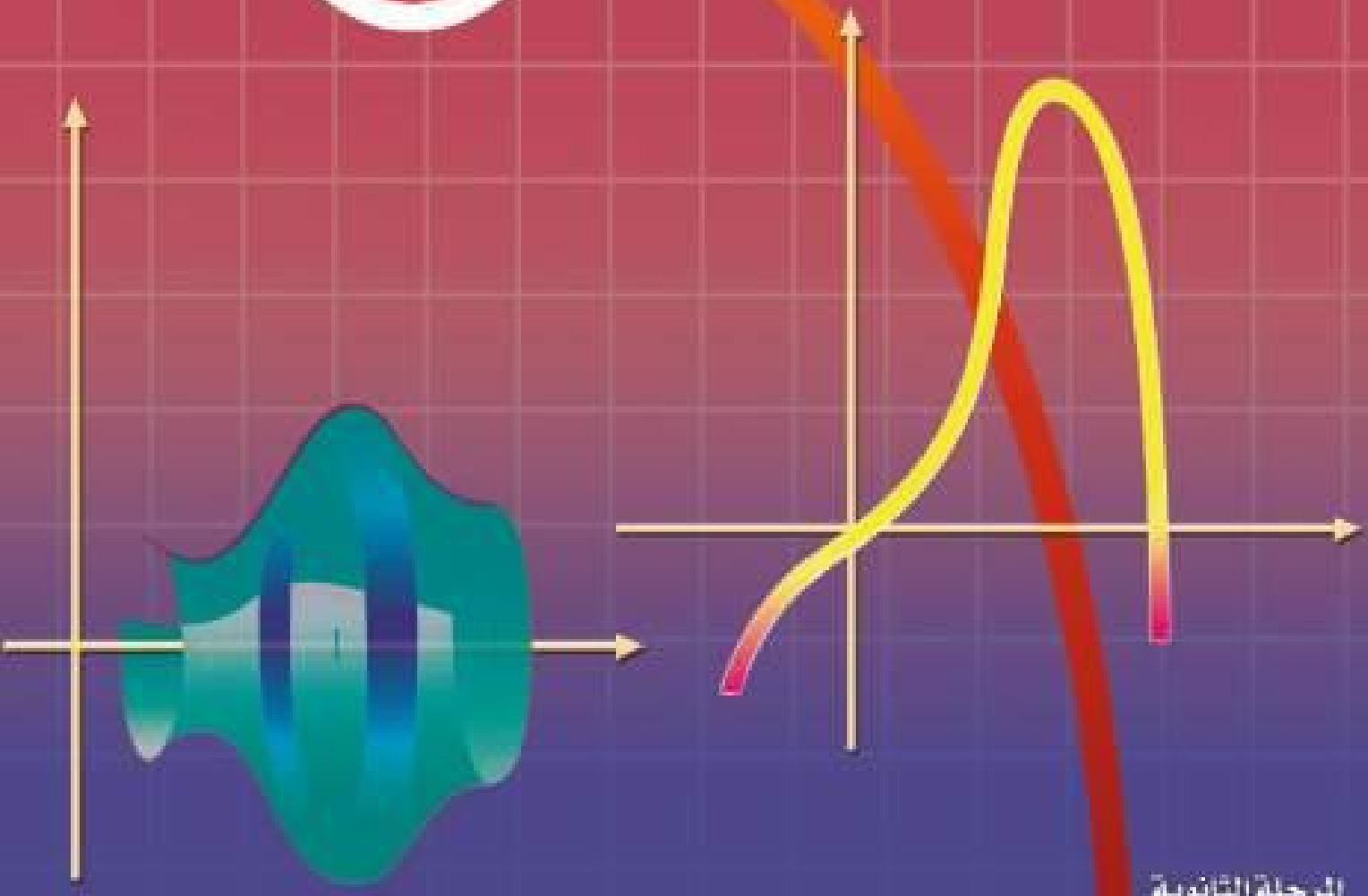
وزارة التربية

الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الجزء الأول



المرحلة الثانوية

الطبعة الخامسة

إهداء خاص من
Y kuwait.net
منتديات ياكويت

الرياضيات

للصف الثاني عشر علمي

الجزء الأول

تأليف

د. أحمد شمس الدين الشيخ — د. حميد فايز حميد

د. عبدالله يوسف الحواج — د. محمد عبدالرحمن القاضي

د. منصور غلوم حسين — د. نصرة حسن الباقر

تحرير ومراجعة

الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

الطبعة الخامسة

١٤٣١ هـ

٢٠١٠ - ٢٠١١ م

حقوق التأليف والطبع محفوظة للدول الأعضاء بتفويض من مكتب التربية العربي لدول الخليج

