص^٢ = -س$

جـ $س^٢ = ٤ص$

د $س^٢ + ٦ص = ٠$

٢ فيما يلي أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كان الرأس هو نقطة الأصل والبؤرة هي:

أ (٢ ، ٠)

ب (-٢ ، ٠)

جـ $(٠ ، \frac{١}{٢})$

د $(-\frac{١}{٢} ، ٠)$

٣ أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت البؤرة «ب» ومعادلة الدليل كما هو موضح:

أ ب (١٠ ، ٠) ، معادلة الدليل: س = −١٠

ب ب (−٤ ، ٠) ، معادلة الدليل: س = ٤

ج ب (٠ ، ٥) ، معادلة الدليل: ص = −٥

د ب (٠ ، −٣) ، معادلة الدليل: ص = ٣

٤ ارسم تخطيطاً للقطع المكافئ في كل مما يلي:

أ $ص = \frac{١}{٤} س^٢$

ب $ص = -٨س^٢$

ج $ص^٢ = س$

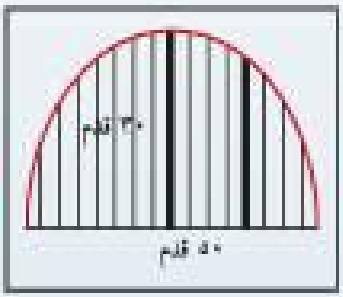
د $ص^٢ = -٣س$

٥ أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كان هو مجموعة جميع النقط التي كل منها على مسافات متساوية من النقطة (−٢ ، ٠) ومن المستقيم س = ٢.

٦ أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كان هو مجموعة جميع النقط التي كل منها على مسافات متساوية من النقطة (٠ ، ٣) ومن المستقيم ص = −٣.

٧ جسر معلق ارتفاع كل من حامليه ٩٠ متراً والمسافة بينهما ٤٠٠م وسلسلة الجسر على شكل قطع مكافئ محوره رأسي، وكانت السلسلة تمس الطريق عند منتصفه. أوجد ارتفاع سلسلة الجسر عن نقطة تقع على الطريق على بعد ٦٠م من منتصفه وكذلك على بعد ١٢٠م من منتصفه.

٨ بوابة على شكل قوس من قطع مكافئ كما بالشكل، فإذا كان ارتفاعها ٣٠ قدماً، وكان عرض قاعدتها ٥٠ قدماً، أوجد ارتفاع البوابة عن كل من النقطتين التي تبعد كل منهما عن منتصف القاعدة بمقدار ١٢ قدماً.



٩ منظار عاكس مقطع مرآته على شكل قطع مكافئ وقطر فوهته ١٤٠سم وأكبر عمق للمنظار ٢,٥سم أوجد بعده البؤري.

٢-٣ القطع الناقص

Ellipse Section

سبق أن ذكرنا أن المنحنى الذي ينتج من قطع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة بمستوي ليس عمودياً على محوره وليس موازياً لراسم فيه يسمى قطعاً ناقصاً فما هو هذا القطع الناقص؟ وما هي خصائصه؟

هذا ما سندرسه في هذا البند.

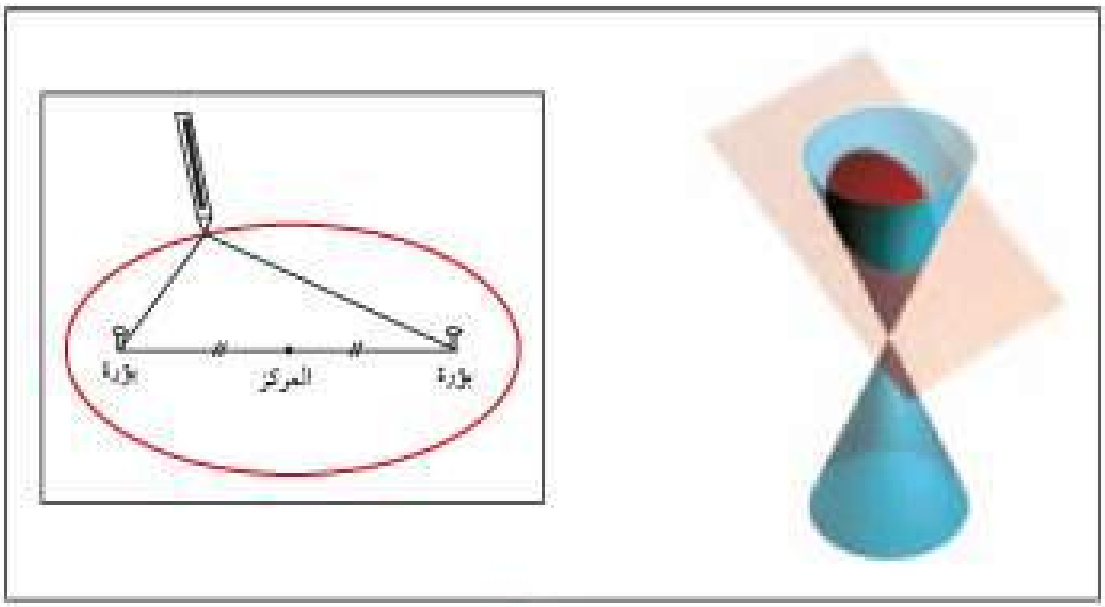
تعريف ٤

القطع الناقص هو مجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتاً.

تسمى النقطتان الثابتتان «بؤرتي القطع الناقص».

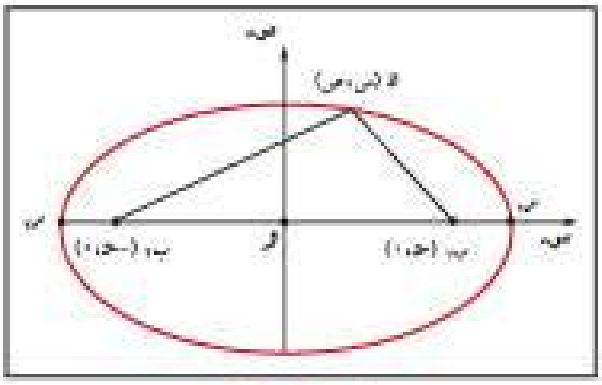
تعريف ٥

مركز القطع الناقص: هي النقطة التي تنصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين.



شكل ٢-١٧

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل:



شكل ٢-١٨

إذا اخترنا البؤرتين على محور السينات وعلى بعدين متساويين من نقطة الأصل و، وكانت $ب_1$(حـ ، ٠) ، $ب_2$(−حـ ، ٠)، وكانت ق (س ، ص) إحدى نقط القطع الناقص شكل (٢ − ١٨) فإن:

$ق ب_1 + ق ب_2$ = ثابت حسب تعريف القطع الناقص

وللوصول إلى الصورة القياسية:

نفرض أن هذا الثابت = ٢ أ

∴ $ق ب_1 + ق ب_2$ = ٢ أ

واضح أن: ٢ أ > ٢ حـ (لماذا؟)

∴ أ > حـ

∵ $ق ب_1 = \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2}$ ، $ق ب_2 = \sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2}$

∴ $\sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2} + \sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = ٢ أ$

∴ $\sqrt{(س + حـ)^2 + ص^2} = ٢ أ - \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2}$

∴ $(س + حـ)^2 + ص^2 = ٤ أ^2 - ٤ أ \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2} + (س - حـ)^2 + ص^2$

∴ $س^2 + ٢ حـ س + حـ^2 + ص^2$

$= ٤ أ^2 - ٤ أ \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2} + س^2 - ٢ حـ س + حـ^2 + ص^2$

∴ $٤ حـ س - ٤ أ^2 = -٤ أ \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2}$

∴ $حـ س - أ^2 = -أ \sqrt{(س - حـ)^2 + ص^2}$

∴ $حـ^2 س^2 - ٢ حـ أ^2 س + أ^4 = أ^2 (س^2 - ٢ حـ س + حـ^2 + ص^2)$

∴ $(أ^2 - حـ^2) س^2 + أ^2 ص^2 = أ^4 - أ^2 حـ^2$

∴ $(أ^2 - حـ^2) س^2 + أ^2 ص^2 = أ^2 (أ^2 - حـ^2)$

، ∵ أ > حـ ، ∴ $أ^٢$ > $حـ^٢$ ، ∴ ($أ^٢$ − $حـ^٢$) > ٠

بوضع $أ^٢$ − $حـ^٢$ = $ب^٢$

∴ $ب^٢ س^٢$ + $أ^٢ ص^٢$ = $أ^٢ ب^٢$

معادلة

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \quad ، \quad أ^٢ > ب^٢ \qquad (١)$$

المعادلة (١) هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات.

بوضع ص = ٠ في المعادلة (١) نجد أن س = ± أ

وبوضع س = ٠ في المعادلة (١) نجد أن ص = ± ب

∴ يقطع القطع الناقص الذي معادلته (١) محور السينات في النقطتين:

$ب_١$(أ ، ٠) ، $ب_٢$(−أ ، ٠)

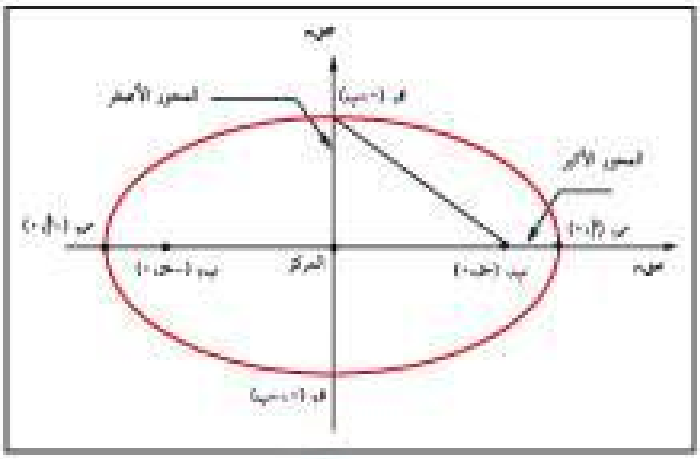
ويقطع محور الصادات في النقطتين $ج_١$(٠ ، ب) ، $ج_٢$(٠ ، −ب)

تسمى النقطتان $ب_١$(أ ، ٠) ، $ب_٢$(−أ ، ٠) «رأسي القطع الناقص»

وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{ب_١ ب_٢}$ «المحور الأكبر للقطع الناقص»

وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{ج_١ ج_٢}$ «المحور الأصغر للقطع الناقص»

وتسمى نقطة الأصل و(٠ ، ٠) «مركز القطع الناقص»



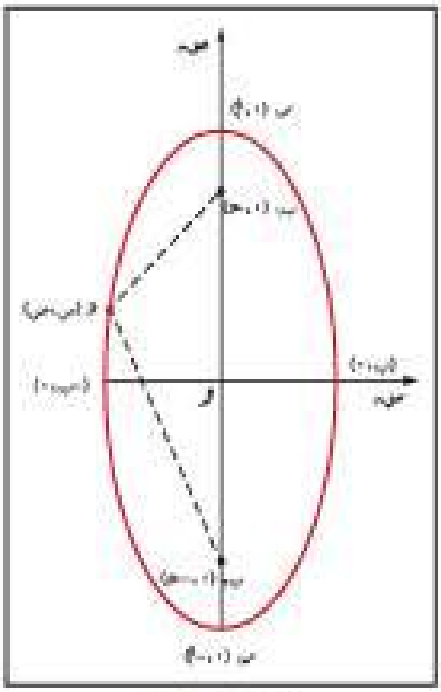
شكل ٢-١٩

∴ طول المحور الأكبر = $ب_١ ب_٢$ = ٢ أ

وطول المحور الأصغر = $ج_١ ج_٢$ = ٢ ب

لاحظ أن القطع الناقص في هذه الحالة متناظر حول كل من محوري الإحداثيات، ومتناظر أيضاً حول نقطة الأصل.

إذا أخذنا البؤرتين على محور الصادات كما في شكل (٢ – ٢٠):



شكل ٢-٢٠

ينطبق المحور الأكبر على محور الصادات، وينطبق المحور الأصغر على محور السينات، ويقع رأسا القطع الناقص $ر_١$ ، $ر_٢$ على محور الصادات.

أي أننا نلاحظ أن بؤرتي القطع الناقص تقعان على المحور الأكبر دوماً.

في هذه الحالة، إذا كانت ء (س ، ص) إحدى نقط القطع الناقص، وكانت $ب_١$ (٠ ، حـ) ، $ب_٢$ (٠ ، –حـ) فإن:

$$ء ب_١ + ء ب_٢ = ٢ أ$$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن استنتاج معادلة القطع الناقص في هذه الحالة وهي:

معادلة

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١ \quad ، \quad أ^٢ > ب_٢ \qquad (٢)$$

المعادلة (٢) هي صورة قياسية أخرى لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، حيث البؤرتان واقعتان على محور الصادات.

نستطيع استنتاج العلاقة بين أ ، ب ، حـ هندسياً كما يلي:

بالنظر إلى شكل (٢ – ١٩) وفي ضوء تعريف القطع الناقص نجد أن:

$$ء_١ ب_١ + ء_١ ب_٢ = ٢ أ$$

لكن القطع الناقص متناظر حول محور الصادات

∴ Δ $ء_١ ب_١ ب_٢$ متطابق الضلعين $\overline{ء_١ ب_١}$ ، $\overline{ء_١ ب_٢}$

∴ $٢ ء_١ ب_١ = ٢ أ \Leftarrow ء_١ ب_١ = أ$

Δ $ء_١ ب_١ و$ قائم الزاوية و

∴ $\boxed{أ^٢ = ب^٢ + حـ^٢}$

مثال ١

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: ب$_{١}$(١ ، ٠) ، ب$_{٢}$(-١ ، ٠) وطول محوره الأكبر ٥ وحدات. ثم ارسم تخطيطاً للقطع الناقص.

الحل

من المعطيات تكون المعادلة في الصورة:

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

من إحداثيات البؤرتين

نلاحظ أن: حـ = ١

$$٢أ = ٥ \qquad \therefore \quad أ = \frac{٥}{٢}$$

$$\therefore \quad أ^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$$

لكن $أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢}$

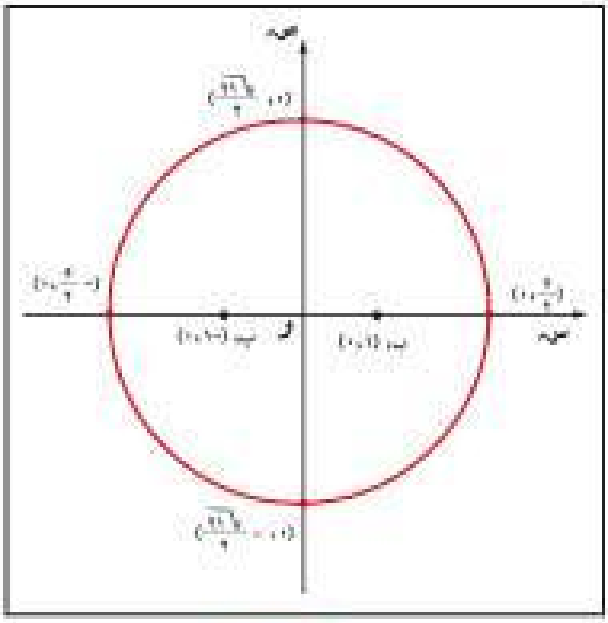
$$\therefore \quad ب^{٢} = أ^{٢} - حـ^{٢} = \frac{٢٥}{٤} - ١$$

$$= \frac{٢١}{٤}$$

$$\therefore \quad ب = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$$

$\therefore$ المعادلة هي: $\frac{س^{٢}}{\frac{٢٥}{٤}} + \frac{ص^{٢}}{\frac{٢١}{٤}} = ١$ أو

$$\frac{٤س^{٢}}{٢٥} + \frac{٤ص^{٢}}{٢١} = ١$$

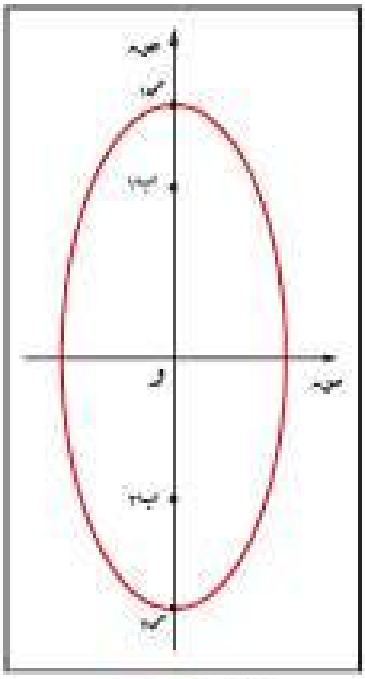


شكل ٢-٢١

مثال ٢

إذا كانت معادلة قطع ناقص هي: $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ، فأوجد:

أ البؤرتين ب طولي المحورين جـ الرأسين



شكل ٢-٢٢

الحل

معادلة القطع الناقص في الصورة:

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$$

أ $ب^٢ = ٤$ ، $أ^٢ = ٩$

$\therefore$ $حـ^٢ = ٩ - ٤ = ٥$

$\therefore$ $حـ = \sqrt{٥}$

$\therefore$ البؤرتان هما: $ب_١(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $ب_٢(٠ ، -\sqrt{٥})$.

ب $أ^٢ = ٩$ ، $ب^٢ = ٤$

$\therefore$ نصف طول المحور الأكبر = أ = ٣

$\therefore$ طول المحور الأكبر = ٦ وحدات

كذلك نصف طول المحور الأصغر = ب = ٢

$\therefore$ طول المحور الأصغر = ٤ وحدات

جـ $أ^٢ = ٩$

$\therefore$ رأسا القطع الناقص هما:

$ر_١(٠ ، ٣)$ ، $ر_٢(٠ ، -٣)$.

والجدول التالي يلخص النتائج السابقة :

القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل		
الصورة القياسية للمعادلة	$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$
المركز	(٠ ، ٠)	
الرأسان	(أ ، ٠) ، (-أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، -أ)
البؤرتان	(حـ ، ٠) ، (-حـ ، ٠)	(٠ ، حـ) ، (٠ ، -حـ)
محورا التناظر	س = ٠ ، ص = ٠	

حيث كل من أ ، ب ، حـ ∈ ح ، $حـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

تدريب :

إذا كانت معادلة قطع ناقص هي :

$٢٥س^٢ + ٤ص^٢ = ١٠٠$

فأوجد البؤرتين .

الحل

$٢٥س^٢ + ٤ص^٢ = ١٠٠$ (أكمل)

$\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} =$ .....

$حـ^٢ =$ .....

∴ البؤرتان هما .....

تمارين

٢ - ٣

١ أوجد المركز والرأسين والبؤرتين للقطع الناقص في كل مما يلي:

أ $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$

ب $٤س^٢ + ٢٥ ص^٢ = ١٠٠$

جـ $٥س^٢ + ٣ ص^٢ = ١٥$

٢ أوجد معادلة القطع الناقص إذا كان:

أ المركز و(٠ ، ٠) ، $ب_١$(٠ ، ٢) ، أ = ٤ حيث $ب_١$ بؤرة.

ب المركز و(٠ ، ٠) ، $ب_٢$(-٣ ، ٠) ، أ = ٥ حيث $ب_٢$ بؤرة.

٣ فيما يلي أوجد معادلة القطع الناقص إذا كان:

أ $ب_١$(٢ ، ٠) ، $ب_٢$(-٢ ، ٠) وطول المحور الأكبر ٦ ، حيث $ب_١$ ، $ب_٢$ البؤرتان

ب $ب_١$(٢ ، ٠) ، $ب_٢$(-٢ ، ٠) وطول المحور الأصغر ٦ ، حيث $ب_١$ ، $ب_٢$ البؤرتان

جـ المحور الأكبر جزءاً من المحور السيني وطول ١٠ ؛
طول المحور الأصغر ٨ والمركز و(٠ ، ٠)

د $ر_١$(٠ ، ٤) ، $ر_٢$(٠ ، -٤) ، $ب_١$(٠ ، ٣) ، $ب_٢$(٠ ، -٣)
حيث $ر_١$ ، $ر_٢$ الرأسان ، $ب_١$ ، $ب_٢$ البؤرتان.

٤ أوجد معادلة القطع الناقص إذا كان مجموع بعدي البؤرتين $ب_١$(٣ ، ٠) ، $ب_٢$(-٣ ، ٠) عن النقطة (س ، ص) التي تنتمي إلى القطع الناقص يساوي ١٠.

٥ ارسم تخطيطاً لكل من القطوع الناقصة التالية موضحاً الرأسين والبؤرتين والمركز:

أ $٩س^٢ + ٤ص^٢ = ٣٦$

ب $٤س^٢ + ص^٢ = ١$

٢ – ٤ القطع الزائد

Hyperbola Section

سبق أن ذكرنا أن المنحنى الذي ينتج من قطع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة بمستوي يوازي محوره يسمى قطعاً زائداً انظر شكل (٢ – ٢٣).

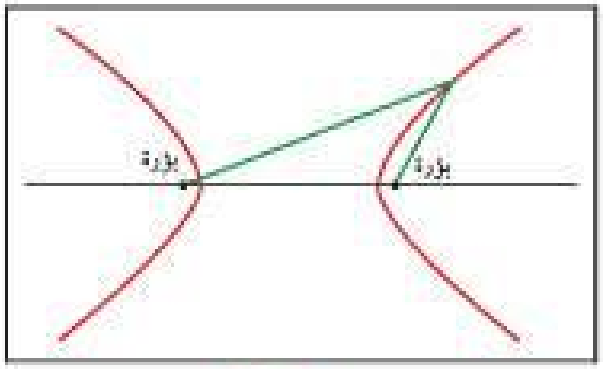
فما هو القطع الزائد؟

هذا ما سندرسه في هذا البند.

تعريف ١

القطع الزائد هو مجموعة نقاط المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعد كل منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي تساوي مقداراً ثابتاً.

تسمى النقطتان الثابتتان «بؤرتي القطع الزائد».



شكل ٢-٢٤

شكل ٢-٢٣

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل

لنأخذ القطع الزائد الذي تقع بؤرتاه على محور السينات وعلى نفس البعد من نقطة الأصل و، ونفرض أن البؤرتين هما $ب_١$ (حـ ، ٠) ، $ب_٢$(–حـ ، ٠).

إذا كانت ء (س ، ص) إحدى نقط القطع الزائد، فإنه حسب التعريف يكون:

$|ء ب_١ - ء ب_٢| =$ ثابت

إذا أخذنا هذا الثابت ٢أ فإن:

$|\text{ق}(\text{ب}_١) - \text{ق}(\text{ب}_٢)| = ٢\text{أ}$

∴ إما أن يكون $\text{ق}(\text{ب}_١) - \text{ق}(\text{ب}_٢) = ٢\text{أ}$

أو يكون $\text{ق}(\text{ب}_٢) - \text{ق}(\text{ب}_١) = ٢\text{أ}$

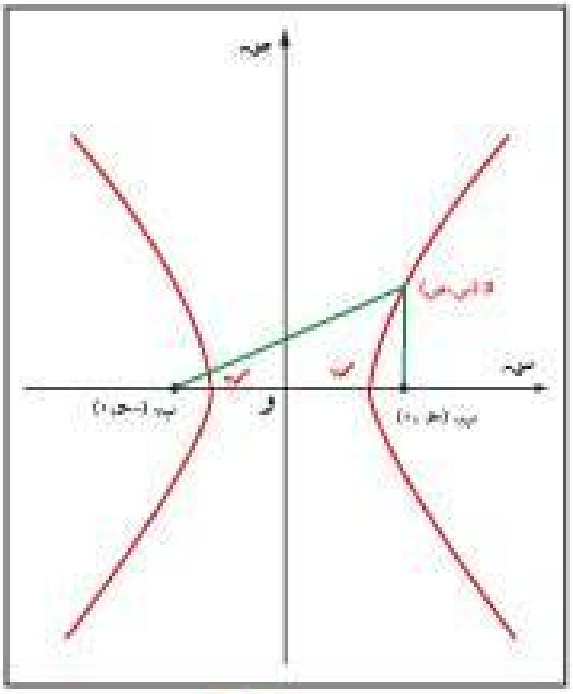
وفي شكل (٢ - ٢٥) نجد أن:

$\text{ق}(\text{ب}_١) - \text{ق}(\text{ب}_٢) = ٢\text{أ}$

حيث $\text{ق}(\text{ب}_٢) > \text{ق}(\text{ب}_١)$

$\text{ق}(\text{ب}_٢) = \sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢}$ ،

$\text{ق}(\text{ب}_١) = \sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢}$



شكل ٢ - ٢٥

∴ $\sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢} - \sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢} = ٢\text{أ}$

∴ $\sqrt{(\text{س} + \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢} = ٢\text{أ} + \sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢}$

∴ $(\text{س} + \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢ = ٤\text{أ}^٢ + ٤\text{أ}\sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢} + (\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢$

∴ $٤\text{س حـ} - ٤\text{أ}^٢ = ٤\text{أ}\sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢}$

∴ $\text{س حـ} - \text{أ}^٢ = \text{أ}\sqrt{(\text{س} - \text{حـ})^٢ + \text{ص}^٢}$

∴ $\text{س}^٢\text{حـ}^٢ - ٢\text{س حـ أ}^٢ + \text{أ}^٤ = \text{أ}^٢(\text{س}^٢ - ٢\text{حـ س} + \text{حـ}^٢ + \text{ص}^٢)$

∴ $\text{س}^٢\text{حـ}^٢ - ٢\text{س حـ أ}^٢ + \text{أ}^٤ = \text{أ}^٢\text{س}^٢ - ٢\text{حـ أ}^٢\text{س} + \text{أ}^٢\text{حـ}^٢ + \text{أ}^٢\text{ص}^٢$

∴ $\text{س}^٢\text{حـ}^٢ + \text{أ}^٤ = \text{أ}^٢\text{س}^٢ + \text{أ}^٢\text{حـ}^٢ + \text{أ}^٢\text{ص}^٢$

∴ $\text{س}^٢\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢\text{س}^٢ - \text{أ}^٢\text{ص}^٢ = \text{أ}^٢\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٤$

∴ $(\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢)\text{س}^٢ - \text{أ}^٢\text{ص}^٢ = \text{أ}^٢(\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢)$

ولكن $٢\text{حـ} > ٢\text{أ} \Leftarrow \text{حـ} > \text{أ} \Leftarrow \text{حـ}^٢ > \text{أ}^٢$

يوضع $\boxed{\text{حـ}^٢ - \text{أ}^٢ = \text{ب}^٢}$

$\therefore$ $ب^٢ س^٢ - أ^٢ ص^٢ = أ^٢ ب^٢$

معادلة

$$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \qquad (١)$$

المعادلة (١) هي الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وتقع بؤرتاه على محور السينات.

بوضع ص = ٠ في المعادلة (١) نجد أن س = ± أ

ولا تتعين قيمة حقيقية لـ ص عند س = ٠ (لماذا؟)

أي أن القطع الزائد الذي معادلته (١) لا يقطع محور الصادات.

ولكنه يقطع محور السينات في النقطتين $ر_١$(أ ، ٠) ، $ر_٢$(-أ ، ٠)

تسمى النقطتان $ر_١$(أ ، ٠) ، $ر_٢$(-أ ، ٠) «رأسي القطع الزائد»، وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{ر_١ ر_٢}$ «المحور الأساسي للقطع الزائد»، وتسمى نقطة الأصل (٠ ، ٠) «مركز القطع الزائد»، وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{ك_١ ك_٢}$ «المحور المرافق للقطع الزائد» حيث $ك_١$ هي النقطة (٠ ، ب) ، $ك_٢$ هي النقطة (٠ ، -ب).

طول المحور الأساسي = $ر_١ ر_٢$ = ٢ أ وطول المحور المرافق = $ك_١ ك_٢$ = ٢ ب

من المعادلة (١):

$$ص^٢ = ب^٢ \left(\frac{س^٢}{أ^٢} - ١ \right)$$

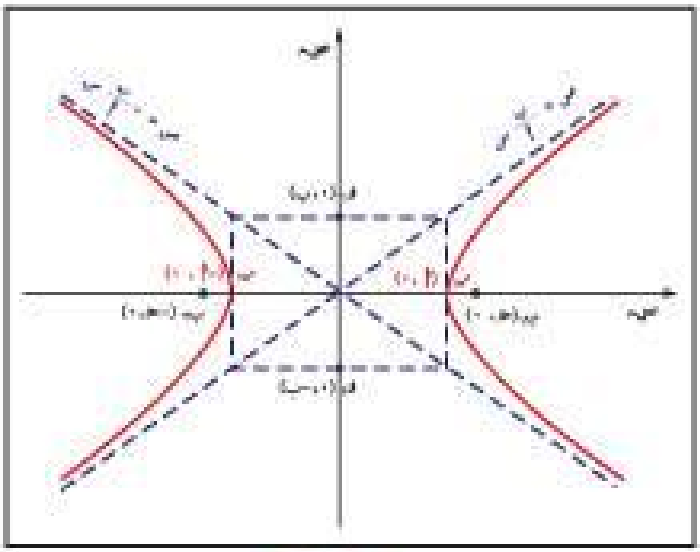
$$= \frac{ب^٢}{أ^٢} (س^٢ - أ^٢)$$

$$\therefore \quad ص = \pm \frac{ب}{أ} \sqrt{س^٢ - أ^٢}$$

$$\text{أو} \quad ص = \pm \frac{ب}{أ} س \sqrt{١ - \frac{أ^٢}{س^٢}}$$

وعندما س ← ∞ ، فإن $\frac{أ^٢}{س^٢}$ ← ٠

$$\therefore \quad ص \leftarrow \pm \frac{ب}{أ} س \quad \text{عندما} \quad س \leftarrow \infty$$



شكل ٢-٢٦

سنسمي كلاً من المستقيمين: $\boxed{ص = \pm \frac{ب}{أ} س}$ خطاً تقاربياً للقطع الزائد وذلك لأنه يقترب من القطع الزائد ولا يقطعه انظر شكل (٢ - ٢٦).

ملاحظة:

١ القطع الزائد متناظر حول محوريه.

٢ إذا كانت (س ، ص) نقطة من نقط القطع، فإن النقطة (-س ، -ص) هي أيضاً نقطة منه لأنها تحقق معادلته، ومن ذلك نستنتج أن القطع الزائد متناظر حول نقطة الأصل التي تسمى مركز القطع الزائد، ولذلك نقول إن القطع الزائد كالقطع الناقص هو قطع ذو مركز (في حين أنه ليس للقطع المكافئ مركز).

إذا وقعت البؤرتان على محور الصادات فإن:

$ب_١(٠ ، حـ)$ ، $ب_٢(٠ ، -حـ)$

وتأخذ معادلة القطع الزائد الصورة القياسية الآتية:

معادلة

$$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١ \qquad (٢)$$

تمرين:

حاول التوصل إلى هذه الصورة متبعاً طريقة مماثلة لتلك المتبعة في التوصل إلى الصورة القياسية رقم (١).

حينئذ يكون:

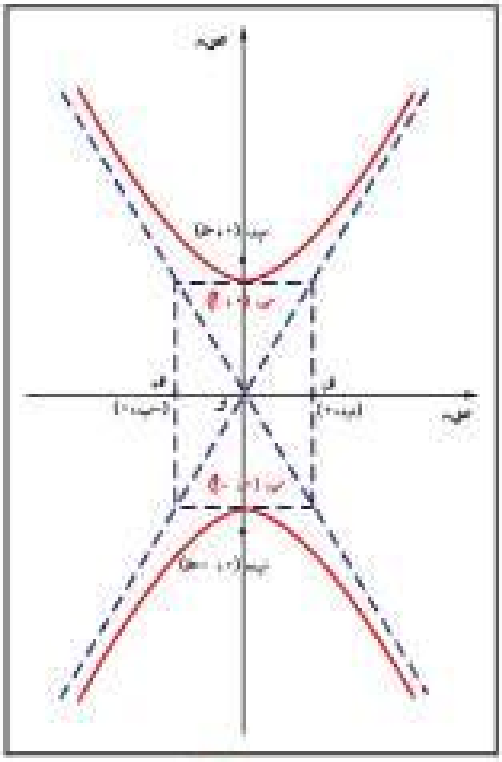
الرأسان هما: $س_١(٠ ، أ)$ ، $س_٢(٠ ، -أ)$

والبؤرتان: $ب_١(٠ ، حـ)$ ، $ب_٢(٠ ، -حـ)$

الخطان التقاربيان هما: $ص = \pm \frac{أ}{ب} س$

أو $\boxed{ص = \pm \frac{أ}{ب} س}$

انظر شكل (٢ - ٢٧)



شكل ٢-٢٧

ملاحظة:

١ العلاقة بين أ ، ب ، حـ في حالة القطع الزائد هي: $\boxed{حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢}$

٢ لا توجد علاقة ثابتة بين أ ، ب في حالة القطع الزائد كما في حالة القطع الناقص، ففي القطع الناقص يكون أ > ب، ولكن في القطع الزائد لا يشترط ذلك.

مثال ١

أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما $ر_١$(٢ ، ٠) ، $ر_٢$(-٢ ، ٠)

وبؤرتاه هما $ب_١$(٣ ، ٠) ، $ب_٢$(-٣ ، ٠)

الحل

أ = ٢ ، حـ = ٣

∵ $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ∴ $ب^٢ = حـ^٢ - أ^٢ = ٩ - ٤ = ٥$

∴ المعادلة هي: $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٥} = ١$

مثال ٢

أوجد رأسي وبؤرتي القطع الزائد: $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$

الحل

$أ^٢ = ٩$ ، ∴ أ = ٣ ،

∴ الرأسان هما: $ر_١$(٣ ، ٠) ، $ر_٢$(-٣ ، ٠)

$حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٩ + ٤ = ١٣$

∴ $حـ = \sqrt{١٣}$

∴ البؤرتان هما: $ب_١$($\sqrt{١٣}$ ، ٠) ، $ب_٢$(-$\sqrt{١٣}$ ، ٠)

مثال ٣

أوجد معادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد الذي رأساه هما:

$ر_1(٣ ، ٠)$ ، $ر_2(-٣ ، ٠)$ وبؤرتاه هما: $ب_1(\sqrt{١٣} ، ٠)$ ، $ب_2(-\sqrt{١٣} ، ٠)$ ،

ثم ارسم القطع الزائد موضحاً عليه البؤرتين والخطين التقاربيين.

الحل

$حـ^2 = أ^2 + ب^2$

$حـ = \sqrt{١٣}$ ، $أ = ٣$

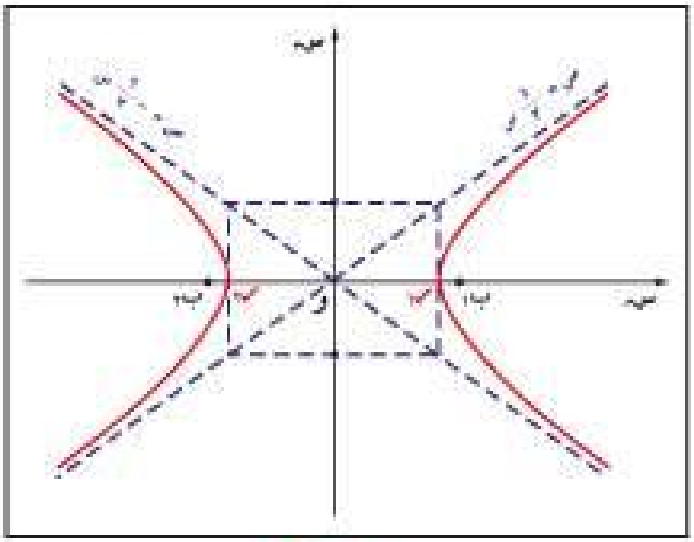
$\therefore حـ^2 = ١٣$ ، $أ^2 = ٩$

$ب^2 = ١٣ - ٩ = ٤$

$\therefore ب = \pm ٢$

$\therefore$ الخطان التقاربيان هما:

$ص = \pm \frac{٢}{٣} س$



شكل ٢-٢٨

مثال ٤

أوجد معادلتي الخطين التقاربيين للقطع الزائد الذي رأساه هما:

$ر_1(٠ ، ٢)$ ، $ر_2(٠ ، -٢)$ وبؤرتاه هما: $ب_1(٠ ، ٣)$ ، $ب_2(٠ ، -٣)$،

ثم ارسم القطع الزائد موضحاً عليه البؤرتين والرأسين والخطين التقاربيين.

الحل

$حـ^2 = أ^2 + ب^2$

ولكن $حـ = ٣$ ، $أ = ٢$

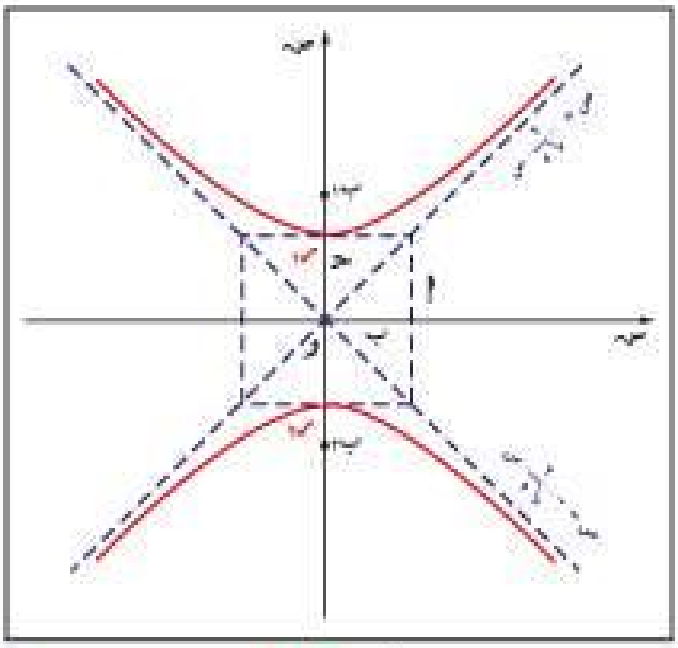
$\therefore ٩ = ٤ + ب^2$

$\therefore ب^2 = ٥ \Leftarrow ب = \sqrt{٥}$

$\therefore$ الخطان التقاربيان هما:

$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$

أو $ص = \pm \frac{٢}{\sqrt{٥}} س$



شكل ٢-٢٩

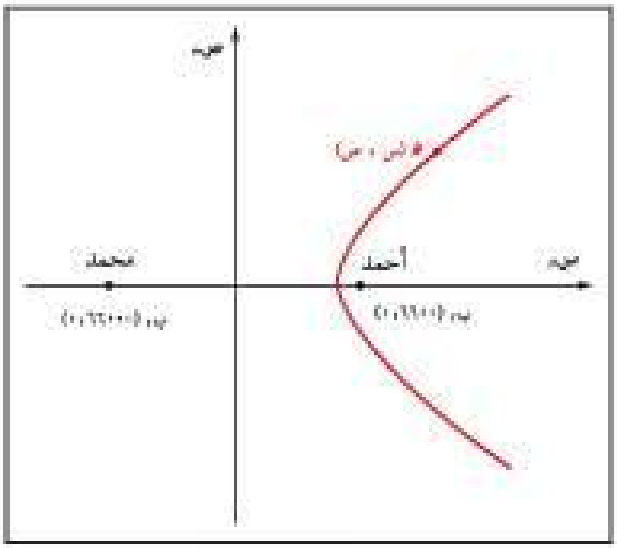
الجدول التالي يلخص كل ما يتعلق بالصور القياسية لمعادلة القطع الزائد:

القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل		
الصورة القياسية للمعادلة	$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ق^٢} = ١$
المركز	(٠ ، ٠)	
الرأسان	(أ ، ٠) ، (-أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، -أ)
البؤرتان	(حـ ، ٠) ، (-حـ ، ٠)	(٠ ، حـ) ، (٠ ، -حـ)
محورا التناظر	س = ٠ ، ص = ٠	
الخطوط التقاربية	$ص = \pm \frac{ب}{أ} س$	$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$

حيث كل من أ ، ب ، حـ $\in$ ح ، $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

مثال ٥

أثناء مكالمة هاتفية بين أحمد المتواجد عند النقطة (٦٦٠٠ ، ٠) ومحمد المتواجد عند النقطة (-٦٦٠٠ ، ٠) حدث دوي لطلق ناري سمعه أحمد ثم سمعه محمد بعد ٦ ثواني من سماع أحمد له. أثبت أن مجموعة النقط التي يمكن أن تكون مصدراً للصوت هي نقط قطع زائد، وأوجد معادلته علماً بأن سرعة الصوت في الهواء تساوي ١١٠٠ وحدة في الثانية.



شكل ٢-٣٠

الحل

شكل (٢ - ٣٠) يوضح وضع أحمد ومحمد ولتكن النقطة هـ (س ، ص) مصدراً للصوت.

حيث إن الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

∴ الزمن اللازم للصوت ليصل إلى أحمد = $\frac{هـ ب_١}{١١٠٠}$

الزمن اللازم للصوت ليصل إلى محمد = $\frac{هـ ب_٢}{١١٠٠}$

ولكن لدينا من الفرض

$$\frac{هـ ب_٢}{١١٠٠} - \frac{هـ ب_١}{١١٠٠} = ٦$$

ومنها:

$$هـ ب_٢ - هـ ب_١ = ٦٦٠٠ \quad \text{\_\_\_\_\_} (١)$$

أي أن مجموعة النقط هـ التي يمكن أن تكون مصدراً للصوت يكون فرق بعديها عند أحمد ومحمد ثابتاً ويساوي ٦٦٠٠ فهي تقع إذن على قطع زائد بؤرتاه عند أحمد ومحمد أي أن:

$ب_١(٦٦٠٠ ، ٠)$ ، $ب_٢(-٦٦٠٠ ، ٠)$

وعليه فإن: $حـ = ٦٦٠٠$

وكذلك من (١) تكون:

$$٢أ = ٦٦٠٠ \Leftarrow أ = ٣٣٠٠$$

ويكون $ب^٢ = حـ^٢ - أ^٢ = (٦٦٠٠)^٢ - (٣٣٠٠)^٢$

$$= ٣ \times (٣٣٠٠)^٢$$

وتكون معادلة القطع المطلوبة هي:

$$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

أي $\frac{س^٢}{(٣٣٠٠)^٢} - \frac{ص^٢}{٣ \times (٣٣٠٠)^٢} = ١$ ■

تمارين

٢ - ٤

١ اكتب معادلة القطع الزائد وفقاً للمعطيات في كل حالة معتبراً مركزه نقطة الأصل والمحور الأساسي أفقياً:

أ $أ = ١ \quad ، \quad ب = ١$

ب $أ = ٢ \quad ، \quad ب = \sqrt{٣}$

جـ $أ = ب = \sqrt{٥}$

د $أ = ٢ \quad ، \quad ب = ٣$

٢ أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما $ر_١(٣ ، ٠)$ ، $ر_٢(-٣ ، ٠)$ وبؤرتاه هما $ب_١(٤ ، ٠)$ ، $ب_٢(-٤ ، ٠)$.

٣ أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما $ر_١(٠ ، ٢)$ ، $ر_٢(٠ ، -٢)$ وبؤرتاه هما $ب_١(٠ ، ٥)$ ، $ب_٢(٠ ، -٥)$.

٤ **أولاً: أوجد رأسي وبؤرتي كل قطع زائد مما يلي:**

أ $\frac{س^٢}{٩} - ص^٢ = ١$

ب $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

جـ $\frac{ص^٢}{٤٩} + ١ = \frac{س^٢}{٣٦}$

د $\frac{س^٢}{١٢١} + ١ = \frac{ص^٢}{٦٤}$

هـ $٤ص^٢ - ٩س^٢ = ٣٦$

ثانياً: أوجد معادلتي الخطين التقاربيين لكل قطع زائد في «أولاً».

٥ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه النقطة (٤ ، ٠) ويمر بالنقطة (١٤ ، ٢٤).

٦ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٤ ، ٣) ومحوره الأساسي جزء من المحور السيني.

٧ أثبت أن القطع الزائد الذي معادلته ٣س^{٢} - ص^{٢} = ١٢ والقطع الناقص الذي معادلته ٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥ لهما نفس البؤرتين.

٨ سمع صوت طلق ناري عند النقطة ل (٢٠٠ ، ٠) وبعده بثانيتين سمع الصوت نفسه عند النقطة ك (-٢٠٠ ، ٠) أثبت أن مجموعة النقط و (س ، ص) التي يمكن أن تكون مصدراً للصوت هي نقط قطع زائد ثم أوجد معادلته علماً بأن سرعة الصوت في الهواء ٥٠ وحدة/ ثانية.

٢ – ٥ الاختلاف المركزي

Eccentricity

تمكنا في البنود السابقة من تعريف القطوع المخروطية (القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد).

ويوجد مدخل آخر لهذه القطوع يبرر التسميات التي ذكرناها لهذه القطوع كما سنرى في هذا البند.

تعريف ١

التعريف العام للقطع المخروطي

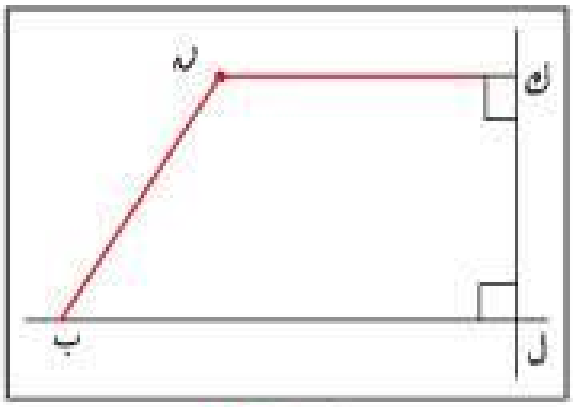
القطع المخروطي هو مجموعة جميع النقط في المستوي الإحداثي بحيث تكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) تساوي مقداراً ثابتاً يرمز له بالرمز «e». ويسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي.

ففي شكل (٢ – ٣١)

إذا اعتبرنا $\overleftrightarrow{\text{ك ل}}$ هو الدليل، ب هي البؤرة، ن نقطة ما على القطع المخروطي مهما كان نوعه تكون:

$$e = \frac{\text{ن ب}}{\text{ن ك}} > ٠$$

والاختلاف المركزي «e» هو الرابط المشترك الذي يوضح الفرق بين القطوع المخروطية الثلاثة:



شكل ٢-٣١

١ فإذا كانت e تكافئ الواحد (e = ١) سمي القطع قطعاً مكافئاً.

٢ وإذا كانت e تنقص عن الواحد (e < ١) سمي القطع قطعاً ناقصاً.

٣ وإذا كانت e تزيد عن الواحد (e > ١) سمي القطع قطعاً زائداً.

ويمكن إثبات أنه في حالة القطع الناقص والقطع الزائد.

$e = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$ حيث حـ بعد البؤرة عن المركز ، أ بعد رأس القطع عن المركز.

أي أن النسبة حـ : أ تعبر عن الاختلاف المركزي للقطع المخروطي حيث حـ ، أ هي نفس القيم التي تعاملنا معها فيما سبق.

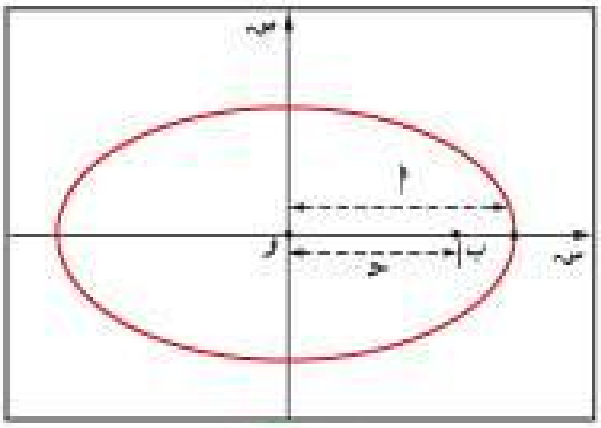
لاحظ في شكل (٢ - ٣٢)

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

بؤرتاه هما: (حـ ، ٠) ، (-حـ ، ٠)

وحيث إن $e = \frac{حـ}{أ}$

∴ البؤرتان هما (أe ، ٠) ، (-أe ، ٠)



شكل ٢-٣٢

ملاحظة:

عندما e ← ٠ فإن أe ← ٠

وحينئذ تقترب البؤرتان من المركز ويؤول القطع الناقص إلى دائرة. لذا يمكن اعتبار الدائرة حالة خاصة من حالات القطع الناقص. لذلك فإن قيمة e تحدد الشكل الهندسي للقطع الناقص ومقدار تقعره: فكلما كانت e صغيرة اقترب القطع من الدائرة، وكلما كبرت e (اقتربت من الواحد) كان القطع مفلطحاً أكثر.

تدريب:

لتكن أ = ٢ ارسم قطعين ناقصين اختلافهما المركزي ٠,١ ، ٠,٩ على الترتيب ولاحظ الفرق بين شكليهما.

مثال ١

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه هما: (٣ ، ٠) ، (-٣ ، ٠) واختلافه المركزي $e = \frac{٣}{٤}$.

الحل

$e = \frac{حـ}{أ}$ ، ∴ $أ = \frac{حـ}{e} = ٣ \times \frac{٤}{٣} = ٤$ ، ∴ $أ^٢ = ١٦$.

$ب^٢ = أ^٢ - حـ^٢ = ١٦ - ٩ = ٧$

∴ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٧} = ١$

مثال ٢

أوجد البؤرتين والاختلاف المركزي للقطع الناقص: $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$.

الحل

∵ $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$ ، فإن المحور الأكبر هو المحور الصادي.

من المعادلة: $أ^٢ = ١٦$ ، $ب^٢ = ٩$ ،

∴ $حـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٧$

∴ $حـ = \sqrt{٧}$

∴ البؤرتان هما $ب_١(٠ ، \sqrt{٧})$ ، $ب_٢(٠ ، -\sqrt{٧})$

$e = \frac{حـ}{أ} = \frac{\sqrt{٧}}{٤}$

مثال ٣

يدور كوكب بلوتو في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه. إذا علم أن أصغر بعد وأكبر بعد بينه وبين الشمس يحدثان عندما يكون بلوتو عند رأس القطع الناقص، وكانت أصغر مسافة ٢,٧ بليون ميل وأكبر مسافة ٤,٥ بليون ميل، فأوجد الاختلاف المركزي لمدار الكوكب بلوتو.

الحل

طول المحور الأكبر = $٢أ$

∴ $٢أ = ٤,٥ + ٢,٧$

= ٧,٢ بليون ميل

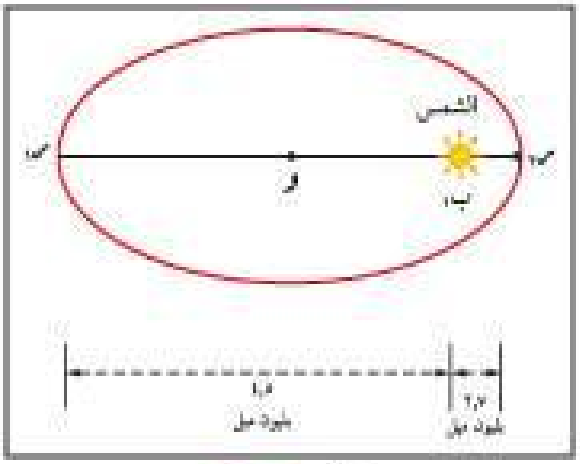
∴ $أ$ = ٣,٦ بليون ميل

بعد الشمس عن المركز = $حـ$

∴ $حـ = ٣,٦ - ٢,٧ = ٠,٩$ بليون ميل

∴ $e = \frac{حـ}{أ} = \frac{٠,٩}{٣,٦} = ٠,٢٥$

انظر شكل (٢ - ٣٣).



شكل ٢-٣٣

مثال ٤

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، إذا علمت أن إحدى بؤرتيه هي النقطة (٠ ، ٣) واختلافه المركزي $e = \frac{٣}{٢}$.

الحل

البؤرة هي النقطة ب(٠ ، ٣) ⇐ حـ = ٣

$\because e = \frac{حـ}{أ}$

أي أن $\frac{٣}{٢} = \frac{٣}{أ}$

$\therefore أ = ٢$

$\because ب^٢ = حـ^٢ - أ^٢ = ٩ - ٤ = ٥$

∴ معادلة القطع المطلوبة هي:

$$\frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{٥} = ١$$

(وذلك لأن البؤرة واقعة على محور الصادات).

تمارين

٢ – ٥

١ أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي فيه:

أ أ = ٥ ، ب = ٣

ب حـ = ٩ ، ب = ١٢

حـ معادلة القطع الناقص هي $\frac{س^٢}{٧} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

٢ فيما يلي أوجد الاختلاف المركزي للقطع الزائد إذا كان:

أ أ = ٥ ، ب = ١٢

ب ب = ١٥ ، حـ = ١٧

٣ فيما يلي اكتب معادلة كل قطع زائد وفقاً للمعطيات في كل حالة.

أ $ب_١$(٠ ، ٨) ، $ب_٢$(٠ ، –٨) ، $e = \frac{٤}{٣}$ حيث $ب_١$ ، $ب_٢$ البؤرتان

ب $ب_١$(٤ ، ٠) ، $ب_٢$(–٤ ، ٠) ، $e = \frac{٥}{٢}$ حيث $ب_١$ ، $ب_٢$ البؤرتان

حـ الفرق بين بعد النقطة (س ، ص) الواقعة على القطع الزائد عن $ب_١$(٠ ، ٥) وبعدها عن $ب_٢$(٠ ، –٥) يساوي ٨.

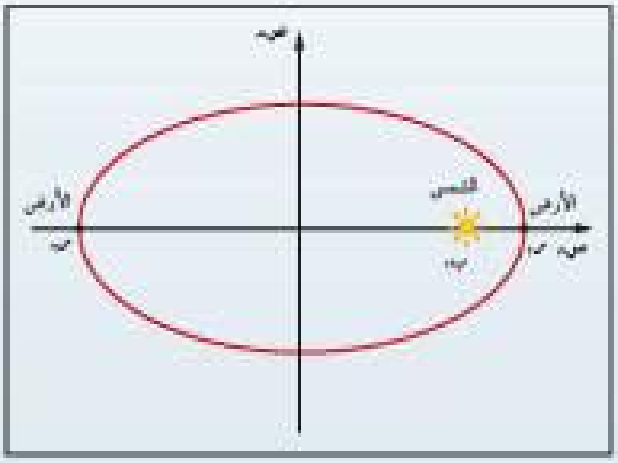
٤ أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان:

أ $e = \frac{٣}{٢}$ ، أحد رؤوسه هو النقطة (٠ ، ٢)

ب $e = \frac{٥}{٣}$ ، أحد رؤوسه هو النقطة (–٤ ، ٠)

٥ أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه هو و(٠ ، ٠) ورأسه $ص_١$(٢ ، ٠) والاختلاف المركزي له هو $e = \frac{٣}{٤}$.

٦ مسار الأرض حول الشمس هو قطع ناقص تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه، فإذا كان طول المحور الأكبر للقطع ٣٠٠٠٠٠ كم واختلافه المركزي e = ٠,٠١٧ أوجد أكبر وأصغر بعد للأرض عن الشمس.



٢ - ٦ ملخص وتمارين عامة Summary and General Exercises

- القطوع المخروطية هي منحنيات تنتج من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة، وهي ثلاثة: القطع المكافئ، القطع الناقص، والقطع الزائد علماً بأن الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص.

١ - القطع المكافئ:

- القطع المكافئ هو مجموعة نقاط المستوي التي يتساوى بعد كل منها عن نقطة ثابتة في المستوي مع بعدها عن مستقيم ثابت في المستوي.

تسمى النقطة الثابتة «البؤرة»، ويسمى المستقيم الثابت «الدليل».

وينتج القطع المكافئ من قطع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة بمستوي موازٍ لراسم واحد فقط فيه ولا يحويه.

- الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل هي:

س^{٢} = ٤ أ ص ، س^{٢} = -٤ أ ص ، ص^{٢} = ٤ أ س ، ص^{٢} = -٤ أ س

وفيما يلي البيانات الخاصة بكل منهما:

القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل (أ عدد حقيقي موجب)				
الصورة القياسية للمعادلة	س^{٢} = ٤ أ ص	س^{٢} = -٤ أ ص	ص^{٢} = ٤ أ س	ص^{٢} = -٤ أ س
الفتحة	إلى أعلى	إلى أسفل	إلى اليمين	إلى اليسار
محور التناظر	محور الصادات	محور الصادات	محور السينات	محور السينات
البؤرة	(٠ ، أ)	(٠ ، -أ)	(أ ، ٠)	(-أ ، ٠)
الدليل	ص = -أ	ص = أ	س = -أ	س = أ

٢ - القطع الناقص:

- القطع الناقص هو مجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتاً. تسمى النقطتان الثابتتان «بؤرتي القطع الناقص».

وينتج القطع الناقص من قطع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة بمستوي ليس عمودياً على محوره وليس موازياً لراسم فيه.

- الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \quad ، \quad \frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١ \ : \ أ > ب$$

وفيما يلي البيانات الخاصة بكل منهما:

الصورة القياسية للمعادلة	$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$
المركز	(٠ ، ٠)	
الرأسان	(أ ، ٠) ، (-أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، -أ)
البؤرتان	(حـ ، ٠) ، (-حـ ، ٠)	(٠ ، حـ) ، (٠ ، -حـ)
محورا التناظر	س = ٠ ، ص = ٠	

- العلاقة بين أ ، ب ، حـ في حالة القطع الناقص هي: $حـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ، أ > ب.

٣ - القطع الزائد:

- القطع الزائد هو مجموعة نقاط المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بُعد كل منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي تساوي مقداراً ثابتاً. تسمى النقطتان الثابتتان «بؤرتي القطع الزائد».

وينتج القطع الزائد من قطع مخروط دائري قائم ثنائي القاعدة بمستوي يوازي محوره.

- الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل هي:

$$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ \quad ، \quad \frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$$

وفيما يلي البيانات الخاصة بكل منهما:

الصورة القياسية للمعادلة	$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$
المركز	(٠ ، ٠)	
الرأسان	(أ ، ٠) ، (-أ ، ٠)	(٠ ، أ) ، (٠ ، -أ)
البؤرتان	(حـ ، ٠) ، (-حـ ، ٠)	(٠ ، حـ) ، (٠ ، -حـ)
محورا التناظر	س = ٠ ، ص = ٠	
الخطوط التقاربية	$ص = \pm \frac{ب}{أ} س$	$ص = \pm \frac{أ}{ب} س$

- العلاقة بين أ ، ب ، حـ في حالة القطع الزائد هي:

$حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ ولا يشترط أن يكون أ > ب كما في القطع الناقص.

- القطع المخروطي هو مجموعة جميع النقط في المستوي الإحداثي بحيث تكون نسبة بعدها عن نقطة ثابتة إلى بعدها عن مستقيم ثابت تساوي مقداراً ثابتاً يرمز له بالرمز «e» تسمى النقطة الثابتة «بؤرة» ويسمى المستقيم الثابت «دليل» وتسمى النسبة «e» الاختلاف المركزي للقطع المخروطي:

١ إذا كانت e = ١ فإن القطع المخروطي هو قطع مكافئ

٢ إذا كانت e < ١ فإن القطع المخروطي هو قطع ناقص.

٣ إذا كانت e > ١ فإن القطع المخروطي هو قطع زائد.

٤ في حالة القطع الناقص والقطع الزائد:

$e = \frac{حـ}{أ}$ حيث حـ بعد البؤرة عن المركز ، أ بعد رأس القطع المركز.

تمارين عامة

٢ - ٦

بنود موضوعية:

• **أولاً: لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح.**

١ الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي تقع بؤرته على محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ١) هي:

(أ) $ص^٢ = \frac{١}{٢} س$ (ب) $س^٢ = ٤ص$

(ج) $ص^٢ = ٢س$ (د) $س^٢ = \frac{١}{٢} ص$

٢ إذا كانت معادلة الدليل لقطع مكافئ في وضع قياسي هي ص = ٣ فإن معادلة هذا القطع هي:

(أ) $ص^٢ = ١٢س$ (ب) $ص^٢ = -١٢س$

(ج) $س^٢ = -١٢ص$ (د) $س^٢ = ١٢ص$

٣ معادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $س^٢ = ١٢ص$ هي

(أ) ص = -٣ (ب) ص = ١٢ (ج) س = ١٢ (د) س = -٣

٤ بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ هما النقطتان

(أ) $(\sqrt{٢١} ، ٠) ، (-\sqrt{٢١} ، ٠)$ (ب) $(٠ ، \sqrt{٢١}) ، (٠ ، -\sqrt{٢١})$

(ج) (٢١ ، ٠) ، (-٢١ ، ٠) (د) (٠ ، ٢١) ، (٠ ، -٢١)

٥ معادلة القطع الناقص الذي في وضعه القياسي وإحدى بؤرتيه (٨ ، ٠) وطول محوره الأصغر ٣٠ وحدة طول هي:

(أ) $\frac{س^٢}{١٧} + \frac{ص^٢}{١٥} = ١$ (ب) $\frac{س^٢}{٢٨٩} = ١ - \frac{ص^٢}{٢٢٥}$

(ج) $\frac{س^٢}{٢٢٥} + \frac{ص^٢}{٢٨٩} = ١$ (د) $\frac{س^٢}{١٥} + \frac{ص^٢}{١٧} = ١$

٦ بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ هما النقطتان:

(أ) (٥ ، ٠) ، (-٥ ، ٠) (ب) (٠ ، ٥) ، (٠ ، -٥)

(ج) ($\sqrt{٧}$ ، ٠) ، (-$\sqrt{٧}$ ، ٠) (د) (٠ ، $\sqrt{٧}$) ، (٠ ، -$\sqrt{٧}$)

٧ المعادلة التي تمثل قطعاً زائداً فيما يلي هي:

(أ) $\frac{س^٢}{٤} = ١ + \frac{ص^٢}{٢٥}$ (ب) $٩س^٢ + ٩ص^٢ = ١$

(ج) $\frac{س^٢}{٢٥} = ١ - \frac{ص^٢}{٩}$ (د) $٢٥س^٢ + ٤ص^٢ = ١٠٠$

٨ البعد بين بؤرتي القطع الزائد $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ مقاساً بوحدات الطول يساوي:

(أ) ٥ (ب) ٥٠ (ج) ٢٥ (د) ١٠

٩ معادلة الخطين التقاربيين للقطع الزائد: (٤س - ٥ص) (٤س + ٥ص) = ٤٠ هما

(أ) ٤س - ٥ص = ٠ ، ٤س + ٥ص = ٠

(ب) ٢ - $\sqrt{٥}$ص = ٠ ، ٢ + $\sqrt{٥}$ص = ٠

(ج) ٢ص - $\sqrt{٥}$س = ٠ ، ٢ص + $\sqrt{٥}$س = ٠

(د) $\frac{١}{٥}$ص = $\frac{١}{٤}$س ، $\frac{١}{٥}$ص = - $\frac{١}{٤}$س

١٠ معادلتا الخطين التقاربيين للقطع الزائد: $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$ هما

(أ) ص = ± $\frac{٤}{٥}$س (ب) ص = ± $\frac{٥}{٤}$س

(ج) ص = ± $\frac{١٦}{٢٥}$ (د) ص = ± $\frac{٢٥}{١٦}$

١١ معادلتا الخطين التقاربيين للقطع الزائد: $\frac{س^٢}{٨} - \frac{ص^٢}{٣٢} = ٢$ هما

(أ) ص = ±٢س (ب) ص = ± $\frac{١}{٢}$س

(ج) ص = ±٤س (د) ص = ± $\frac{١}{٤}$س

١٢ طول المحور الأكبر في القطع الناقص $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ٤$ بوحدات الطول يساوي

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٢٠ (د) ١٦

١٣ لأي قطع ناقص يكون

(أ) أ > جـ (ب) أ < جـ (ج) أ = e جـ (د) أ = جـ

١٤ لأي قطع زائد يكون

(أ) أ = جـ (ب) $أ^٢ - ب^٢ = جـ^٢$

(ج) $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$ (د) جـ = أب

أسئلة مقالية:

• أجب عن الأسئلة التالية:

١ أوجد إحداثيات البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $س^٢ = -١٢ص$

٢ أوجد معادلة القطع المكافئ في وضعه القياسي وكذلك البؤرة إذا علمت أن معادلة الدليل لهذا القطع هي ص = ٤.

٣ أوجد البؤرتين لقطع ناقص في وضع قياسي إذا كان الاختلاف المركزي $\frac{١}{٢}$ وأحد رأسيه (٦ ، ٠).

٤ أوجد بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠) وأحد رأسيه النقطة (٠ ، -٤) واختلافه المركزي $\frac{٣}{٨}$.

٥ إذا كانت النقطة (٨ ، ٠) إحدى بؤرتي قطع ناقص في وضعه القياسي والنقطة (١٠ ، ٠) إحدى رأسيه. أوجد كلاً من:

أ الاختلاف المركزي.

ب طول كلٍّ من المحور الأكبر والمحور الأصغر.

٦ أوجد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الأصغر = ١٢ ومركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه (٠ ، ٤).

٧ أوجد البؤرتين وطول كلٍّ من المحورين الأكبر والأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٦٤$

٨ أوجد معادلة القطع الزائد في وضعه القياسي إذا كانت النقطة (٠ ، ٤) إحدى بؤرتيه والاختلاف المركزي له = $\frac{١٢}{٥}$

٩ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه النقطة (٠ ، $\sqrt{٤١}$٧) والمار بالنقطة (٥ ، ٠)

١٠ قطع زائد مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه النقطة (٥ ، ٠) والاختلاف المركزي له = $\frac{٧}{٥}$ أوجد كلاً من:

أ البؤرتين.

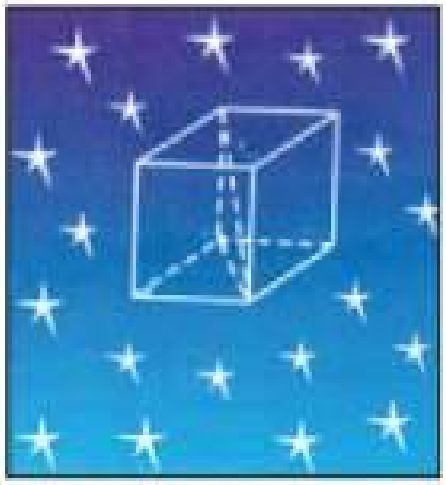
ب معادلة القطع الزائد.

جـ معادلة الخطين التقاربين.

هندسة الفضاء

Space Geometry

الفصل الثالث

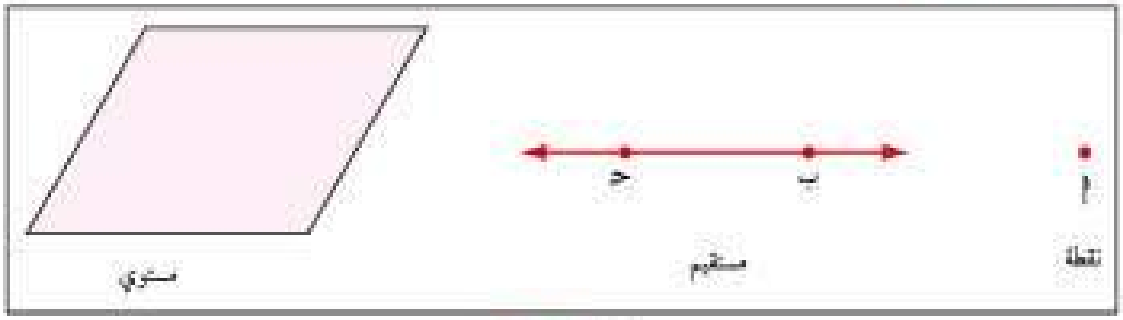


الفضاء ذو ثلاثة الأبعاد - موضوعات الفضاء

٣-١

the three dimensional space - Axioms of the space

سبق لك معرفة بعض الكلمات الأولية من خلال دراستك للهندسة المستوية مثل: النقطة والمستقيم والمستوي:



شكل ٣-١

وعلمت أن المستوي هو مجموعة غير منتهية من النقاط، ولو أخذت أي نقطتين تنتميان للمستوي فإن المستقيم المار بهاتين النقطتين يقع بتمامه في هذا المستوي (أي أنه محتوى في المستوي).

شكل ٣-٢

كما تعرفت إلى بعض السطوح، وعلمت أن منها المستوي وغير المستوي، فمثلاً كل من سطح الحائط، وسطح لوح زجاجة النافذة، وأرضية الغرفة، وسطح المنضدة، . . . يمكن أن تمثل سطوحاً مستوية. في حين أن سطح الكرة، وسطح قبة المسجد، وسطح المثلثة، وسطح أنبوبة الاختبار، . . . ، كلها سطوح غير مستوية. . فسطح الكرة مثلاً (سطحٌ كرويٌ) سطح غير مستوٍ، ذلك لأن المستقيم المار بنقطتين من نقاط سطح الكرة لا يشترك معه إلا في هاتين النقطتين، وكذلك سطح المثلثة وسطح أنبوبة الاختبار كل منهما ليس سطحاً مستوياً، ذلك لأن المستقيم المار بنقطتين على سطح أي منهما لا يشترك معه إلا في هاتين النقطتين ما لم يكن موازياً لمحور الأسطوانة.

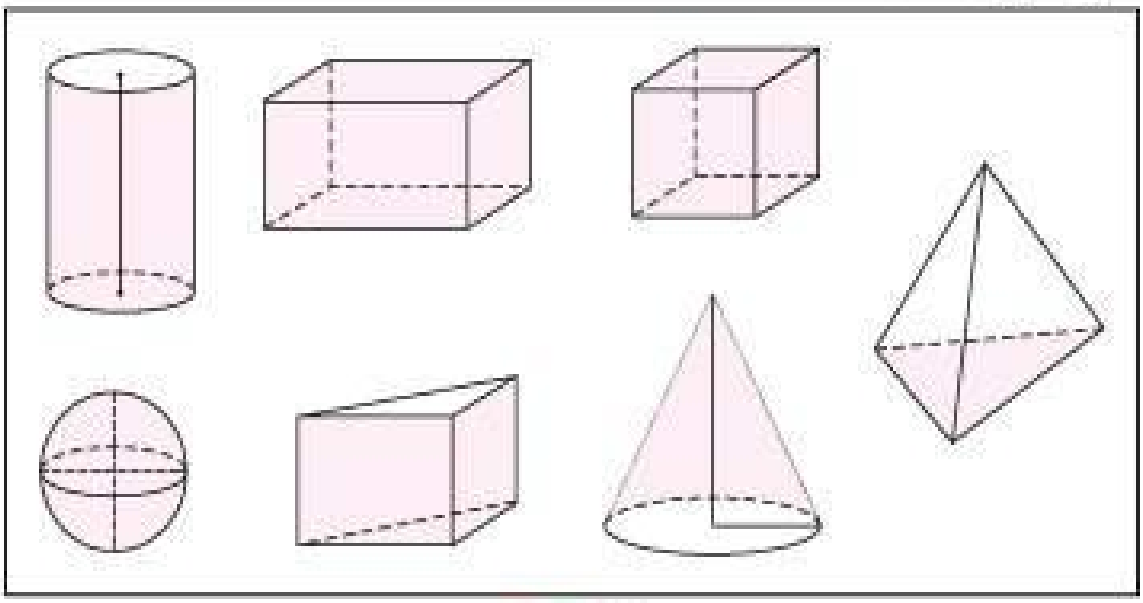
في شكل (٣ - ٢) هـ ، و نقطتان على سطح قبة المسجد، والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ لا يشترك مع هذا السطح إلا في النقطتين هـ ، و .

كذلك، س ، ص نقطتان على سطح المثلثة، والمستقيم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ لا يشترك مع هذا السطح إلا في النقطتين س ، ص.

بينما $\overline{\text{أب}}$ محتواة في سطح المثلثة لأنها توازي محور المثلثة.

فيما يلي بعض المجسمات مثل: المكعب، شبه المكعب، المنشور، الأسطوانة الدائرية القائمة، المخروط، الكرة، الهرم الثلاثي، . . . ، وهي جميعاً ترتبط بمفهوم «الحجم».

انظر شكل (٣ - ٣).



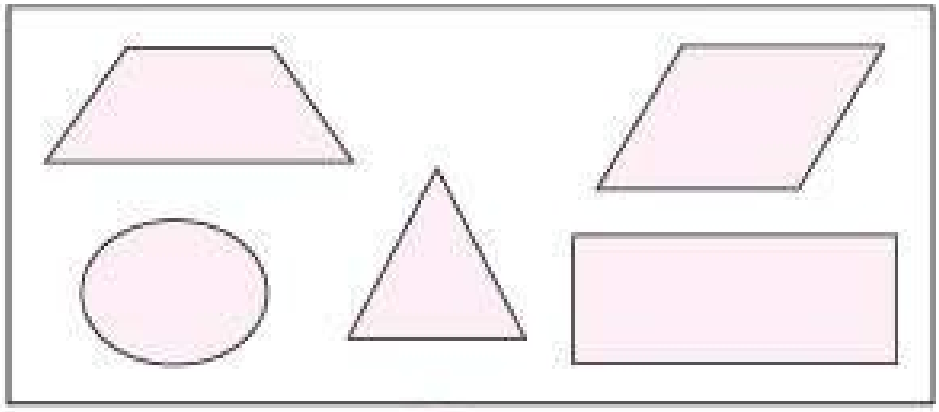
شكل ٣-٣

بجانب الكلمات الأولية الثلاث: النقطة، المستقيم والمستوي التي سبق لك معرفتها في السابق، سنحتاج في دراستنا الحالية إلى تعرّف كلمة أولية رابعة هي «الفضاء». وسنعرفه من خلال ما يحيط بنا من أجسام مادية. . .

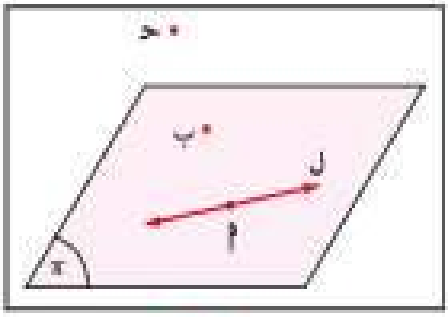
الأجسام المادية من حولنا كثيرة ومتعددة؛ قصور، بنايات، أبراج، قلاع، أثاث، . . . وكل منها يشغل حيزاً من الفضاء. حيث يعبر هذا الحيز الذي يشغله الجسم عن «حجمه». وتوصف هذه الأجسام بأنها أشكال هندسية ذات ثلاثة أبعاد، والدراسة الهندسية لهذه الأجسام تسمى «هندسة الفضاء»، وهي علم يبحث في خواص هذه الأجسام والأشكال التي لا تقع كل عناصرها في مستوي واحد من حيث خواصها الأساسية وأبعادها ومساحاتها وحجومها، . . . دون التعرض إلى خواص المواد المكونة لها.

وكما أن المستقيم مجموعة غير منتهية من النقاط، والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط، والفضاء أيضاً مجموعة غير منتهية من النقاط يرمز لها عادة بالرمز «ف»، وتكون الخطوط والمستقيمات والمستويات والسطوح والأجسام مجموعات جزئية من الفضاء ف.

ويمتد كل مستوٍ في الفضاء «ف» بلا حدود ويمكن أن نتصور امتداده من جميع جهاته، إلا أننا عند تمثيله بالرسم نكتفي برسم منطقة على شكل مستطيل أو متوازي أضلاع أو شبه منحرف أو مثلث أو دائرة. . . إلخ. انظر شكل (٣ – ٤).



شكل ٣-٤



شكل ٣-٥

وسنرمز للمستوي في هذا الفصل بالرمز π أو هـ وإذا كان المستقيم ل محتوى في المستوي π فنرمز لذلك بالرمز ل ⊆ π وهذا يكافئ القول أن المستوي π يحوي المستقيم ل ففي شكل (٣ – ٥)

أ ∈ ل بينما ب ∉ ل

وكذلك أ ∈ π ، ب ∈ π بينما حـ ∉ π ونلاحظ أن ل ⊆ π.

موضوعات الفضاء

يبنى علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقاً من التسليم بصحة عبارات أولية دون برهان، تسمى «موضوعات»، أو «مسلمات»، أي أن الموضوعة هي عبارة رياضية نقبلها دون برهان.

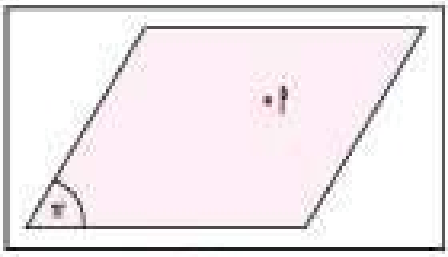
وفيما يلي نعرض موضوعات الفضاء تمهيداً لدراسة بعض النظريات المتعلقة بالمستقيمات والمستويات في الفضاء.

أولاً: المستقيم

موضوعة ١

كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

اعتبر أي نقطة أ في المستوي π شكل (٣ – ٦). كم مستقيماً يمكن أن يمر بالنقطة أ ؟ واضح أن عدداً لانهائياً من المستقيمات يمكن أن يمر بالنقطة أ .



شكل ٣-٦

وإذا كانت النقطة أ واقعة في الفضاء ف، فكم مستقيماً يمكن أن يمر بهذه النقطة؟

من الواضح أن أي نقطة في الفضاء ف يمكن أن يمر بها عدد لانهائي من المستقيمات،

إذا كانت ب ، حـ نقطتين مختلفتين في مستوٍ، فكم مستقيماً يمكن أن يمر بهما؟

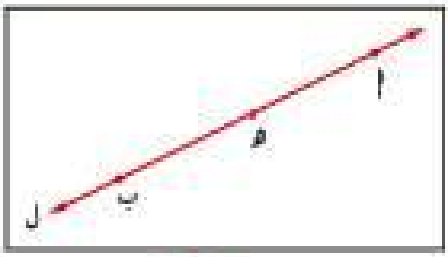
نعلم في السابق أن مثل هاتين النقطتين يمر بهما مستقيم واحد $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، وعلى ذلك يعين المستقيم بنقطتين مختلفتين. . وفي هذه الحالة نكتب ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

كذلك، إذا كانت ب ، حـ نقطتين مختلفتين في الفضاء ف، فكم مستقيماً يمكن أن يمر بهما؟ والإجابة عن هذا السؤال تقودنا إلى الموضوعة التالية:

موضوعة ٢

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.

اعتبر المستقيم ل في شكل (٣ – ٧)، حيث كل من أ ، هـ ، ب ∈ ل. نقول إن النقاط أ ، هـ ، ب المنتمية إلى المستقيم ل على استقامة واحدة.



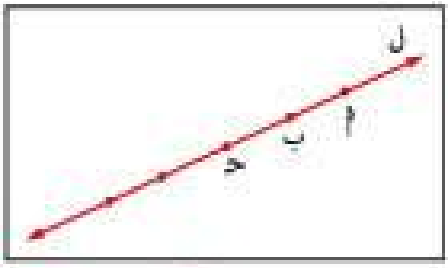
شكل ٣-٧

نقول لمجموعة من نقاط المستوي π أنها على استقامة واحدة (أو مستقيمة) إذا وجد في المستوي π مستقيم ل تنتمي إليه هذه النقاط.

تعريف ١

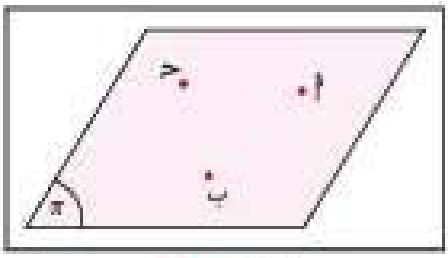
نقول لمجموعة نقاط في الفضاء ف أنها مستقيمة إذا وجد في الفضاء ف مستقيم ل تنتمي إليه هذه النقط.

انظر شكل (٣ – ٨)



شكل ٣-٨

ثانياً: المستوي



شكل ٣-٩

لتكن أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط ليست مستقيمة تنتمي إلى المستوي π شكل (٣ - ٩).

هل يمكنك رسم نقاط أخرى غير أ ، ب ، جـ تنتمي إلى المستوي π؟

كم عدد النقاط التي يمكن أن يحتويها المستوي π؟

ارسم مستقيماً يحوي نقطتين مختلفتين من نقاط المستوي π.

هل يمكنك رسم مستقيمات أخرى يحويها المستوي π؟

كم عدد المستقيمات التي يحويها المستوي π؟

من الواضح أن المستوي π يحوي عدداً لا نهائياً من النقاط، ويحوي أيضاً عدداً لا نهائياً من المستقيمات.

موضوعة ٣

في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقط ليست مستقيمة.

موضوعة ٤

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث نقاط مختلفة وليست مستقيمة فيوجد مستوٍ وحيد يحويها.

تعريف ١

نقول عن مجموعة من النقط أنها مستوية (أو تقع في مستوٍ واحد) إذا وجد مستوٍ ما يحويها.

ثالثاً: الفضاء

ما الحد الأدنى لعدد النقاط التي يحتويها الفضاء؟

وما الحد الأدنى لعدد المستويات التي يمكن أن يحتويها الفضاء؟

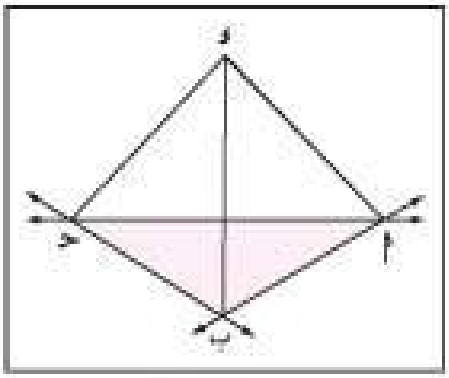
اعتبر النقاط أ ، ب ، حـ غير المستقيمة الموضحة في شكل (٣ – ١٠)

أ ، ب ، حـ تعين مستوياً وحيداً أ ب حـ.

خذ نقطة مثل ء ∉ المستوي أ ب حـ.

لاحظ أن النقاط الأربع أ ، ب ، حـ ، ء تنتمي إلى الفضاء ولا تقع جميعها في مستوٍ واحد.

نقول إن أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط غير مستوية.



شكل ٣-١٠

موضوعة ٥

يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

كم مستوياً في شكل (٣ – ١٠)؟

لاحظ وجود أربعة مستويات في الشكل:

المستوي أ ب حـ ، ويتعين بالنقاط الثلاث غير المستقيمة أ ، ب ، حـ.

المستوي ء أ ب ، ويتعين بالنقاط الثلاث غير المستقيمة ء ، أ ، ب.

المستوي ء ب حـ ، ويتعين بالنقاط الثلاثة غير المستقيمة ء ، ب ، حـ.

المستوي ء حـ أ ، ويتعين بالنقاط الثلاث غير المستقيمة ء ، حـ ، أ.

كم مستوياً يمكن أن يحتوي الفضاء؟

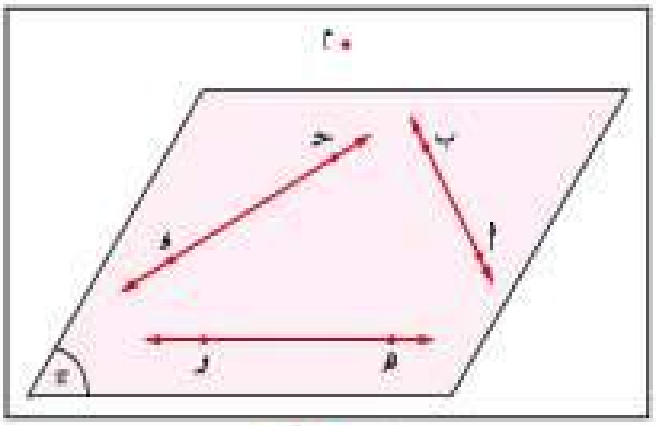
الموضوعة (٥) تقودنا إلى أن الفضاء يحوي أربعة مستويات مختلفة على الأقل.

موضوعة ٦

إذا اشترك مستقيم ل ومستوٍ π في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم ل يقع بكامله في المستوي π.

أي أنه لأي نقطتين أ ، ب ومستقيم ل ومستوي π:

أ ، ب ∈ ل ∩ π ⇐ ل ⊆ π



شكل ٣-١١

مثال ١

في شكل (٣ - ١١):

المستوي π يحوي المستقيمات $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د ح}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ خذ نقطة مثل م تنتمي إلى الفضاء ولا تنتمي إلى المستوي π.

عيّن مستويات أخرى غير المستوي π يحتويها الفضاء.

الحل

من هذه المستويات والتي يحتويها الفضاء:

المستوي م ا ب ، ويتعين بالنقاط م ، ا ، ب ،

المستوي م ح د ، ويتعين بالنقاط م ، ح ، د.

المستوي م هـ و ، ويتعين بالنقاط م ، هـ ، و.

والآن في مثال (١) السابق:

هل يقع $\overleftrightarrow{\text{م ا}}$ في المستوي π ؟

وهل يقع $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ في المستوي π ؟

وهل يقع $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ في المستوي π ؟

نلاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{م ا}}$ ⊆ المستوي م ا ب ولكن $\overleftrightarrow{\text{م ا}}$ ⊈ π

وكذلك $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ⊆ المستوي م ا ب ولكن $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ⊈ π

وهكذا ■

∴ مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.

تعريف ٣

يتقاطع مستقيمان ل ، م إذا وجدت نقطة وحيدة ا مشتركة بينهما (أي أن ل ∩ م = {ا}) تتلاقى عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة ا مشتركة بينهما (أي أن ل ∩ م ∩ ..... ∩ ن = {ا})

تعريف ٤

يكون المستويان المختلفان π_1 ، π_2 متقاطعين إذا كان $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi$

موضوعة ٧

إذا اشترك مستويان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

ملاحظة :

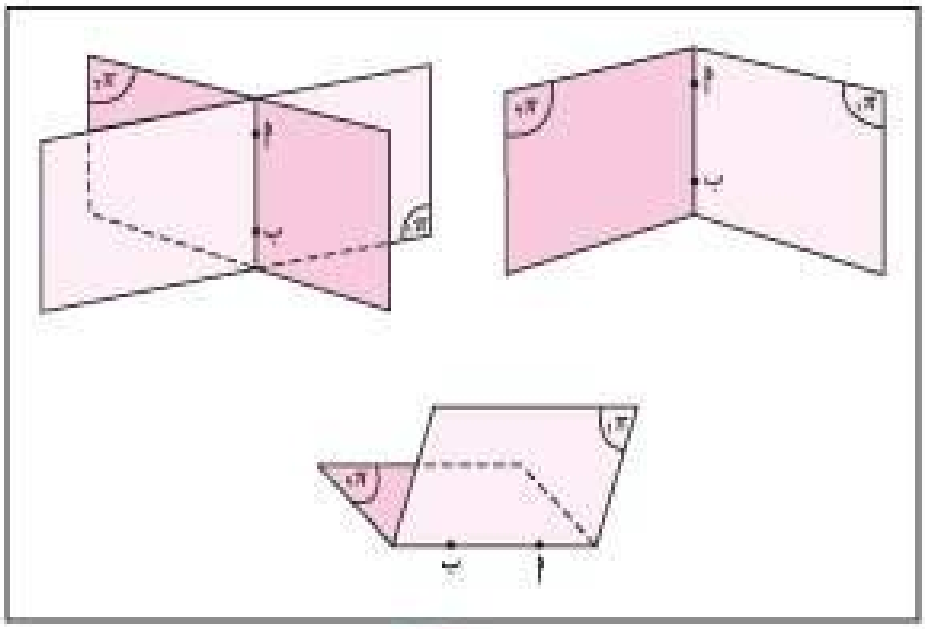
إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست مستقيمة، فإن هذين المستويين يكونان منطبقين.

نظرية ١

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.

ملاحظة :

يسمى المستقيم المشترك بين المستويين خط تقاطع المستويين.



شكل ٣-١٢

ففي شكل (٣ - ١٢)

أ ، ب $\in \overleftrightarrow{أب}$ ، أ ، ب $\in \pi_1 \cap \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{أب} \subseteq \pi_1$

$\overleftrightarrow{أب} \subseteq \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{أب} = \pi_1 \cap \pi_2$

نظرية ٢

يوجد مستوٍ وحيد (واحد وواحد فقط) يحوي مستقيماً معلوماً ويمر بنقطة خارجة عن هذا المستقيم.

نتيجة

المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوياً وحيداً.

تعريف ٥

يسمى المستقيمان ل ، ك متوازيين إذا كانا غير متقاطعين ويجمعهما مستوٍ واحد.

ويلاحظ من هذا التعريف ومن تعريف التقاطع أن كل مستقيم موازٍ لنفسه.

ملاحظة:

إذا كان المستقيمان ل ، ك متوازيين فنعبر عن ذلك بالرمز ل // ك.

موضوعة ٨

يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيماً معلوماً ويمر بنقطة معلومة.

شكل ٣-١٣

في شكل (٣ - ١٣):

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مستقيم معلوم،

أولاً: إذا كانت و نقطة معلومة، و $\notin$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطة و ويوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

ثانياً: وإذا كان و' نقطة معلومة، و' $\in$ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ فإن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هو المستقيم الوحيد الذي يمر بالنقطة و' ويوازي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

نظـرية ٣

المستقيمان المختلفان والمتوازيان يحددان مستوياً وحيداً.

مما تقدم نلاحظ ما يلي:

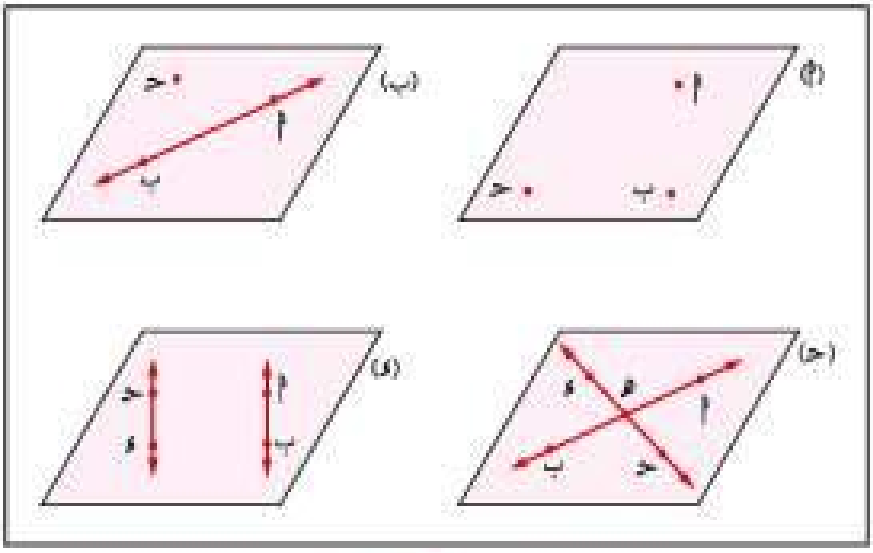
يتعين المستوي في الفضاء بإحدى الحالات الأربع التالية:

١ بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة. شكل (٣ - ١٤أ).

٢ بمستقيم ونقطة خارجة عنه (لا تنتمي إليه). شكل (٣ - ١٤ب).

٣ بمستقيمين متقاطعين. شكل (٣ - ١٤ حـ).

٤ بمستقيمين مختلفين متوازيين - شكل (٣ - ١٤ ء).



شكل ٣-١٤

ملاحظة:

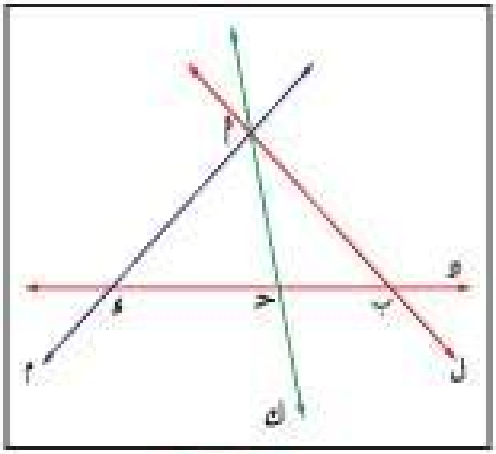
كل من الحالات الأربع سابقة الذكر تعين مستوياً وحيداً.

مثال ٢

لتكن ل ، ك ، م ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة أ ، ن مستقيم يقطع المستقيمات الثلاثة في النقط ب ، حـ ، ء على الترتيب، أثبت أن المستقيمات الأربعة تقع في مستوٍ واحد.

المعطيات:

ل ، ك ، م ثلاثة مستقيمات متلاقية في أ ، المستقيم ن يقطع المستقيمات الثلاثة في ب ، حـ ، ء على الترتيب.



شكل ٣-١٥

المطلوب:

إثبات أن المستقيمات ل ، ك ، م ، ن تقع في مستوٍ واحد.

البرهان:

ليكن π هو المستوي الوحيد المحدد بالمستقيم ن وبالنقطة الخارجة عنه أ .

المستقيم ل يشترك مع المستوي π في النقطتين المختلفتين ب ، أ .

المستقيم ك يشترك مع المستوي π في النقطتين المختلفتين حـ ، أ .

والمستقيم م يشترك مع المستوي π في النقطتين المختلفتين ء ، أ .

لذا فإن المستقيمات ل ، ك ، م تقع بكاملها في المستوي π الذي يحوي المستقيم ن أصلاً.

∴ المستقيمات الأربعة تقع في مستوي واحد π.

وهو المطلوب إثباته. ■

تمارين

٣ - ١

بنود موضوعية:

- لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح.

١ عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هو:

(أ) $^{٣}ل_{٢}$ (ب) $\binom{٣}{٢}$ (ج) $\binom{٣}{٣}$ (د) $٣^{٢}$

٢ عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها من أربع نقاط ليست أي ثلاث منها على استقامة واحدة هو.

(أ) $^{٤}ل_{٢}$ (ب) $\binom{٤}{٢}$ (ج) $\binom{٤}{٣}$ (د) $^{٤}ل_{٣}$

أسئلة مقالية:

- **أولاً: أكمل ما يلي:**

١ يتحدد المستقيم بـ .....

٢ كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين .....

٣ عدد المستقيمات التي يمكن تحديدها بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو .....

٤ إذا كان $\{أ ، ب ، ج\} \subseteq \pi_{١} \cap \pi_{٢}$ فإن $\pi_{١} ، \pi_{٢}$ .....

٥ إذا كان $\{أ ، ب\} \subseteq ل \cap \pi$ فإن ل ..... π

٦ إذا كان ل // م فإن:

أ .....

ب .....

- **ثانياً:**

لتكن $ل_{١} ، ل_{٢} ، ل_{٣} ، ل_{٤}$ أربعة مستقيمات مختلفة ليس بينها أي ثلاثة متلاقية. فإذا تقاطعت هذه المستقيمات مثنى مثنى. أثبت أنها جميعاً تقع في مستوٍ واحد، ثم اذكر عدد نقاط التقاطع.

٣-٢ أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

Studid lines and planes in the space

أولاً: الأوضاع المختلفة لمستقيمين مختلفين في الفضاء

يمكن حصر الأوضاع المختلفة لمستقيمين مختلفين ل ، م في الفضاء في حالات ثلاث: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.

تعريف ٦

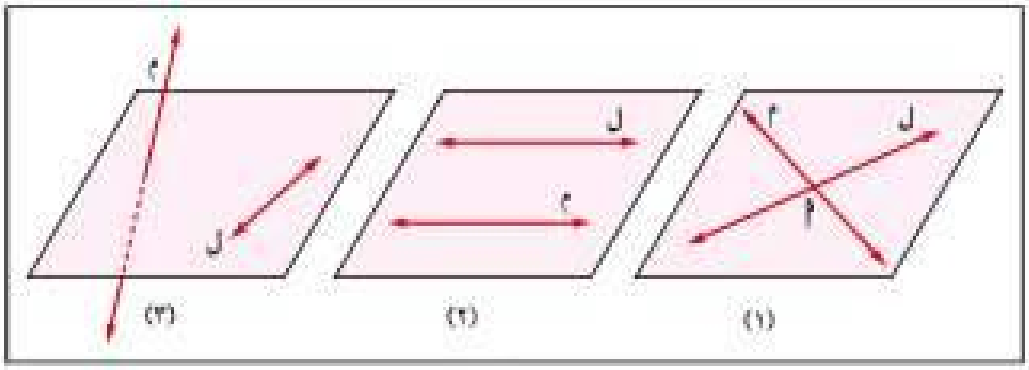
يقال لمستقيمين ل ، م في الفضاء إنهما:

١ متقاطعان، إذا كان بينهما نقطة مشتركة واحدة فقط.

٢ متوازيان، إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.

٣ متخالفان، إذا كانا لا يحويهما مستوٍ واحد.

وشكل (٣ - ١٦) يوضح الحالات الثلاث.

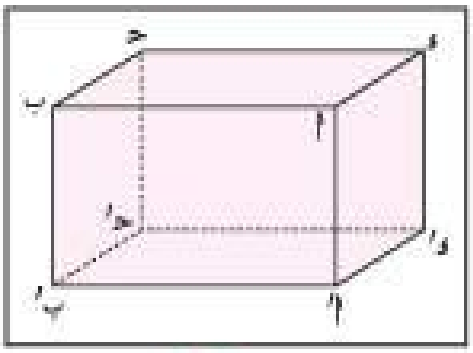


شكل ٣-١٦

نظرية ٤

إذا كان ل ، م مستقيمين متخالفين فإن ل ∩ م = ∅

تدريب (١):



شكل (٣-١٧)

في شكل (٣ - ١٧) تخطيط هندسي لقاعة دراسية والتي على شكل متوازي مستطيلات (أو شبه مكعب).

١ الحرف $\overline{\text{أب}}$ يوازي الحرف $\overline{\text{ء حـ}}$

اذكر الأحرف الأخرى التي توازي الحرف $\overline{\text{ء حـ}}$

٢ الحرف $\overline{\text{ء ء'}}$ يوازي الحرف $\overline{\text{أأ'}}$.

اذكر الأحرف الأخرى التي توازي الحرف $\overline{\text{أأ'}}$

٣ المستوي أب حـ ء يحوي الحرفين $\overline{\text{ء أ}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}}$.

اذكر المستوي الذي يحوي الحرفين $\overline{\text{حـ حـ'}}$ ، $\overline{\text{ب ب'}}$ ، واذكر المستوي الذي يحوي الحرفين $\overline{\text{أأ'}}$ ، $\overline{\text{ء ء'}}$.

٤ الحرف $\overline{\text{حـ ء}}$ يتقاطع مع الحرف $\overline{\text{أ ء}}$ في نقطة ء.

اذكر الأحرف الأخرى المتقاطعة مع الحرف $\overline{\text{أ ء}}$ ، واذكر الأحرف المتقاطعة مع الحرف $\overline{\text{أ' ب'}}$.

٥ $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ء' أ'}}$ متخالفان

اذكر أربعة أزواج من الأحرف المتخالفة.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين:

لقد عرفنا في الهندسة المستوية أن المستقيمين في المستوي، إما أن يتقاطعا وإما أن يتوازيا. ونتفق على أنه في حالة المستقيمين المتقاطعين وغير المتعامدين يكون قياس الزاوية بين المستقيمين هو قياس الزاوية الحادة بينهما.

وفي حالة المستقيمين المتعامدين فمعلوم أن قياس الزاوية بينهما = ٩٠°.

وفي حالة المستقيمين المتوازيين يكون قياس الزاوية بينهما = ٠°.

والآن ماذا عن قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين؟

تعريف ٧

قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين هو قياس إحدى الزوايا التي يصنعها أحد هذين المستقيمين مع أي مستقيم ثالث مرسوم من نقطة عليه موازياً المستقيم الآخر.

لتوضيح ذلك: انظر الشكل (٣ – ١٨):

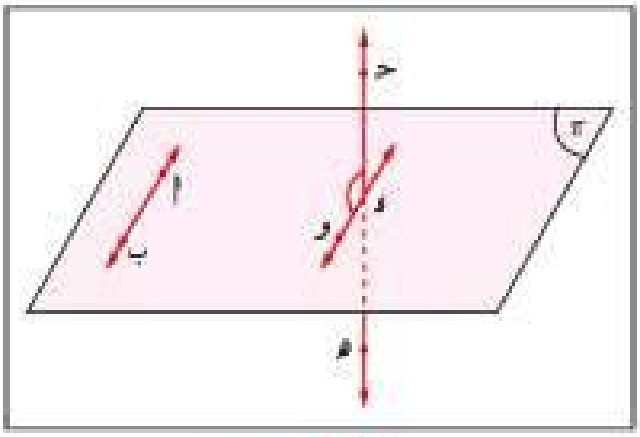
$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ متخالفان

$\overleftrightarrow{أب}$ يقع في المستوي π

$\overleftrightarrow{حـ هـ}$ يقطع المستوي π في ء.

بالإمكان رسم مستقيم $\overleftrightarrow{ء و}$

من نقطة ء موازياً $\overleftrightarrow{أب}$



شكل ٣-١٨

فيكون قياس الزاوية بين المستقيمين المتخالفين $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ هو قياس الزاوية الحادة من إحدى الزاويتين: $حـ \hat{ء} و$ ، $و \hat{ء} هـ$ إذا كانتا غير متطابقتين. وأي منهما إذا كانتا متطابقتين (أي قائمتين).

ملاحظة:

إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين ٩٠° يقال إنهما مستقيمان متخالفان متعامدان.

تدريب (٢)

في شكل (٣ – ١٧) السابق:

الحرفان $\overline{ء حـ}$ ، $\overline{حـ' ب'}$ متخالفان متعامدان ذلك لأن:

$\overline{ء حـ} \cap \overline{حـ' ب'} = \phi$ ولا يجمعهما مستوٍ واحد،

ق $(ء' \hat{حـ'} ب') = ٩٠°$ حيث $\overline{ء' حـ'} \parallel \overline{ء حـ}$

سمِّ ثلاثة أزواج أخرى من الأحرف المتخالفة المتعامدة.

تدريب (٣):

تأمل قاعة دراستك:

١ عيّن زوجين من المستقيمات المتخالفة والمتعامدة.

٢ عين زوجين من المستقيمات المتخالفة وغير المتعامدة إن أمكن.

ثانياً: الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوٍ في الفضاء.

يمكن حصر الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوٍ في الفضاء في الحالات الثلاث التالية:

- المستقيم يقع بتمامه في المستوي.

- المستقيم يقطع المستوي في نقطة واحدة فقط .
- المستقيم لا يشترك مع المستوي في أية نقطة .

تعريف ٨

إن المستقيم ل يقطع المستوي π إذا كان بين ل ، π نقطة مشتركة واحدة فقط .

انظر شكل (٣ - ١٩ أ)

حيث ل ∩ π = {أ} .

تعريف ٩

المستقيم ل الذي لا يقطع المستوي π يسمى مستقيماً موازياً للمستوي π .

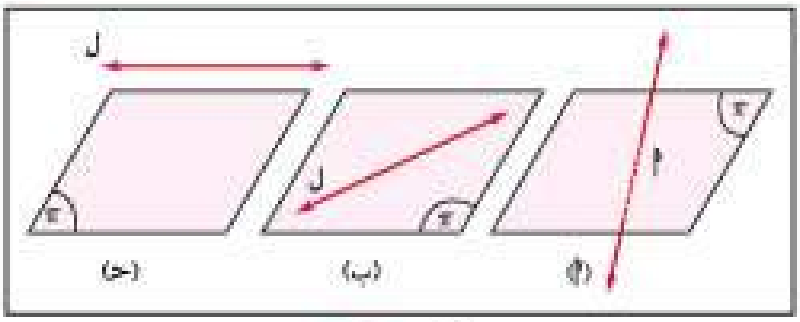
انظر شكل (٣ - ١٩ ب ، حـ)

حيث المستقيم ل موازياً

للمستوي π (ونكتب ل // π)

إذا كان ل ⊆ π

أو ل ∩ π = ∅ .

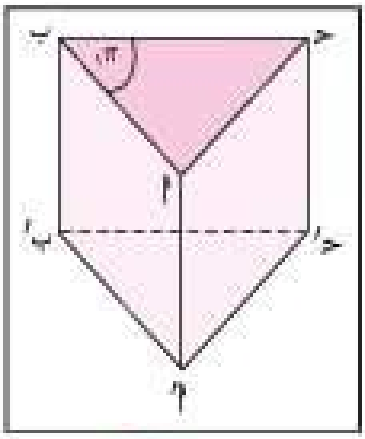


شكل ٣-١٩

تدريب (٤):

في الشكل (٣ - ٢٠)

يمثل أ ب حـ أ′ ب′ حـ′ منشوراً ثلاثياً قائماً:



شكل ٣-٢٠

أ كم وجهاً للمنشور الثلاثي؟

ب كم حرفاً للمنشور الثلاثي؟

حـ عيّن المستوي الذي يحوي النقطة أ′ ويوازي π ، .

ء عيّن مستوياً يوازي $\overleftrightarrow{أأ'}$.

هـ اذكر أزواجاً من الأحرف المتخالفة في الشكل.

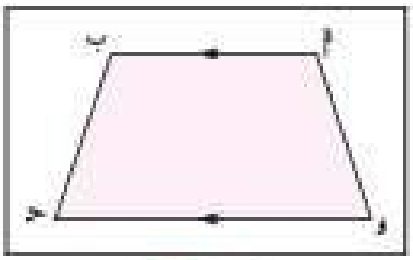
و اذكر الأوجه المشتركة في النقطة ب.

ز اذكر الأحرف المشتركة في الرأس حـ.

ح اذكر ثلاثة مستويات تحوي الحرف ب، $\overline{\text{حـ}}$.

مثال ١

أثبت أن أضلاع أي شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان تقع جميعاً في مستوٍ واحدٍ.



شكل ٣-٢١

المعطيات: أ ب حـ د شكل رباعي فيه $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـ د}}$

المطلوب: إثبات أن: $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ تقع جميعاً في مستوٍ واحد.

البرهان:

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـ د}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ يحددان مستوياً وحيداً وليكن π (نظرية).

∵ النقطتان أ ، د تنتميان للمستوي π.

∴ $\overline{\text{أد}} \subseteq \pi$.

∵ النقطتان ب ، حـ تنتميان للمستوي π.

∴ $\overline{\text{ب حـ}} \subseteq \pi$

∴ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ ، $\overline{\text{د أ}}$ تقع في مستوٍ واحد. ■

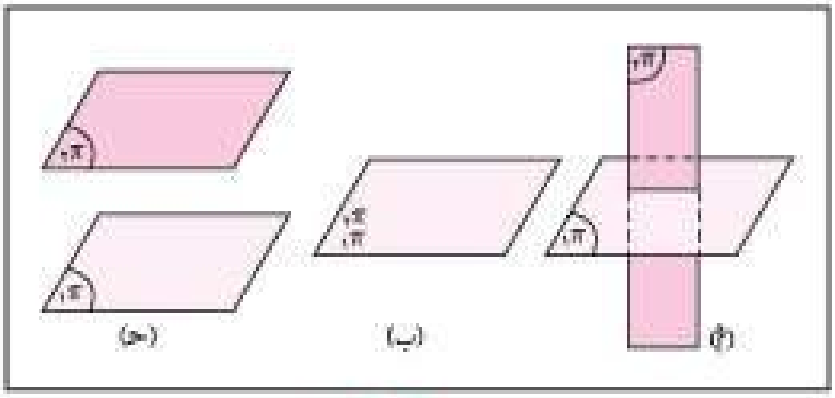
ثالثاً: الأوضاع المختلفة لمستويين في الفضاء:

يمكن حصر الأوضاع المختلفة لمستويين π_1 ، π_2 في الفضاء في الحالات الثلاث التالية:

١ المستويان يتقاطعان في مستقيم ل: $\pi_1 \cap \pi_2 = \text{ل}$ شكل (٣ - ٢٢ أ)

٢ المستويان يشتركان في جميع النقاط: $\pi_1 = \pi_2$ شكل (٣ - ٢٢ ب)

٣ المستويان لا يشتركان في أية نقطة: $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ شكل (٣ - ٢٢ حـ)



شكل ٣-٢٢

في الحالتين الأخيرتين نقول إن المستويين متوازيان، ونكتب $\pi_1 // \pi_2$.

تعريف ١٠

يقال لمستويين π_1 ، π_2 إنهما متوازيان (ونكتب $\pi_1 // \pi_2$)

إذا كان $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ أو $\pi_1 = \pi_2$

موضوعة ٩

يوجد مستوٍ وحيد يوازي مستوياً معلوماً ويمر بنقطة معلومة.

في شكل (٣ - ٢٣): π مستوٍ معلوم،

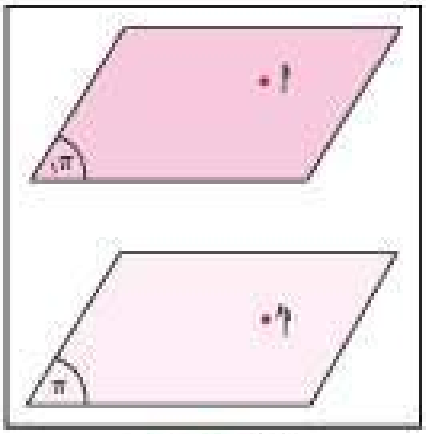
أولاً: إذا كانت أ نقطة معلومة، أ $\notin \pi$.

فإن المستوي π_1 هو المستوي الوحيد الذي يحوي النقطة أ ويوازي المستوي المعلوم π .

ولا يمكن رسم مستوٍ آخر موازياً للمستوي π ويمر بالنقطة أ .

ثانياً: إذا كانت أ' نقطة معلومة، أ' $\notin \pi_1$

فإن المستوي π هو المستوي الوحيد الذي يحوي النقطة أ' ويوازي المستوي المعلوم π_1 .



شكل ٣-٢٣

تمارين ٣ - ٢

بنود موضوعية:

- ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة مع ذكر السبب (باعتبار ل ، م مستقيمين ، π مستوياً).

١ يكون المستقيم قاطعاً للمستوي عندما تكون إحدى نقاطه فقط واقعة في المستوي.

٢ يكون المستقيم واقعاً في المستوي في الحالة التي يشترك فيها مع المستوي في نقطتين من نقاطه على الأقل.

٣ إذا وازى مستقيمٌ مستوياً فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقطهما.

٤ المستقيم الواقع في أحد مستويين متوازيين يوازي المستوي الآخر.

٥ يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

٦ يتقاطع المستويان في مستوٍ.

٧ إذا كان ل ⊆ π فإن ل ∩ π = ϕ

٨ إذا كان ل // π فإن ل ∩ π = {أ} حيث أ نقطة.

٩ إذا كان ل ∩ π = ϕ فإن ل // π

١٠ إذا كان ل ∩ π = {أ} ، م ⊆ π فإن ل ∩ م = {أ} حيث أ نقطة

أسئلة مقالية:

١ ارسم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ الذي يقطع مستوياً π_1 في نقطة ب، ثم ارسم المستوي π_2 الذي يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة ب.

٢ ارسم الهرم الثلاثي أب حـ ء:

أ كم وجهاً للهرم الثلاثي؟

ب كم حرفاً للهرم الثلاثي؟

حـ اكتب أزواجاً من الأحرف المتخالفة.

٣-٣

The lines and the planes are parallels

نظـريـة ٥

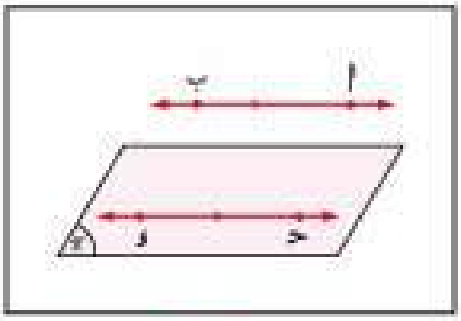
إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيماً في المستوي فإنه يوازي هذا المستوي.

المعطيات:

في شكل (٣ - ٢٤):

$\overleftrightarrow{أب}$ خارج المستوي π، $\overleftrightarrow{حـ د}$ واقع في المستوي π،

أي أن $\overleftrightarrow{حـ د} \subseteq \pi$ ، $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـ د}$



شكل ٣-٢٤

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} \parallel \pi$

البرهان:

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـ د}$ فرضاً

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ د}$ يعينان مستوياً، π، يقطع π في $\overleftrightarrow{حـ د}$ انظر شكل (٣ - ٢٥):

نفرض أن $\overleftrightarrow{أب}$ لا يوازي المستوي π

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع المستوي π في نقطة

تنتمي إلى كل من π ، π،

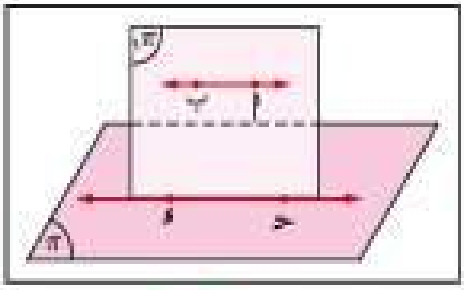
أي أن $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع المستوي π في نقطة

من نقاط خط تقاطع π ، π، (وهو $\overleftrightarrow{حـ د}$)

وهذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـ د}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ لا يمكن أن يقطع المستوي π

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \pi$ وهو المطلوب إثباته.



شكل ٣-٢٥

نظرية ٦

إذا وازى مستقيم مستوياً فكل مستوٍ مار بالمستقيم وقاطع المستوي المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.

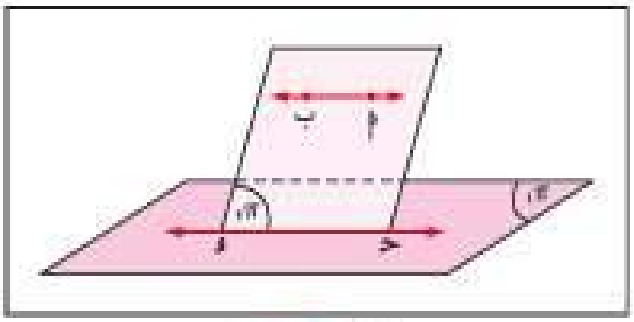
المعطيات:

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \pi_1$

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \pi_2$

$\overleftrightarrow{حـ د}$ خط تقاطع π_1 ، π_2

انظر شكل (٣ - ٢٦)



شكل ٣-٢٦

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـ د}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \pi_1$ فرضاً

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ لا يقطع المستوي π_1

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ لا يلاقي أي مستقيم يقع في المستوي π_1

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب}$ لا يلاقي $\overleftrightarrow{حـ د}$ _____ (١)

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ د}$ واقعان في المستوي π_2 _____ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{حـ د}$ وهو المطلوب إثباته

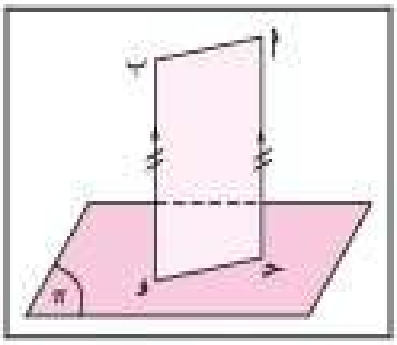
مثال ١

في شكل (٣ - ٢٧):

النقطتان حـ ، د تنتميان إلى المستوي π_1

$\overline{أحـ} \parallel \overline{ب د}$ ، أحـ = ب د.

برهن على أن $\overline{أب} \parallel \pi$



شكل ٣-٢٧

المعطيات:

حـ ، ء ∈ π ، $\overline{\text{أحـ}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ ، أحـ = ب ء

المطلوب:

إثبات أن $\overline{\text{أب}}$ // π

البرهان:

∵ $\overline{\text{حـ أ}}$ // $\overline{\text{ء ب}}$ ، حـ أ = ء ب

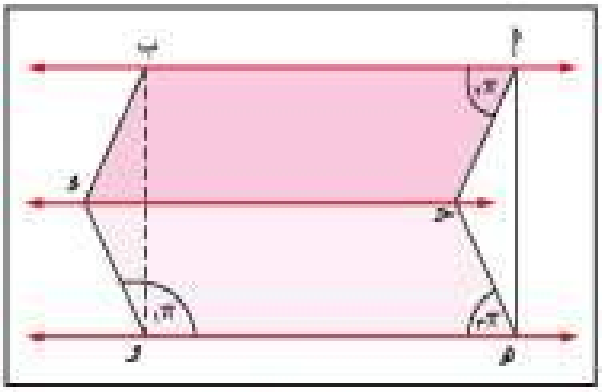
∴ أ حـ ء ب متوازي أضلاع

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ حيث $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊆ π

∴ $\overline{\text{أب}}$ // π (نظرية) ■

مثال ٢

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة ومتوازية وغير مستوية (أي ليست في مستو واحد). أثبت أن كلاً من هذه المستقيمات يوازي مستوي المستقيمين الآخرين.



شكل ٣-٢٨

المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ليست واقعة في مستوٍ واحد

المطلوب:

إثبات أن أي مستقيم من المستقيمات الثلاثة يوازي المستوي الذي يعينه المستقيمان الآخران.

وبصورة أخرى: إثبات أن:

١ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يوازي المستوي الذي يعينه $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

٢ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ يوازي المستوي الذي يعينه $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

٣ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي المستوي الذي يعينه $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

البرهان:

١ حيث إن $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ فرضاً

$\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يعينان مستوياً وليكن π_1

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ واقع خارج المستوي π_1 ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ حيث $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ واقع في المستوي π_1

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوي π_1 (نظرية)

وبالمثل نثبت الحالتين التاليتين (٢) ، (٣).

أي نثبت أن $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ // المستوي π_2 ،

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // المستوي π_2

وبذلك يتضح أن: كل مستقيم من المستقيمات الثلاثة غير المستوية يوازي مستوي المستقيمين الآخرين. وهو المطلوب إثباته. ■

نظرية ٧

المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان.

مثال ٣

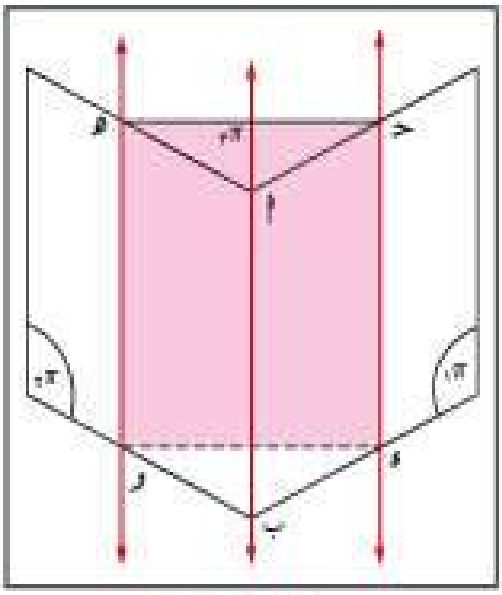
في شكل (٣ – ٢٩):

π_1 ، π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

π_3 مستوٍ ثالث يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع المستويين π_1 ،

π_2 في $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ على الترتيب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$



شكل ٣-٢٩

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // π_2

، ∵ π_1 يقطع π_2 في $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \subseteq \pi_1$ - فرضاً

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (نظرية) _____ (١)

بالمثل، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // π_2 ، π_2 يقطع π_2 في $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \subseteq \pi_2$

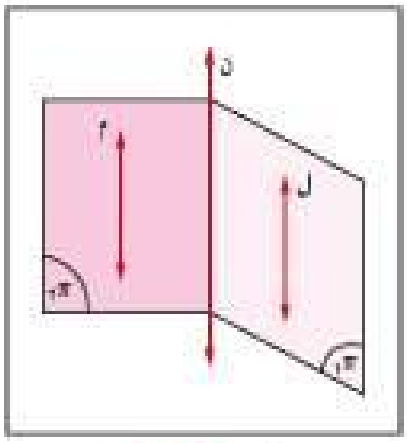
∴ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ (نظرية) ■

نتيجة

إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن خط تقاطعهما يوازي كلاً من هذين المستقيمين.

ففي شكل (٣ - ٣٠):



شكل (٣-٣٠)

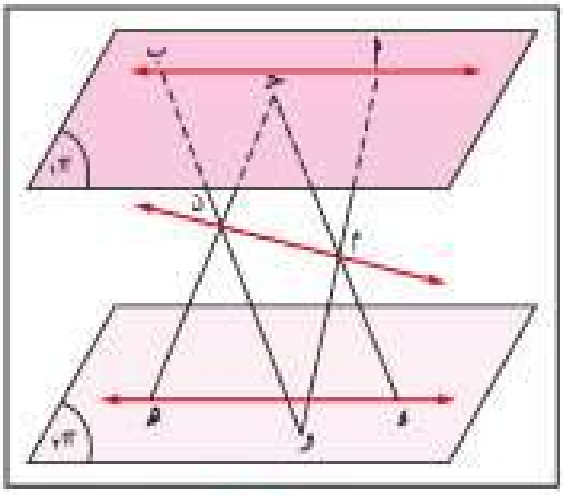
إذا كان ل // م ، ل $\subseteq \pi_1$ ، م $\subseteq \pi_2$

π_1 ، π_2 مستويين خط تقاطعهما ن ،

أي أن $\pi_1 \cap \pi_2$ = ن ،

فإن: ن // ل ، ن // م

مثال ٤



شكل ٣-٣١

في شكل (٣ - ٣١)

π_1 ، π_2 مستويان متوازيان.

أ ، ب ، جـ $\in \pi_1$ ،

د ، هـ ، و $\in \pi_2$

، $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{دهـ}$.

إذا تقاطع المستويان و أب ، جـ د هـ في $\overleftrightarrow{مـن}$

فأثبت أن:

$\overleftrightarrow{مـن}$ يوازي كلاً من المستويين π_1 ، π_2

الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{دهـ}$ والمستويان و أب ، جـ د هـ يتقاطعان في $\overleftrightarrow{مـن}$ ،

ويمر المستوي و أب بالمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، ويمر المستوي جـ د هـ بالمستقيم $\overleftrightarrow{دهـ}$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{مـن}$ يوازي كلاً من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{دهـ}$

، $\because$ $\overleftrightarrow{مـن} \parallel \overleftrightarrow{أب}$ حيث $\overleftrightarrow{أب} \subseteq \pi_1$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{مـن} \parallel \pi_1$ ..... (١)

$\because$ $\overleftrightarrow{مـن} \parallel \overleftrightarrow{دهـ}$ حيث $\overleftrightarrow{دهـ} \subseteq \pi_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{مـن} \parallel \pi_2$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\overleftrightarrow{مـن} \parallel \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{مـن} \parallel \pi_2$ ■

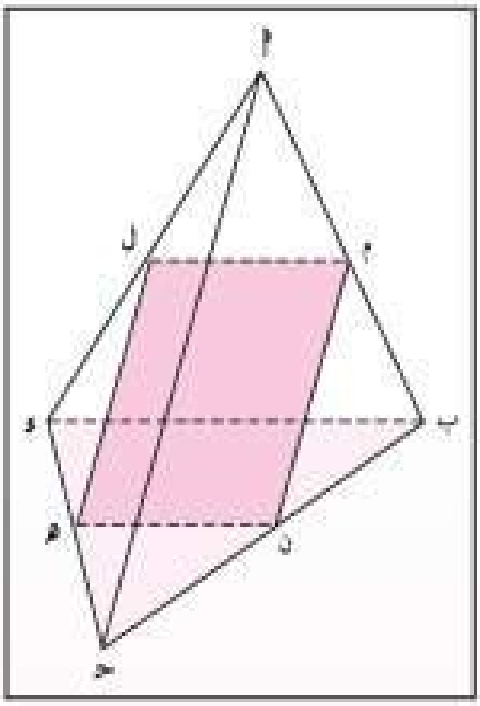
تمارين

٣ - ٣

١ أ ب حـ ء متوازي أضلاع، النقطة ل تقع خارج مستوٍ متوازي الأضلاع.

رسم من أ ، ب المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ المتقاطعان في نقطة ل، فإذا كان:

$\frac{\text{ل أ}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{ل و}}{\text{ل هـ}}$ فأثبت أن $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يوازي مستوي متوازي الأضلاع.



٢ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يوازي مستوياً معلوماً π_1،

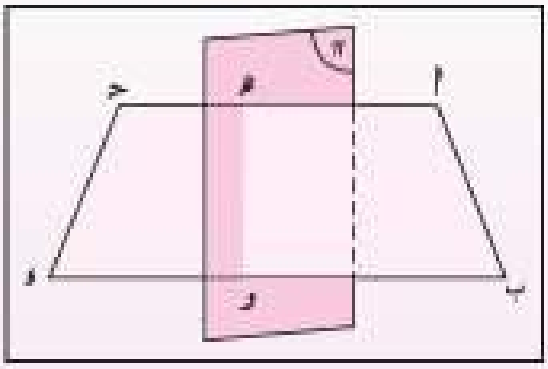
$\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مستقيمان متوازيان ويقطعان المستوي π_1 في (النقطتين حـ ، ء على الترتيب)

أثبت أن الشكل أ حـ ء ب متوازي أضلاع.

٣ في الشكل المقابل: أ ب حـ ء هرم ثلاثي، فإذا كان المستوي م ن هـ ل يوازي كلاً من $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$.

أثبت أن المستوي ل م ن هـ يقسم كلاً من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء أ}}$ إلى أجزاء متناسبة.

٤ في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مستقيمان متخالفان يوازيان المستوي π.



ويقعان في جهتين مختلفتين منه. $\overline{\text{أ حـ}}$ تقطع المستوي π في هـ ، $\overline{\text{ب ء}}$ تقطع المستوي π في و.

أثبت أن: $\frac{\text{ب و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{حـ هـ}}$.

٥ π_1 ، π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subseteq \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} // \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \subseteq \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} // \pi_1$، أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} // \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

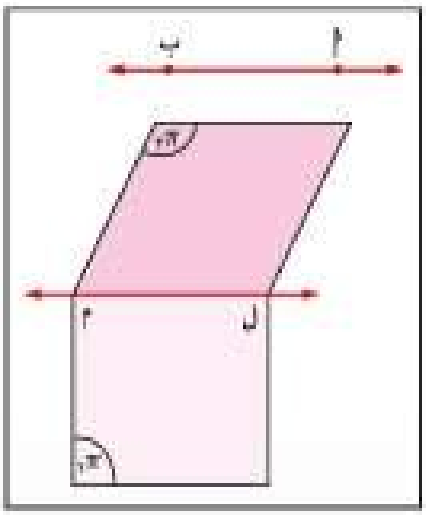
٦ أ ب حـ ء ، أ ب و هـ متوازيا أضلاع غير مستويين يتقاطعان في $\overleftrightarrow{أب}$ ،
أثبت أن حـ ء هـ و متوازي أضلاع .

٧ أ ب حـ ء هرم ثلاثي فإذا كانت س ، ص ، ع ، ل منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ على الترتيب فأثبت أن:

أولاً: الشكل س ص ع ل أضلاعه تقع في مستوٍ واحد .

ثانياً: $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب ء}$ يوازيان المستوي س ص ع ل .

٨ في الشكل المقابل



π_1 ، π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{ل م}$.

$\overleftrightarrow{أب}$ يوازي كلاً من المستويين π_1 ، π_2

أثبت أن:

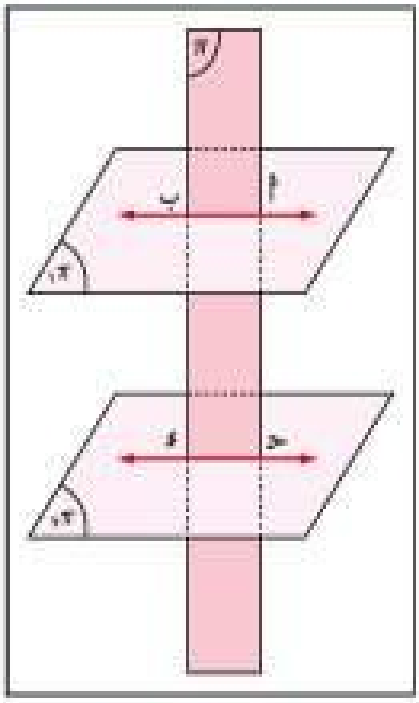
$\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ل م}$

٣-٤ تقاطع مستوٍ مع مستويين متوازيين

Intersection of two parallel planes with plane

نظرية ٨

إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



شكل (٣-٣٢)

المعطيات:

π_1 ، π_2 مستويان متوازيان ،

π مستوٍ ثالث قاطع لهما في $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ على الترتيب.

المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

البرهان:

∵ $\pi_1 \parallel \pi_2$ فرضاً

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ لا يتقاطع مع $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ء}} = \phi$

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ متوازيان أو متخالفان ..... (١)

ولكن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ يحويهما مستوٍ واحد π ..... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ وهو المطلوب إثباته

تدريب:

اعتبر شكل (٣ - ٣٢) وأكمل كلاً مما يلي مع التعليل:

١ إذا كان أب = حـ ء فإن الشكل أ حـ ء ب .....

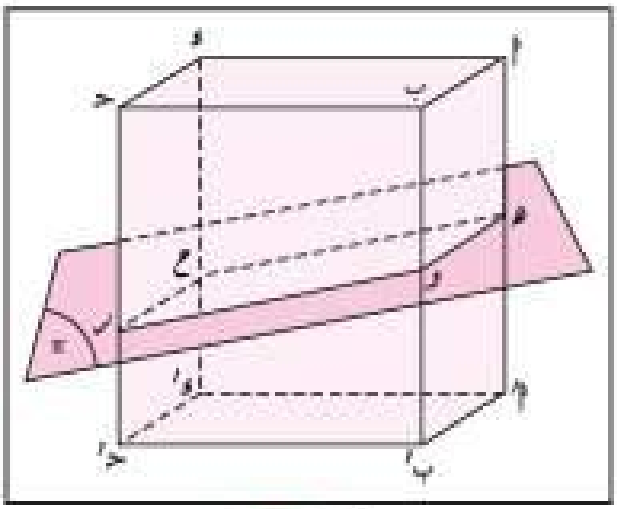
٢ إذا كان أب ≠ حـ ء فإن الشكل أ حـ ء ب .....

مثال ١

في شكل (٣ - ٣٣):

أ ب حـ ء أ′ ب′ حـ′ ء′ شبه مكعب، قطع مستوٍ π أحرفه الجانبية $\overline{\text{أأ′}}$ ، $\overline{\text{بب′}}$ ، $\overline{\text{حـحـ′}}$ ، $\overline{\text{ءء′}}$ ، في هـ ، و ، ن ، ح على الترتيب.

أثبت أن الشكل هـ و ن ح متوازي أضلاع.



شكل ٣-٣٣

المعطيات:

أ ب حـ ء أ′ ب′ حـ′ ء′ شبه مكعب

المستوي π قطع الأحرف $\overline{\text{أأ′}}$ ، $\overline{\text{بب′}}$ ، $\overline{\text{حـحـ′}}$ ، $\overline{\text{ءء′}}$ ، في هـ ، و ، ن ، ح على الترتيب.

المطلوب:

إثبات أن الشكل هـ و ن ح متوازي أضلاع.

البرهان:

السطحان الجانبيان أأ′ب′ب ، ء ء′ حـ′ حـ في شبه المكعب متوازيان، وحيث إن المستوي π يقطع هذين السطحين في $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{ن ح}}$ على الترتيب. - فرضاً:

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ن ح}}$ نظرية (٨) ..... (١)

بالمثل، الوجهان أأ′ ء′ ء ، ب ب′ حـ′ حـ في شبه المكعب متوازيان

وحيث إن المستوي π يقطع هذين السطحين في $\overline{\text{هـ ح}}$ ، $\overline{\text{و ن}}$ - فرضاً

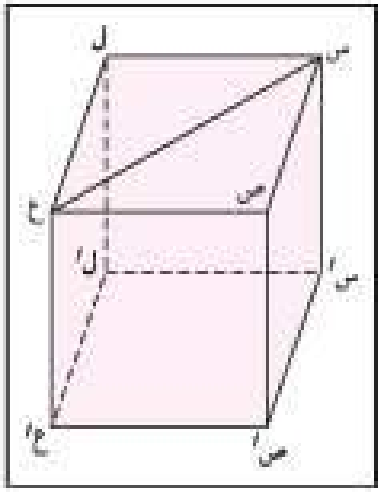
∴ $\overline{\text{هـ ح}} \parallel \overline{\text{و ن}}$ نظرية (٨) ..... (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن الشكل هـ و ن ح متوازي أضلاع. وهو المطلوب إثباته ■

تدريب:

في شكل (٣ - ٣٤)

س ص ع ل س′ ص′ ع′ ل′ مكعب،



شكل (٣-٣٤)

أ عيّن ثلاثة أزواج من المستويات المتوازية.

.....

ب عيّن ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

.....

جـ عيّن ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.

.....

د عيّن حرفين متخالفين ومتعامدين.

.....

هـ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، $\overline{\text{ص′ ع′}}$.

.....

و أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص′ ل′}}$.

.....

ز هل يمكن تحديد مستوٍ يحوي النقاط س ، س′ ، ص′ ، ل′ ؟

.....

تمارين

٣ - ٤

بنود موضوعية:

- **لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ أكبر عدد من المستقيمات الناتجة من تقاطع أربعة مستويات مختلفة هو:

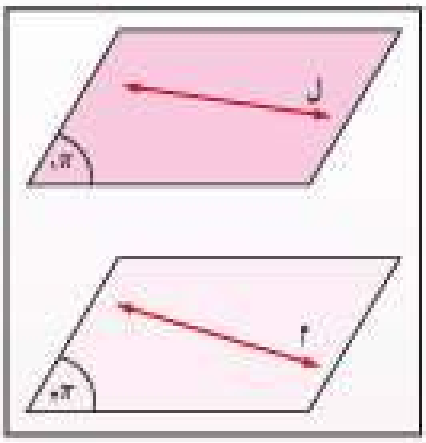
(أ) $\binom{٤}{١}$ (ب) $\binom{٤}{٢}$ (ج) $^{٤}ل_{٢}$ (د) ٤!

٢ إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستوٍ ثالث فإن خطي التقاطع:

(أ) متقاطعان (ب) متخالفان

(ج) متوازيان (د) متعامدان

٣ في الشكل المقابل:



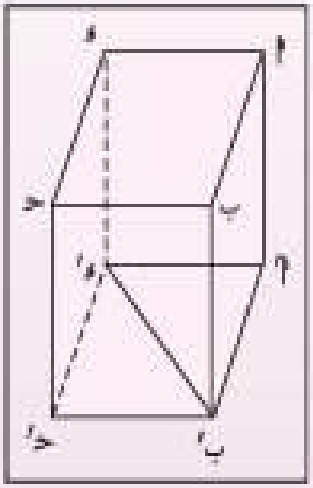
إذا كان $\pi_{١} // \pi_{٢}$ ، ل $\subseteq \pi_{١}$ ، م $\subseteq \pi_{٢}$ فإن

(أ) ل // م (ب) ل $\perp$ م

(ج) ل ، م متخالفان (د) ل $\cap$ م = ϕ

أسئلة مقالية:

١ في الشكل المقابل: أ ب ج د أ′ ب′ ج′ د′ شبه مكعب.



أكمل ما يلي:

أ المستوي أ ب ب′ أ′ يوازي المستوي .....

ب $\overline{أ′د′} \cap \overline{ب ب′}$ = ...

ج $\overline{أ د} \cap \overline{د ج} \cap \overline{د د′}$ = ...

د المستوي أ أ′ د′ د $\cap$ د ج ج′ د′ = ...

هـ $\overline{\text{ء ء}'}$ // .....

و المستوي ء ء′ح′ ∩ المستوي ب ب′ح = ...

ز قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب′ء′}}$

ح قياس الزاوية بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ب′ء′}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أح}}$

٢ π_1 ، π_2 مستويان متوازيان، نقطة «و» واقعة بينهما.

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ يقطعان المستوي π_1 في أ ، ح ويقطعان المستوي π_2 في ء ، ب

إذا كانت و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، و ∈ $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$

فأثبت أن $\frac{\text{أو}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أح}}{\text{ب ء}}$

٣ أثبت أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستويات متوازية فإن النسبة بين أجزاء المستقيم الأول المحصورة بين هذه المستويات تساوي النسبة بين الأجزاء المناظرة لها للمستقيم الثاني.

٤ ل_1 ، ل_2 ، ل_3 ثلاثة مستقيمات متوازية وغير مستوية، قطعها المستويان المتوازيان π_1 ، π_2 في أ ، ب ، ح وفي ء ، هـ ، و على الترتيب. فأثبت أن المثلثين أ ب ح ، ء هـ و متطابقان.

٣-٥ تعامد مستقيم مع مستوٍ

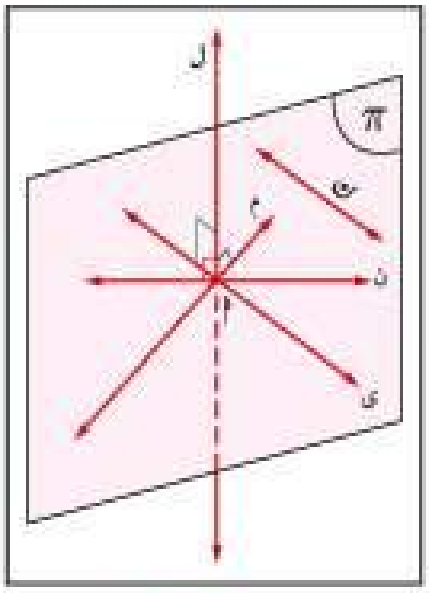
Perpendicular line with plane

درسنا الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوٍ في الفضاء، وعلمت أن المستقيم قد يكون موازياً للمستوي، أو يقع بتمامه في المستوي، أو يكون قاطعاً له في نقطة. وفي حالة ما إذا كان المستقيم قاطعاً للمستوي، فإنه قد يكون عمودياً عليه أو مائلاً.

تعريف ١

يكون المستقيم ل عمودياً على المستوي π (أو المستوي π عمودي على المستقيم ل) إذا كان المستقيم ل عمودياً على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي π.

ونعبر عن ذلك بالرموز كالآتي: ل ⊥ π



شكل ٣-٣٥

ففي شكل (٣ - ٣٥)

ل ∩ π = {أ}

ل عمودي على المستوي π وهو بذلك عمودي على المستقيمات ى ، م ، ن ، ك ، .....

الواقعة في المستوي π.

تعريف ١٢

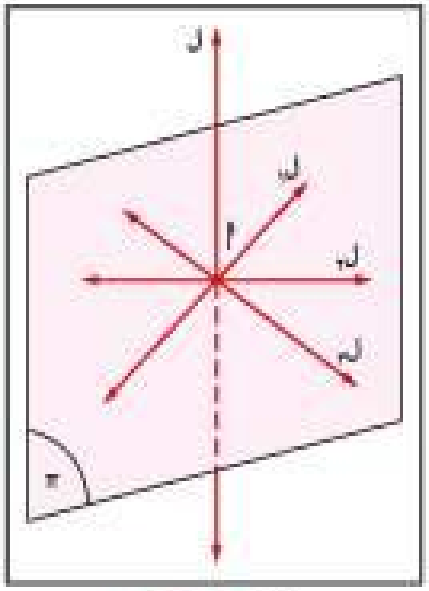
المستقيم ل الذي يقطع المستوي π ولا يكون عمودياً عليه، يقال إنه مائل على المستوي π.

نظرية ٩

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.

نتيجة

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي لهذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عمودي على المستقيم المعلوم.



شكل (٣-٣٦)

ففي شكل (٣ - ٣٦)

المستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، ... عمودية على المستقيم ل عند النقطة أ .

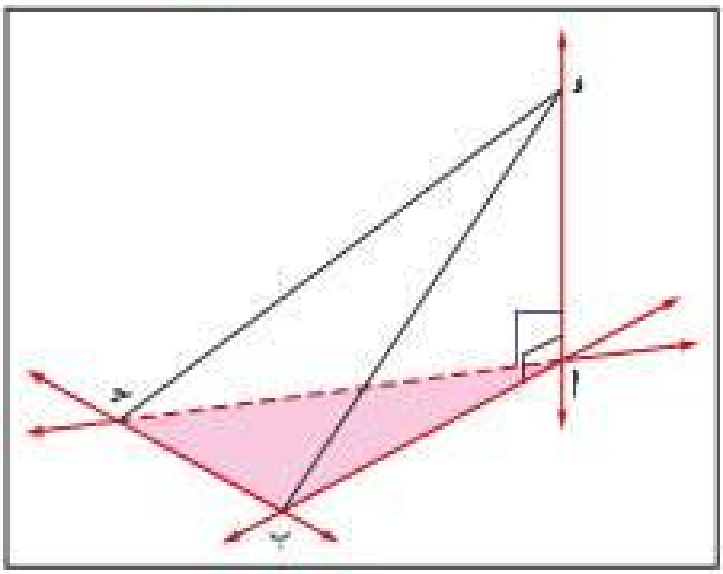
∴ المستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ ، .....

تقع جميعها في مستوٍ واحد π عمودي على المستقيم ل من النقطة أ .

مثال ١

في شكل (٣ - ٣٧): $\overleftrightarrow{دأ} \perp \overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{دأ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{دأ} \perp \overleftrightarrow{بحـ}$.



شكل (٣-٣٧)

الحل

∵ $\overleftrightarrow{دأ}$ عمودي على

كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$

عند نقطة تقاطعهما

∴ $\overleftrightarrow{دأ}$ عمودي على المستوي

أبحـ (نظرية)

∴ $\overleftrightarrow{دأ} \perp \overleftrightarrow{بحـ}$

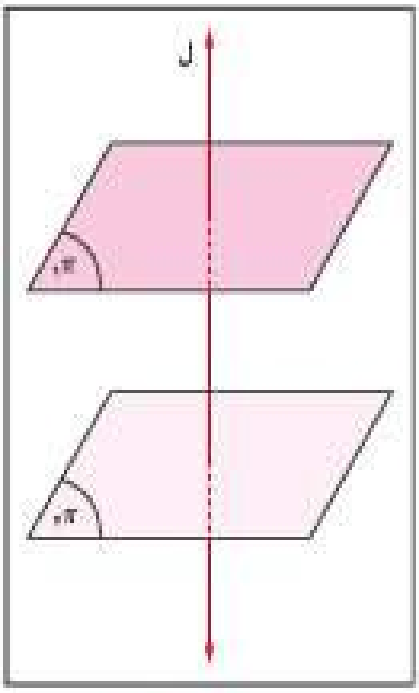
حيث $\overleftrightarrow{بحـ} \subseteq$ المستوي أبحـ ■

نظرية ١٠

إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين.

نظرية ١١

إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوي الآخر.



شكل ٣-٣٨

ففي شكل (٣ - ٣٨):

إذا كان المستقيم ل $\perp \pi_1$ ،

ل $\perp \pi_2$ فإن:

$\pi_1 // \pi_2$

وكذلك إذا كان:

ل $\perp \pi_1$ وكان $\pi_1 // \pi_2$ فإن:

ل $\perp \pi_2$

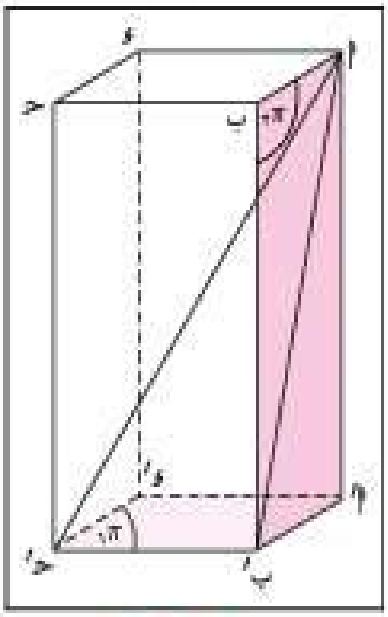
مثال ٢

في شكل (٣ - ٣٩) شبه مكعب قاعدته أ′ب′حـ′ء′ تمثل المستوي π_1 ، الوجه الجانبي أأ′ب′ب يمثل المستوي π_2

أثبت أن:

١ $\overline{\text{ب ب′}} \perp \pi_1$

٢ $\overline{\text{حـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب′}}$



شكل ٣-٣٩

الحل

١ $\overline{\text{ب ب′}} \perp \overline{\text{ب′ حـ′}}$ ، $\overline{\text{ب ب′}} \perp \overline{\text{ب′ أ′}}$

$\therefore$ $\overline{\text{ب ب′}} \perp \pi_1$ (مستوي القاعدة) (نظرية)

٢ $\overline{\text{حـ ب}} \perp \overline{\text{ب ب′}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب أ}}$

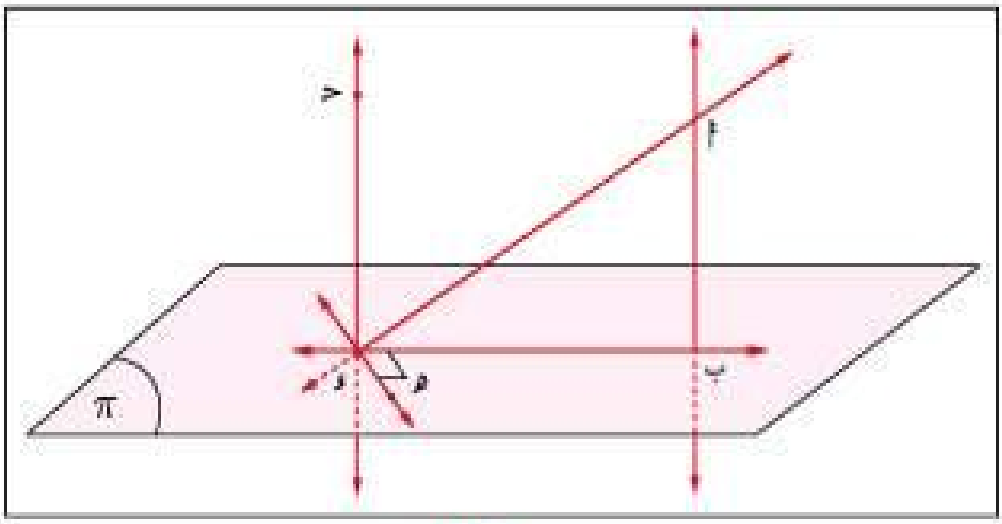
$\therefore$ $\overline{\text{حـ ب}} \perp \pi_2$ (مستوي الوجه أ ب ب′ أ′)

$\therefore$ $\overline{\text{حـ ب}}$ عمودي على كل مستقيم يحويه المستوي π_2

$\therefore$ $\overline{\text{حـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب′}}$ ■

نظرية ١٢

المستقيمان العمودان على مستوٍ متوازيان.



شكل ٣-٤٠

المعطيات:

$\overleftrightarrow{أب} \perp \pi$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء} \perp \pi$.

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـ ء}$.

العمل:

نرسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ في π بحيث يكون $\overleftrightarrow{ء هـ} \perp \overleftrightarrow{ء ب}$

البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{أب} \perp \pi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ء هـ}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ عمودي على كل من $\overleftrightarrow{ء ب}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ عمودي على المستوي أب ء ..... (نظرية)

بالمثل $\overleftrightarrow{ء هـ}$ عمودي على $\overleftrightarrow{حـ ء}$ عند ء.

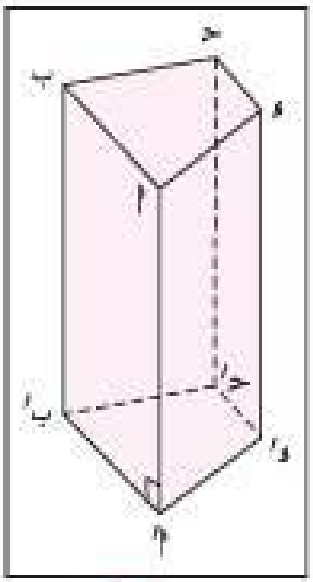
$\therefore$ $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يقع في المستوي أب ء ..... (نتيجة)

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ د}$ يقعان في مستوٍ واحد

وعموديان على المستقيم $\overleftrightarrow{ب د}$ في هذا المستوي

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ د}$.

وهو المطلوب إثباته.



شكل (٣-٤١)

مثال ٣

في شكل (٣ - ٤١)

$\overline{أ أ'} \perp \overline{أ' ب'}$ ،

$\overline{أ' د'}$ عمودي على مستوي المثلث أ أ' ب' ،

$\overline{د د'}$ عمودي على مستوي المثلث د' أ' ب'.

أثبت أن $\overline{أ أ'}$ // $\overline{د د'}$

الحل

∵ $\overline{أ' د'} \perp$ مستوي Δ أ أ' ب'

∴ $\overline{أ' د'} \perp \overline{أ أ'}$ تعريف

∵ $\overline{أ أ'} \perp \overline{أ' ب'}$ فرضاً

∴ $\overline{أ أ'} \perp$ مستوي Δ د' أ' ب' (نظرية)

ولكن $\overline{د د'} \perp$ مستوي Δ د' أ' ب'

∴ $\overline{أ أ'}$ // $\overline{د د'}$ (نظرية) ■

نظرية ١٣

إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستوٍ كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوي أيضاً.

مثال ٤

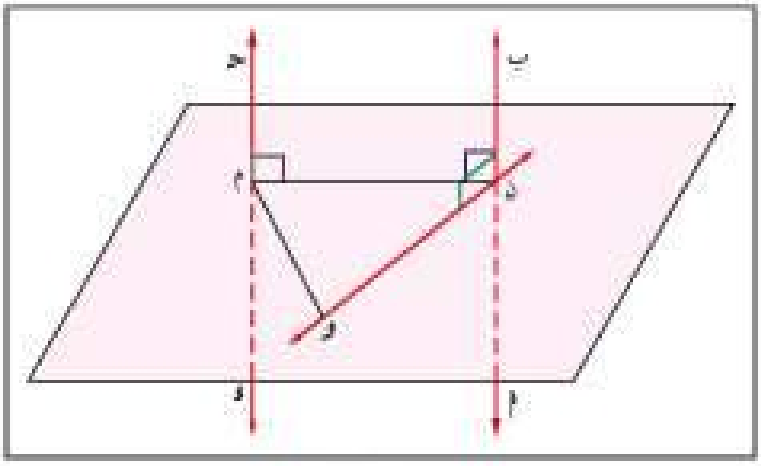
في شكل (٣ – ٤٢)

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ن و}}$

أثبت أن: ق (حـ $\hat{\text{م}}$ و) = ٩٠°.



شكل ٣-٤٢

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ن و}}$ فرضاً

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊥ المستوي م ن و (نظرية)

ولكن $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ⊥ المستوي م ن و

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{م و}}$

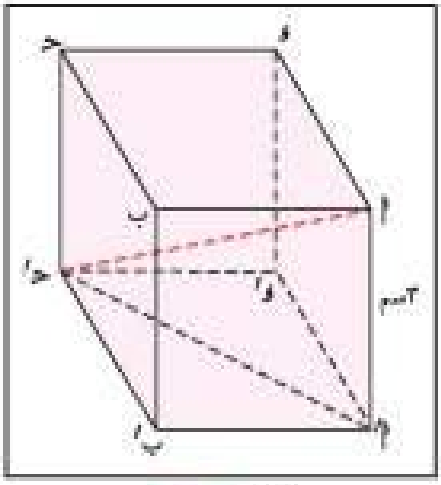
∴ ق (حـ $\hat{\text{م}}$ و) = ٩٠°

مثال ٥

في شكل (٣ – ٤٣)

أ ب حـ د أ′ ب′ حـ′ د′ مكعب طول حرفه ٣سم.

أوجد طول $\overleftrightarrow{\text{أ حـ′}}$ (قطر المكعب)



شكل ٣-٤٣

الحل

$\overleftrightarrow{\text{أأ′}}$ ⊥ مستوي القاعدة أ′ ب′ حـ′ د′

∴ $\overleftrightarrow{\text{أأ′}} \perp \overline{\text{أ′ حـ′}}$

في Δ أ′ب′حـ′

$\because$ $\overline{أ'ب'} \perp \overline{ب'حـ'}$ $\therefore$ $(أ'حـ')^2 = (أ'ب')^2 + (ب'حـ')^2$

$= ٣^2 + ٣^2 = ١٨$

في Δ أأ′حـ′

$\because$ $\overline{أأ'} \perp \overline{أ'حـ'}$ $\therefore$ $(أحـ')^2 = (أأ')^2 + (أ'حـ')^2$

$= ٣^2 + ١٨ = ٢٧$

$\therefore$ أحـ′ $= \sqrt{٢٧} = ٣\sqrt{٣}$ سم ■

مثال ٦

ل ، م ، ن ثلاثة مستقيمات في الفضاء، فإذا كان

ل // م ، ن // م ، فأثبت أن ل // ن.

الحل

نرسم مستوي π عمودياً على م

كما في شكل (٣ – ٤٤)

$\because$ م $\perp \pi$ ، ل // م

$\therefore$ ل $\perp \pi$ (١)

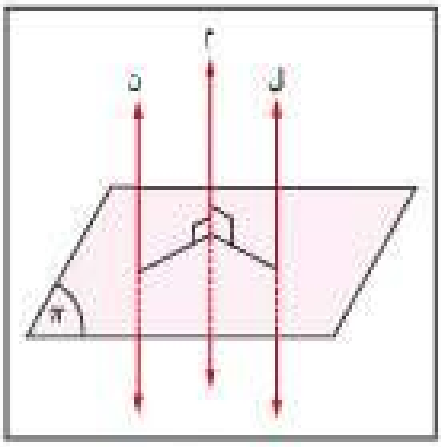
$\because$ م $\perp \pi$ ، ن // م

$\therefore$ ن $\perp \pi$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

ل ، ن عمودان على المستوي π

$\therefore$ ل // ن. ■



شكل ٣-٤٤

ملاحظة:

حل مثال (٦) يعتبر برهاناً لنظرية (٧).

تمارين ٣ – ٥

بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع (✓) أمام العبارة الصحيحة، (✗) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ المستويان العمودان على ثالث متوازيان

٢ إذا كان $\pi_١ \cap \pi_٢ = ل$ وكان π عمودياً على كل من $\pi_١$ ، $\pi_٢$ فإن $ل \subseteq \pi$

٣ إذا كان $ل \perp م$ وكان $م \subseteq \pi$ فإن $ل \perp \pi$.

٤ إذا كان المستقيمان ل ، م متخالفين وكان $ن \perp م$ فإن $ل \perp ن$.

٥ إذا كان المستقيمان ل ، م متخالفين وكان $ن \perp م$ فإن ل ، ن متخالفين.

• **ثانياً: لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا اشترك المستقيم ل مع المستوي π في نقطتين أ ، ب فإن $ل \cap \pi =$

(أ) {أ ، ب} (ب) $\overline{أب}$ (ج) $\overleftrightarrow{أب}$ (د) ϕ

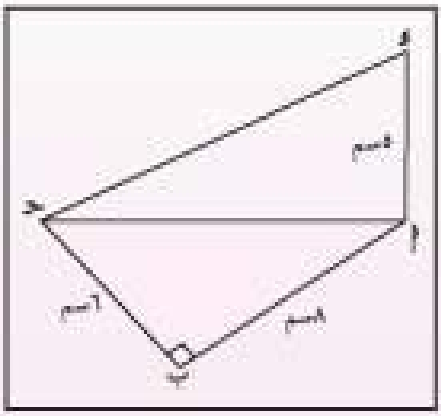
٢ في الشكل أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ،

أ ب = ٨سم ، ب ج = ٦سم

$\overline{أ د} \perp$ المستوي أ ب ج حيث أ د = ٥سم فإن د ج =

(أ) ١٠سم (ب) $٥\sqrt{٣}$سم

(ج) $٥\sqrt{٥}$سم (د) ١٥سم



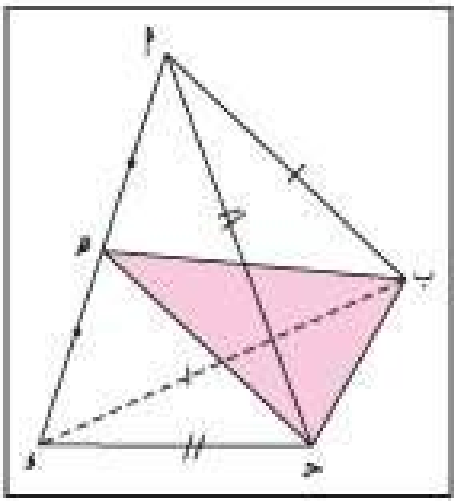
٣ طول قطر المكعب الذي طول حرفه $٢\sqrt{٣}$ سم =

(أ) ٢سم (ب) ٤سم (ج) ٦سم (د) $٤\sqrt{٣}$سم

أسئلة مقالية:

- **أجب عن الأسئلة التالية:**

١ في الشكل المقابل:



أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه

أ ب = ب د ، أ جـ = جـ د

فإذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$

أثبت أن: $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ مستوي المثلث ب جـ هـ.

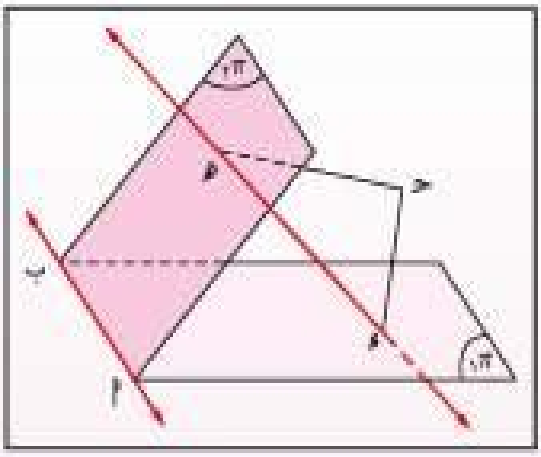
$\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

٢ دائرة مركزها م فيها $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران، وطول نصف قطرها ٥سم. نقطة د تقع خارج مستوي الدائرة م بحيث يكون:

$\overline{\text{د م}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{د م}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$.

إذا كان د م = ١٠سم فأوجد ب د

٣ في الشكل المقابل:



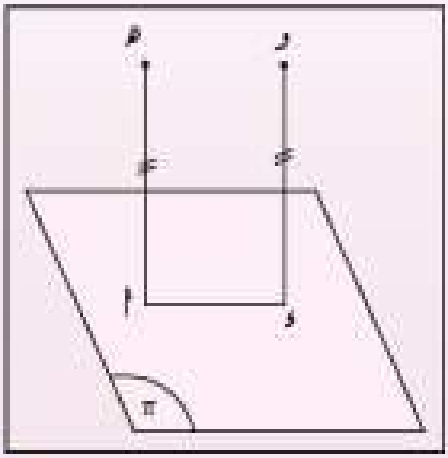
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ خط تقاطع π١ ، π٢ ، جـ ∉ π١ ، π٢

رسم من نقطة جـ عمودان $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$

على π١ ، π٢ على الترتيب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$

٤ في الشكل المقابل: إذا كان



$\overline{\text{و د}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$ عمودين على المستوي π،

بحيث و د = هـ أ

فأثبت أن $\overline{\text{هـ و}}$ // π

٥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ عمودان على مستوي π رسم مستوي π_1 يحوي $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، ورسم مستوٍ آخر π_2 يحوي $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ بحيث كان $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \perp \pi$

٦ أ ب حـ مثلث، اختيرت نقطة د خارج مستوي المثلث بحيث كان:

$\overline{\text{أد}}$ عمودياً على كل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$.

فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{د ب}}$.

أثبت أن: $\overline{\text{م ن}} \perp$ مستوي المثلث أ ب حـ.

٧ أ ب حـ د أ′ ب′ حـ′ د′ مكعب طول حرفه (ل) وحدة طول. أثبت أن طول قطره يساوي $\sqrt{٣}$ ل وحدة طول ثم أثبت أن النسبة بين طول قطر المكعب وطول قطر أي وجه فيه يساوي $\sqrt{٦} : ٢$.

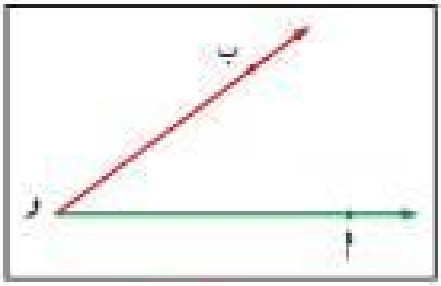
٣-٦ الزاوية بين مستويين - تعامد مستويين

The Dihedzal Angle - two planes are perpendicular

تعلم من دراساتك السابقة في الهندسة المستوية أن الزاوية المستوية هي اتحاد شعاعين مشتركين في نقطة البداية، أي أن:

$$\overset{\wedge}{\text{أ و ب}} = \overrightarrow{\text{و أ}} \cup \overrightarrow{\text{و ب}}$$

انظر شكل (٣ - ٤٥)



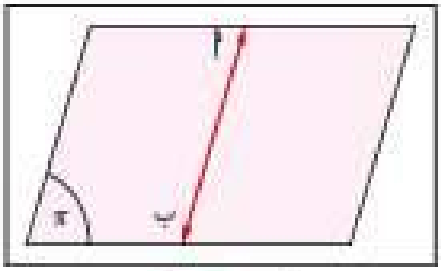
شكل ٣-٤٥

وفي المستوي، أي مستقيم يقسم المستوي إلى نصفين، فإذا كان:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subseteq \pi$ ، فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يقسم المستوي π إلى نصفين

- انظر شكل (٣ - ٤٦)

وسنستعين بذلك في تعريف الزاوية بين مستويين.



شكل ٣-٤٦

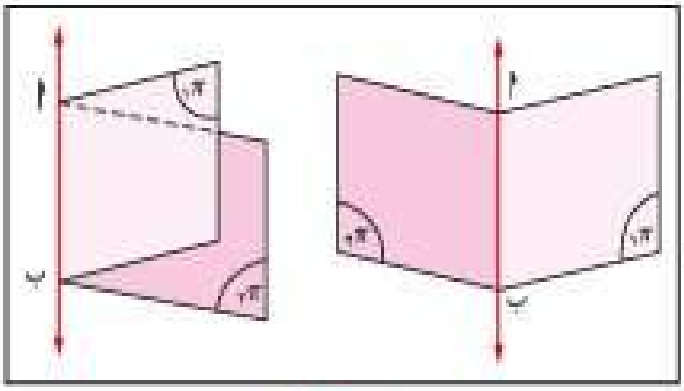
تعريف ١٣

الزاوية بين مستويين أو الزاوية الزوجية

الزاوية بين مستويين (مشتركين في مستقيم) هي اتحاد نصفي هذين المستويين. يسمى المستقيم المشترك «حافة الزاوية الزوجية» أو «الفاصل المشترك» ويسمى كل من نصفي المستويين «وجه الزاوية الزوجية».

يوضح شكل (٣ - ٤٧) زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ونقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، أو نعبر عنها رمزياً بالصورة:

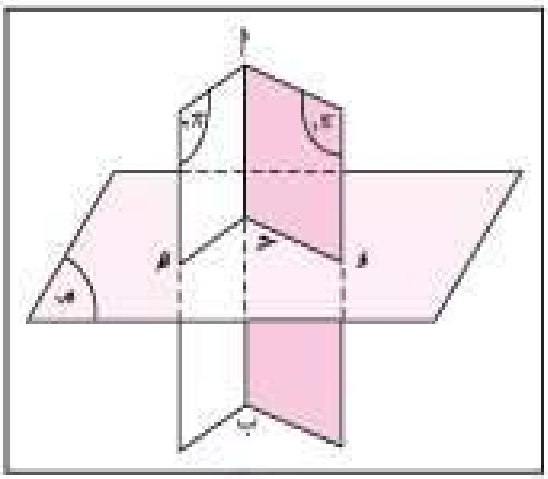
$(\pi_1 ، \overleftrightarrow{\text{أ ب}} ، \pi_2)$.



شكل ٣-٤٧

الزاوية المستوية لزاوية زوجية:

إذا قطعت الزاوية الزوجية (π١ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، π٢) بالمستوي ص العمودي على $\overleftrightarrow{أب}$ فإن ص يقطع وجهيها في $\overleftarrow{حـ و}$ ، $\overleftarrow{حـ هـ}$ والزاوية الناتجة من اتحاد هذين الشعاعين اللذين لهما نفس نقطة البداية تسمى زاوية مستوية لهذه الزاوية الزوجية.



شكل ٣-٤٨

تعريف ١٤

الزاوية المستوية لزاوية زوجية

الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

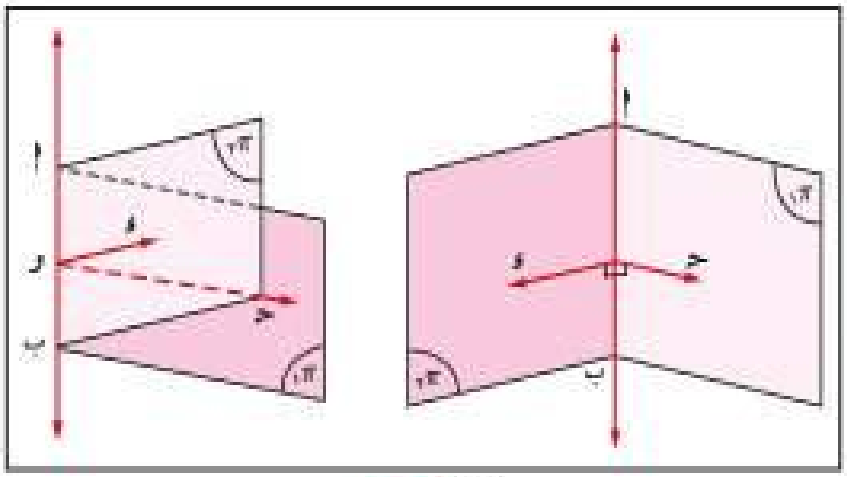
ويمكننا أن نحصل على زاوية مستوية لزاوية زوجية معلومة مثل الزاوية (π١ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، π٢) بطريقة أخرى كما يلي:

١ نفرض أي نقطة تنتمي لحافة الزاوية $\overleftrightarrow{أب}$ مثل و.

٢ نرسم من و الشعاع $\overleftarrow{و حـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ ومحتوى في المستوي π١ ،

٣ نرسم من و الشعاع $\overleftarrow{و ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أب}$ أيضاً ومحتوى في المستوي π٢ ،
فتكون الزاوية حـ و ء هي الزاوية المستوية لهذه الزاوية الزوجية

انظر شكل (٣ - ٤٩).



شكل ٣-٤٨

ملاحظات:

١ جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية متساوية في القياس.

٢ اتفق على اعتبار الزاوية الحادة عند البحث عن قياس الزاوية بين مستويين.

تعريف ١٥

قياس الزاوية الزوجية

قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي زاوية من زواياها المستوية.

ملاحظات:

١ إذا كان ق (π_1 ، $\overleftrightarrow{أب}$ ، π_2) = ٩٠° فيقال إن المستويين π_1 ، π_2 متعامدان.

٢ والعكس صحيح، إذا كان المستويان π_1 ، π_2 متعامدين كان قياس الزاوية الزوجية المحددة بهما ٩٠°.

مثال ١

في شكل (٣ – ٥٠):

Δ أب حـ فيه ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° ،

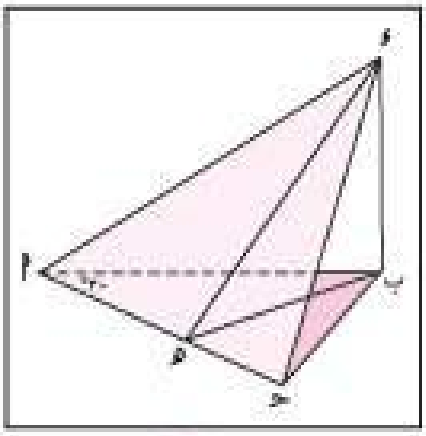
أب = ١٠سم ،

$\overline{ب د}$ ⊥ مستوي Δ أب حـ ،

ب د = ٥سم ،

$\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ،

$\overline{د هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ حـ}$



شكل (٣-٥٠)

أوجد:

١ ب هـ ، د هـ

٢ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب أ حـ ، د أ حـ

الحل

١ ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ فرضاً

∴ Δ أ هـ ب قائم الزاوية $\hat{\text{هـ}}$ ، ويكون:

$\text{ب هـ} = \frac{١}{٢}\text{أ ب} = ٥\text{سم}$

∵ $\overline{\text{ب ء}} \perp$ Δ أ ب حـ

∴ $\overline{\text{ب ء}}$ عمودي على أي مستقيم في مستوي المثلث أ ب حـ

∴ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$

∴ ق (ء $\hat{\text{ب}}$ هـ) = ٩٠°

∴ $(\text{ء هـ})^٢ = (\text{ء ب})^٢ + (\text{ب هـ})^٢$

$= ٢٥ + ٢٥ = ٥٠$

∴ $\text{ء هـ} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}\text{سم}$

٢ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هو خط تقاطع المستويين ب أ حـ ، ء أ حـ ،

$\overline{\text{هـ ب}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$: $\overline{\text{هـ ء}} \subseteq$ المستوي ء أ حـ

∴ ق (ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب أ حـ ، ء أ حـ

∴ $\text{ظا ء}\hat{\text{هـ}}\text{ب} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{٥}{٥} = ١$

∴ ق (ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = قياس الزاوية الزوجية = ٤٥°

مثال ٢

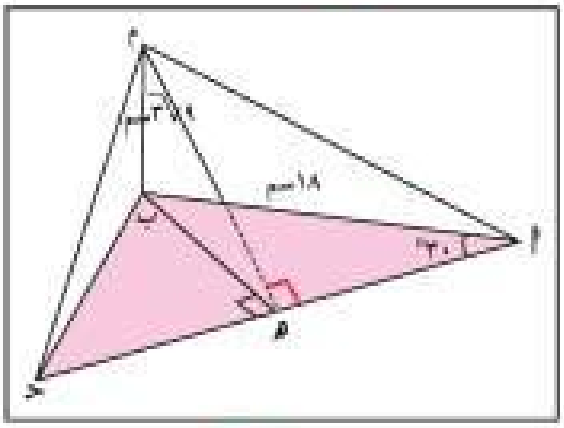
في شكل (٣ – ٥١): ق (ب $\hat{\text{أ}}$ حـ) = ٣٠° ،

أ ب = ١٨سم ، $\overline{\text{ب م}} \perp$ المستوي أ ب حـ ،

$\text{ب م} = ٩\sqrt{٣}\text{سم}$ ، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

ثم أوجد قياس الزاوية (Δ م أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، Δ ب أ حـ)



شكل ٣-٥١

الفرض:

ق (ب $\hat{أ}$ حـ) = ٣٠°

أب = ١٨سم ، ب م = ٩ $\sqrt{٣}$سم.

$\overline{ب م}$ ⊥ مستوي Δ أب حـ ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

المطلوب:

إثبات أن $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

إيجاد ق (Δ م أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، Δ ب أ حـ)

البرهان:

$\overline{م ب}$ ⊥ مستوٍ Δ أب حـ فرضاً.

∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

∵ $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

∴ $\overline{أ حـ}$ ⊥ المستوي م ب هـ (نظرية).

∴ $\overline{أ حـ}$ ⊥ $\overline{م هـ}$ أي أن $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ وهو المطلوب أولاً.

∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

∴ ق (Δ م أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، Δ ب أ حـ) = ق (م $\hat{هـ}$ ب).

في Δ أب هـ

ق (ب $\hat{أ}$ هـ) = ٣٠° ، أب = ١٨سم ، ∴ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ = ٩سم.

وفي Δ م ب هـ

$\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب هـ}$ نظرية

م ب = ٩ $\sqrt{٣}$سم ، ب هـ = ٩سم

ظا (م $\hat{هـ}$ ب) = $\frac{٩\sqrt{٣}}{٩}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ق (م $\hat{هـ}$ ب) = ٦٠°

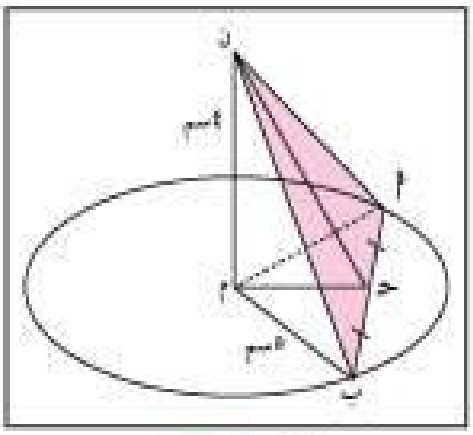
∴ ق (Δ م أ حـ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، Δ ب أ حـ) = ٦٠° ■

مثال ٣

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٥سم. رسم $\overline{\text{م ن}}$ عموداً على مستوي الدائرة حيث م ن = ٤سم. ثم رسم مستوياً يمر بالنقطة ن ويقطع الدائرة في أ ، ب

فإذا كان ق (Δ ن أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، مستوي الدائرة) = ٤٥°.

احسب مساحة المنطقة المثلثة ن أ ب.



شكل ٣-٥٢

الفرض

دائرة مركزها م.

م ب = ق = ٥سم ،

$\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوي الدائرة.

ق (Δ ن أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، Δ م أ ب) = ٤٥°

المطلوب:

إيجاد مساحة منطقة Δ ن أ ب

العمل:

ننصف $\overline{\text{أ ب}}$ في حـ.

البرهان:

في Δ م أ ب المتطابق الضلعين

حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ∴ $\overline{\text{م حـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$.

ولكن $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوي الدائرة وبالتالي $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ن حـ}}$ (لماذا؟)

∴ ق (Δ ن أ ب ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، Δ م أ ب) ، ق (ن $\hat{\text{حـ}}$ م) = ٤٥°

∵ Δ ن م حـ قائم الزاوية في م ، م ن = ٤سم ، ق (ن $\hat{\text{حـ}}$ م) = ٤٥°

∴ م حـ = ٤سم.

∴ $(\text{ن حـ})^2 = (\text{م حـ})^2 + (\text{ن م})^2 = ١٦ + ١٦$

∴ ن حـ = ٤√٢ سم.

وفي Δ م حـ ب ، $\overline{\text{م حـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب م = ٥ سم

∴ (ب حـ)² = (٥)² − (٤)² = ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ ب حـ = ٣ سم ، ∴ أ ب = ٢ × ٣ = ٦ سم

∴ مساحة منطقة Δ ن أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ن حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤√٢

= ١٢√٢ سم².

نظرية ١٤

إذا كان مستقيم معلوم عمودياً على مستوٍ معلوم، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوي المعلوم.

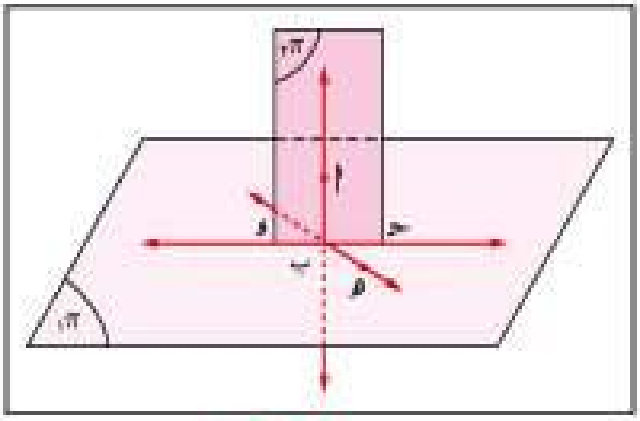
المعطيات:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ π_1 ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊆ π_2 ، $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

المطلوب:

إثبات أن: $\pi_2 \perp \pi_1$

إذا أمكنا إثبات أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين π_1 ، π_2 يساوي ٩٠° يكون المستويان متعامدين. لذلك سنجري العمل التالي:



شكل ٣-٥٣

العمل:

نرسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ في π_1 وعمودي على $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ π_1 فرضاً

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ تعريف

وحيث إن $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ عملاً

∴ الزاوية أ ب̂ هـ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين π_1 ، π_2

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$

∴ ق (أ ب̂ هـ) = ٩٠°

∴ المستويان π_1 ، π_2 متعامدان.

وهو المطلوب إثباته

مثال ٤

في شكل (٣ – ٥٤)

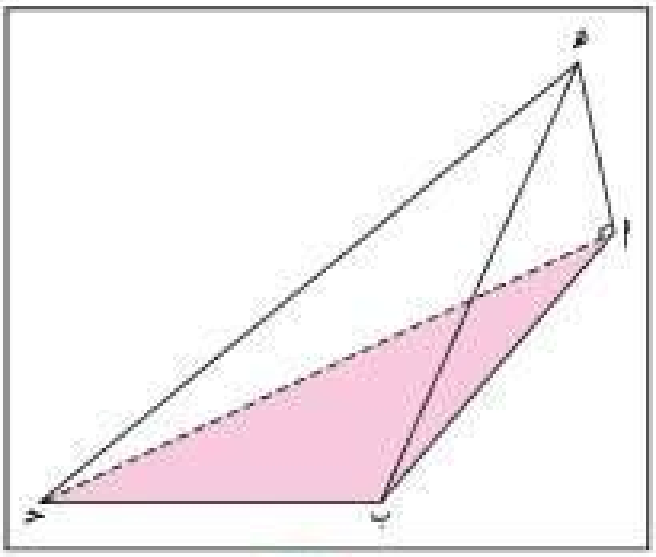
$\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

أثبت أن المستوي أ هـ حـ عمودي

على المستوي أ ب حـ

ثم اذكر مستويين آخرين عموديين على

المستوي أ ب حـ مع الرسم.



شكل ٣-٥٤

الحل

∵ $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ فرضاً،

$\overline{\text{أهـ}}$ ⊆ المستوي أ هـ حـ

∴ المستوي أ هـ حـ عمودي على المستوي أ ب حـ (نظرية)

∵ $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

وحيث إن $\overline{\text{أهـ}}$ ⊆ المستوي هـ أ ب ،

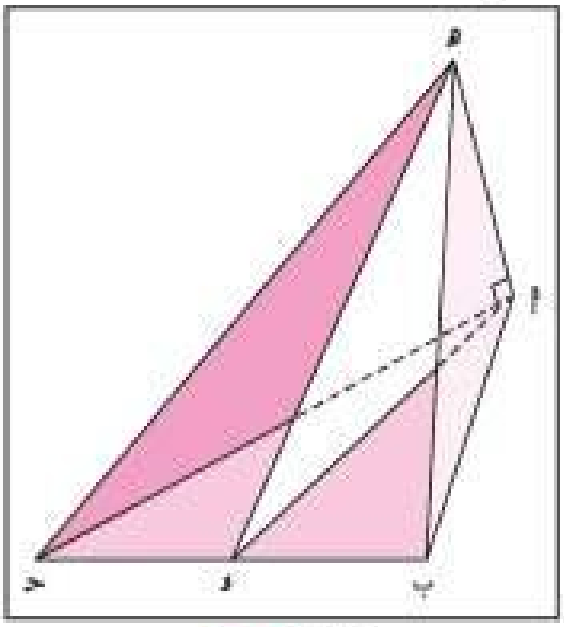
$\overline{\text{أهـ}}$ ⊆ المستوي هـ أ ء

حيث ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ كل من المستويين هـ أ ب ، هـ أ ء

عمودي على المستوي أ ب حـ (نظرية)

انظر شكل (٣ – ٥٥)



شكل ٣-٥٥

نتيجة

١ إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عمودياً على المستوي الآخر.

في شكل (٣ – ٥٦)

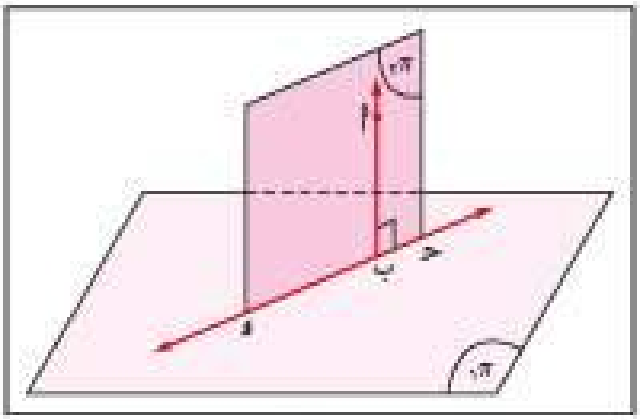
$\pi_1 \perp \pi_2$

فإذا رسم $\overleftrightarrow{أب}$ في المستوي π_2

بحيث كان:

$\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـ ء}$

فإن : $\overleftrightarrow{أب} \perp \pi_1$



شكل ٣-٥٦

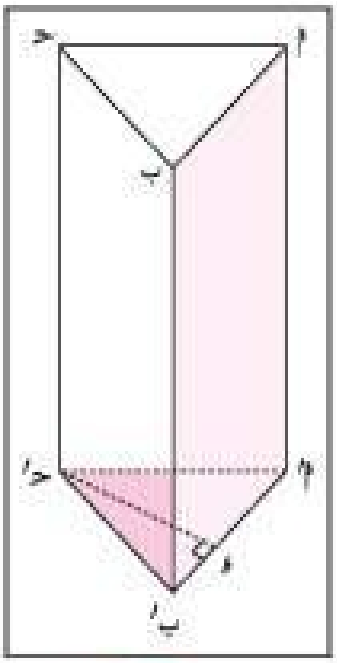
مثال ٥

في شكل (٣ – ٥٧)

أ ب حـ أ′ ب′ حـ′ منشور ثلاثي قائم قاعدته المثلث أ′ ب′ حـ′ ، $\overline{حـ′ ء} \perp \overline{أ′ب′}$

أثبت أن:

$\overline{حـ′ ء} \perp$ المستوي أ أ′ ب′ ب



شكل ٣-٥٧

الحل

∵ المستويان أ′ ب′ حـ′ ، أ أ′ ب′ ب متعامدان (لماذا؟)

وحيث إن المستوي أ′ ب′ حـ′ ∩ المستوي أ أ′ ب′ ب = $\overline{أ′ب′}$

، $\overline{حـ′ ء} \perp \overline{أ′ب′}$ حيث $\overleftrightarrow{أ′ب′}$ هو خط التقاطع

∴ $\overline{حـ′ ء} \perp$ المستوي أ أ′ ب′ ب (لماذا؟)

نتيجة

٢ إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث، فإن خط تقاطع المستويين يكون عمودياً على هذا المستوي الثالث.

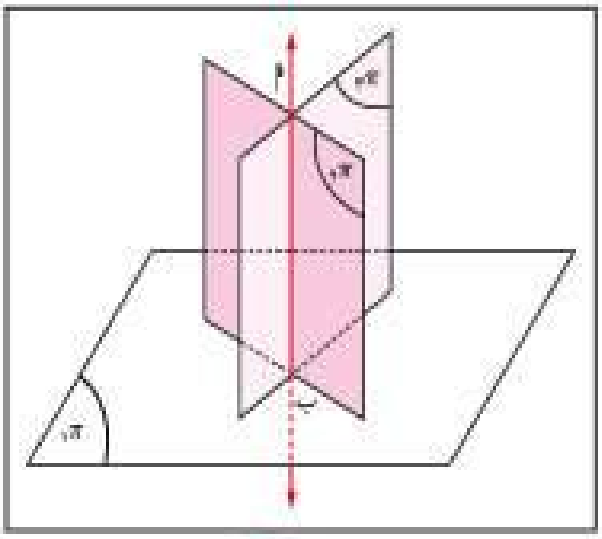
ففي شكل (٣ – ٥٨):

إذا كان $\pi_2 \perp \pi_1$

$\pi_3 \perp \pi_1$

$\pi_2 \cap \pi_3 = \overleftrightarrow{\text{أب}}$

فإن $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \pi_1$



شكل ٣-٥٨

تمارين

٣ - ٦

١ أ ب حـ مثلث فيه ق (أ^) = ٣٠° ، أ ب = ١٠ $\sqrt{٣}$ ، رسم من ب العمود $\overline{ب د}$ على مستوي Δ أ ب حـ بحيث ب د = ٥سم، رسم من د العمود $\overline{د هـ}$ على $\overline{أ حـ}$ ، وإذا كان أيضاً $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$:

أثبت أن: قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب حـ ، أ حـ د يساوي ٣٠°

٢ م أ ب حـ هرم ثلاثي رأسه م وقاعدته المثلث المتطابق الأضلاع أ ب حـ الذي طول ضلعه = ١٠ سم ، ق (م أ^ ب) = ق (م أ^ حـ) = ٩٠° ، م أ = ٥سم، نُصِّفت $\overline{ب حـ}$ في النقطة د.

أ أثبت أن $\overline{ب حـ}$ ⊥ المستوي م أ د.

ب أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب حـ ، أ ب حـ.

٣ أ ب حـ مثلث فيه ق (أ^) = ٣٠° ، أ ب = ١٠سم، رسم من ب العمود $\overline{ب د}$ على مستوي المثلث أ ب حـ بحيث كان ب د = ٥سم. أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ د حـ ، أ ب حـ.

٤ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، رسم من س العمود $\overline{س و}$ على مستوي المثلث س ص ع بحيث كان د س = س ص.

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س ص ع ، د ص ع.

٥ في الشكل المستويان π_1 ، π_2 متعامدان ، أ′ هـ و ب′ مستطيل

أ ب حـ د مستطيل فيه

حـ ب = ٤٠سم ،

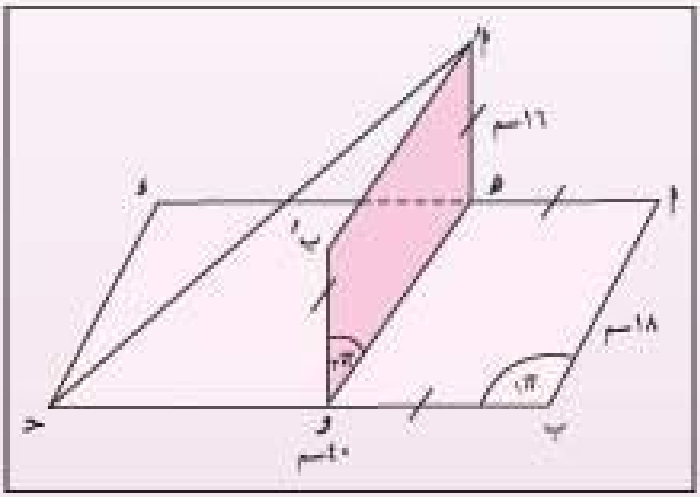
أ ب = ١٨سم ،

أ هـ = أ′ هـ

= ب′ و = ب و

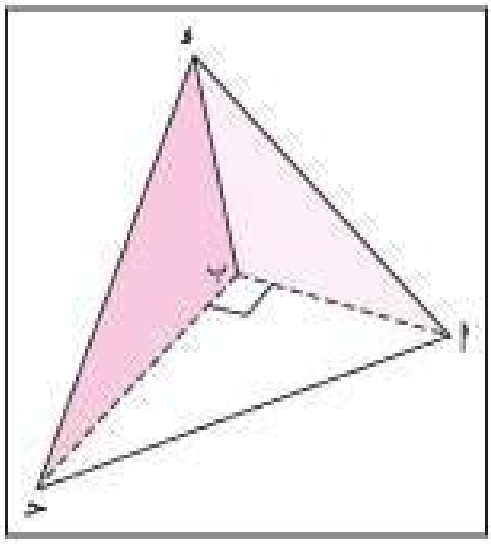
= ١٦سم

أوجد أ′ حـ.



٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

$\overline{\text{ب د}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ أثبت أن المستويين د ب أ ، د ب حـ متعامدان .



٧ المستويان π_1 ، π_2 متعامدان ومتقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

رسم المثلث أ ب حـ بحيث كان أ ب حـ ⊆ المستوي π_1 ، ق (ب $\hat{\text{أ}}$ حـ) = ٩٠° ، ورسم المثلث أ ب د بحيث كان أ ب د ⊆ المستوي π_2 ، ق (د $\hat{\text{ب}}$ أ) = ٩٠° . أثبت أن المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ د}}$ يكون عمودياً على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

٣ - ٧ ملخص وتمارين عامة Summary and General Exercises

- يبنى علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقاً من التسليم بصحة عبارات أولية دون برهان، تسمى موضوعات أو «مسلمات». أي أن الموضوعة هي عبارة رياضية نقبلها دون برهان وسنورد فيما يلي الموضوعات التي استخدمت في هذا الفصل:

موضوعة (١):

كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

موضوعة (٢):

أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.

موضوعة (٣):

في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقط ليست مستقيمة.

موضوعة (٤):

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط مختلفة وغير مستقيمة فيوجد مستوٍ وحيد يحويها.

موضوعة (٥):

يحوى الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.

موضوعة (٦):

إذا اشترك مستقيم ل ومستوي π في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم ل يقع بكامله في المستوي π.

موضوعة (٧):

إذا اشترك مستويان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

موضوعة (٨):

يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيماً معلوماً ويمر بنقطة معلومة.

موضوعة (٩):

يوجد مستوٍ وحيد يوازي مستوياً معلوماً ويمر بنقطة معلومة.

- نقول لمجموعة من النقاط في الفضاء انها على استقامة واحدة (أو مستقيمة) إذا وجد في الفضاء (ف) مستقيم (ل) تنتمي إليه جميع هذه النقاط.
- نقول عن مجموعة النقط أنها مستوية (أو تقع في مستوٍ واحد). إذا وجد مستوٍ ما يحويها.
- يتقاطع مستقيمان ل ، م إذا وجدت نقطة وحيدة أ مشتركة بينهما (أي أن ل ∩ م = {أ}).
- تتلاقى عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة أ مشتركة بينها (أي أن ل ∩ م ∩ ... ∩ ن = {أ}).
- يكون المستويان المختلفان π_1 ، π_2 متقاطعين إذا كان $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi$.
- إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.
- يوجد مستوٍ وحيد (واحد وواحد فقط) يحوي مستقيماً معلوماً ويمر بنقطة خارجة عن هذا المستقيم.
- المستقيمان المتقاطعان يحددان مستوياً وحيداً.
- يسمى المستقيمان ل ، ك متوازيين إذا:

i وقعا في مستوٍ واحد.

ii كانا غير متقاطعين.

- المستقيمان المختلفان والمتوازيان يحددان مستوياً وحيداً.
- يتعين المستوي في الفضاء:

١ بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة

أو

٢ مستقيم ونقطة خارجة عنه (لا تنتمي إليه)

أو

٣ بمستقيمين متقاطعين.

أو

٤ بمستقيمين مختلفين متوازيين.

ويلاحظ أن:

- كل من الحالات الأربع سابقة الذكر تعين مستوياً وحيداً.

- يقال لمستقيمين ل ، م في الفضاء أنهما

١ متقاطعان ، إذا كان بينهما نقطة مشتركة واحدة فقط.

٢ متوازيان ، إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.

٣ متخالفان ، إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.

- إذا كان ل ، م مستقيمين متخالفين فإن ل ∩ م = ϕ
- قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين هو قياس إحدى الزوايا التي يصنعها أحد هذين المستقيمين مع أي مستقيم ثالث مرسوم من نقطة عليه موازياً المستقيم الآخر.
- نقول إن المستقيم ل يقطع المستوي π إذا كان بين ل ، π نقطة مشتركة واحدة فقط.
- المستقيم ل الذي لا يقطع المستوي π يسمى مستقيماً موازياً للمستوي π.
- يقال لمستويين π_1 ، π_2 أنهما متوازيان (وتكتب $\pi_1 // \pi_2$) إذا كان:

  $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$ أو $\pi_1 = \pi_2$
- إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيماً في المستوي فإنه يوازي هذا المستوي.
- إذا وازى مستقيم مستوياً فكل مستوٍ مار بالمستقيم وقاطع للمستوي المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.
- المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن خط تقاطعهما يوازي كلاً من هذين المستقيمين.
- إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.
- يكون المستقيم ل عمودياً على المستوي π (أو المستوي π عمودي على المستقيم ل) إذا كان المستقيم ل عمودياً على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي π. ونعبر عن ذلك بالرموز كالتالي: ل $\perp \pi$.
- المستقيم ل الذي يقطع المستوي π ولا يكون عمودياً عليه، يقال أنه مائل على المستوي π.
- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.
- جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي لهذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عمودي على المستقيم المعلوم.

- إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين.
- إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين، فإنه يكون عمودياً على المستوي الآخر.
- المستقيمان العمودان على مستوٍ متوازيان.
- إذا توازي مستقيمان أحدهما عمودي على مستوٍ كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوي أيضاً.
- الزاوية بين مستويين مشتركين في مستقيم هي اتحاد نصفي هذين المستويين، يسمى المستقيم المشترك «حافة الزاوية الزوجية» أو «الفاصل المشترك» ويسمى كل من نصفي المستويين «وجه الزاوية الزوجية».
- الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.
- قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي زاوية من زواياها المستوية.
- إذا كان مستقيم معلوم عمودياً على مستوٍ معلوم، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوي المعلوم.
- إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عمودياً على المستوي الآخر.
- إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث، فإن خط تقاطع المستويين يكون عمودياً على هذا المستوي الثالث.

تمارين عامة

٣ - ٧

بنود موضوعية:

• **أولاً: أي من العبارات التالية صحيحة وأيها خطأ مع التعليل:**

١ علاقة التوازي المعرفة على مجموعة مستويات الفضاء علاقة تكافؤ.

٢ علاقة التوازي المعرفة على مجموعة مستقيمات الفضاء علاقة تكافؤ.

٣ كل مستوٍ يمر بمستقيم عمودي على مستوٍ معلوم يكون عمودياً على ذلك المستوي.

٤ كل مستقيمين يعينان مستوياً وحيداً.

٥ المستقيمان العمودان على ثالث متخالفان.

٦ المستويان العموديان على ثالث متوازيان.

٧ إذا كان كل من المستقيمين ل ، م موازياً لمستوٍ معلوم فإن هذين المستقيمين متوازيان.

• **ثانياً: لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كان ل $\perp$ π_1 ، ل $\subseteq$ π_2 فإن:

(أ) $\pi_1 // \pi_2$ (ب) $\pi_1 \perp \pi_2$ (جـ) $\pi_1 \cap \pi_2 =$ ل (د) $\pi_1 = \pi_2$

٢ عدد المستقيمات الموازية لمستقيم معلوم هو:

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ليس أياً مما سبق

٣ إذا كان المستقيمان ل ، م متوازيين فإنه يوجد:

أ مستوٍ وحيد يحوي ل ويوازي م

ب مستويان فقط يحوي كل منهما المستقيم ل ويوازي كل منهما المستقيم م

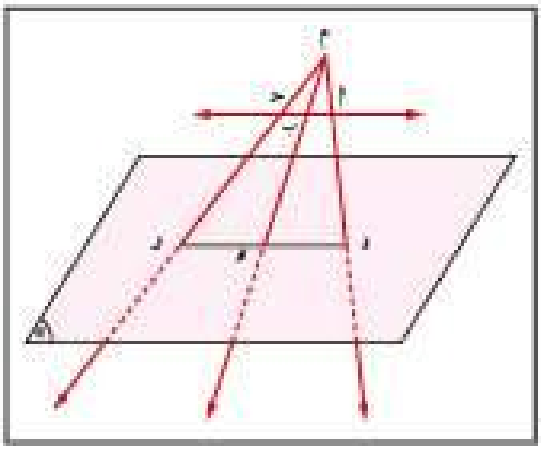
جـ ثلاثة مستويات فقط يحوي كل منها ل ويوازي كل منها م

د عدد لا نهائي من المستويات تحوي ل وتوازي م

٤ أكبر عدد ممكن من المستويات تحدده أربعة مستقيمات متوازية ومختلفة هو:

(أ) $\binom{٤}{٢}$ (ب) ٤! (ج) $\binom{٤}{٣}$ (د) $^{٤}ل_{٢}$

أسئلة تقويمية:

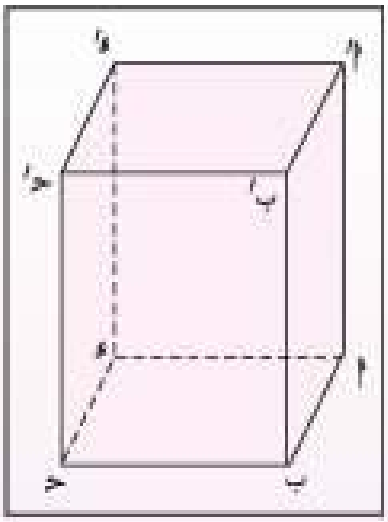


١ $\overleftrightarrow{أح}$ مستقيم يوازي مستوياً معلوماً π، النقطة ب ∈ $\overleftrightarrow{أح}$ ، م ∉ $\overleftrightarrow{أح}$ ، م ∉ π كما بالشكل، رسمت $\overleftarrow{مأ}$ ، $\overleftarrow{مب}$ ، $\overleftarrow{مح}$ فلاقت المستوي π في ء ، هـ ، و

أثبت أن: $\frac{أب}{بح} = \frac{ءهـ}{هـو}$

٢ π مستوي معلوم، $\overleftrightarrow{أء}$ مستقيم معلوم خارج المستوي π بحيث $\overleftrightarrow{أء}$ // المستوي π، رسم المستقيمان المتوازيان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءح}$ فقطعا المستوي π في ب ، ح.

أثبت أن: أء = ب ح ، أب = ء ح



٣ في الشكل المقابل

أب ح ء أ'ب'ح'ء' مكعب.

أثبت أن $\overline{أب}$ عمودي على كل من الوجهين

أ ء ء'أ' ، ب ح ح'ب'

٤ أب ح ء مربع أقيم من النقطة (ء) العمود $\overline{ءو}$ على مستوي المربع. أثبت أن: $\overline{وح} \perp \overline{أء}$

٥ أب ح ء هرم ثلاثي فيه أح = ح ب ، أء = ء ب ، ق (أ$\hat{ح}$ء) = ٩٠°.

نصف $\overline{أب}$ في (و).

أثبت أن:

أولاً: $\overline{أب} \perp$ المستوي و ح ء.

ثانياً: المستوي أ ح ء ⊥ المستوي أ ب ح.

٦ و نقطة خارج مستوي متوازي الأضلاع أ ب حـ ء رسمت القطع: $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ ، $\overline{\text{و حـ}}$ ، و ء . ورسم مستوٍ يوازي مستوي متوازي الأضلاع أ ب حـ ء ويقطع هذه القطع المستقيمة في س ، ص ، ع ، ل (على الترتيب).

أثبت أن: الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع.

٧ أ ب حـ ء أ′ ب′ حـ′ ء′ شبه مكعب قطع بمستوٍ يوازي الحرف الجانبي $\overline{\text{ب ب′}}$ ،

ويقطع: $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ′ ب′}}$ ، $\overline{\text{ب′ أ′}}$ في س ، ص ، ع ، ل (على الترتيب).

أثبت أن المقطع س ص ع ل مستطيلاً.

٨ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية $\hat{\text{ب}}$ ، رسم $\overline{\text{ب ء}}$ ⊥ المستوي أ ب حـ

فإذا كان ب أ = ب حـ = ب ء . فأثبت أن Δ ء أ حـ متطابق الأضلاع، ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ء أ حـ ، ومستوي المثلث ب أ حـ.

٩ أ ب حـ مثلث ، أخذت نقطة هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، رسمت $\overline{\text{هـ ء}}$

بحيث $\overline{\text{هـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$ ، فإذا كانت النقطة و ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

بحيث $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$ أثبت أن $\overline{\text{و ب}}$ ⊥ المستوي ء أ حـ .

١٠ أ ب حـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٣٠سم، م ملتقى القطع المتوسطة فيه. أقيم من م عمود على مستوي المثلث وأخذت نقطة ن على ذلك العمود بحيث كان م ن = ٥سم، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ أثبت أن $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوي ن ء م ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن أ ب ، أ ب حـ.

١١ أ ب حـ ء مستطيل فيه ب حـ = ١٠سم، م ملتقى قطريه. أقيم من م العمود $\overline{\text{م ن}}$ على المستوي أ ب حـ ء وكان م ن = ٥سم.

احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن حـ ء ، أ ب حـ ء .

١٢ أ ب حـ مثلث فيه أ ب = ٨سم ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠° أقيم من ب العمود $\overline{\text{ب ء}}$ على مستوي المثلث أ ب حـ وكان ب ء = ٤سم

احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب حـ ، أ ء حـ.

بعض المصطلحات المستخدمة في المقرر

Some glossary used in this course

The antiderivative	الدالة المقابلة
Definition	تعريف
Theory - theorem	نظرية
Generalization	تعميم
Physics applications	تطبيقات فيزيائية
Geometry applications	تطبيقات هندسية
the definite integral	التكامل المحدد
Properties of the definite integral	خواص التكامل المحدد
The area under a curve	المساحة أسفل المنحنى
volumes of solids of revolution	حجوم الأجسام الدورانية
Law	قانون
Another application on the integral	تطبيقات أخرى على التكامل
Summary and general exercises	ملخصات وتمرينات عامة
the conics sections	القطوع المخروطية
The conic	المخروطي
the parabola	القطع المكافئ
Equation	معادلة
Axis of symmetry	محور التماثل
The focus	البؤرة

The directrix	الدليل
The ellipse	القطع الناقص
The center	المركز
The two vertex	الرأسان
The hyperbola	القطع الزائد
The asymptotes of a hyperbola	الخطوط التقاربية
The eccentricity of the curve	الاختلاف المركزي للمنحنى
Solid geometry - space geometry	هندسة الفضاء
The three dimensional space	الفضاء ذو ثلاثة الأبعاد
Axioms of the space	موضوعات الفضاء
Axiom	موضوعة
Conclusion result	نتيجة
Studid lines and planes in the space	أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء
The lines and planes are parallels	المستقيمات والمستويات المتوازنة
Intersection of two parallel planes with plane	تقاطع مستوٍ مع مستويين متوازيين
Perpendicular line with plane	تعامد مستقيم مع مستوٍ
The dihedral angle	الزاوية بين مستويين
Two planes are perpendicular	تعامد مستويين
The dihedral angle	الزاوية الزوجية
The plane angle of the dihedral angle	الزاوية المستوية لزاوية زوجية

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم ٢٤٧ بتاريخ ١٩٩٨/٦/٧