الطبعة الأولى : ١٩٩٨ - ١٩٩٩م
١٩٩٩ - ٢٠٠٠م
الطبعة الثالثة : ٢٠٠٠ - ٢٠٠١م
٢٠٠٢ - ٢٠٠٣م
الطبعة الرابعة : ٢٠٠٥ - ٢٠٠٦م
٢٠٠٧ - ٢٠٠٨م
الطبعة الخامسة : ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م
٢٠١٠ - ٢٠١١م

أعضاء لجنة التعديل :

د. هاني رضا فران (مشرفاً)

أ. حصة يونس محمد العلي أ. مصطفى كامل الهنداوي

أ. موسى الشهير بزهير

تنفيذ الرسوم بالحاسوب :

أ. رأفت سمير زكي بالتعاون مع الباحثين الفنيين بقسم مناهج الثانوي/ إدارة المناهج

أعضاء لجنة المواءمة :

أ. حصة يونس محمد العلي (رئيساً)

أ. إلهام عفيفي علي أ. فرحات محمد عبدالصبور

أ. فتحية محمود أبوزور

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

خبراء المشروع

■ اتفقت الدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج على تدريس هذا الكتاب المدرسي الموحد في مدارسها، وهو يخدم الصف الثالث الثانوي العلمي في كل من دولة الإمارات العربية المتحدة، مملكة البحرين، سلطنة عُمان، دولة قطر، المملكة العربية السعودية، والصف الثاني عشر العلمي في دولة الكويت.

د. حميد فايز حميد
أ. محمد هلال البوسفي

د. عبدالله الحواج
أ. هدى إسماعيل العوضي
أ. ناهدة إبراهيم الخياط
أ. سلوى لطيف مطر

د. منصور غلوم حسين
أ. علي عبدالله الصراف
أ. إبراهيم حسين القطان

د. محمد بن علوي البار
د. محمد القاضي
د. يوسف بن صالح الشنيفي
د. أحمد شمس الدين الشيخ

أ. محمد راشد بن سعيد الحديدي
أ. الحسيني محمد الغرباوي

د. نصرة رضا حسن الباقر
أ. عبدالله محمد النعمة

الدكتور/ عبدالفتاح الشرقاوي

المحتوى

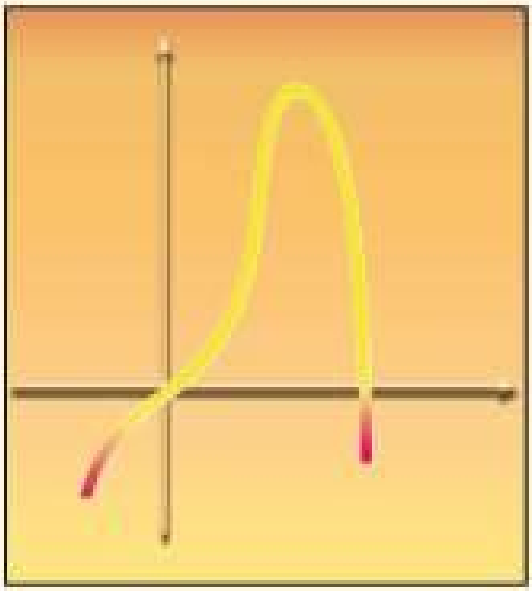
الموضوع	الصفحة
مقدمة	٩

الفصل الأول ١

النهايات والاتصال	١١
١ - ١ نهاية الدالة عند نقطة	١٣
١ - ٢ نهايات تشتمل على $+\infty$ ، $-\infty$	٣٢
١ - ٣ الصيغ غير المعينة	٤٠
١ - ٤ اتصال دالة عند نقطة	٥٢
١ - ٥ نظريات الاتصال	٥٩
١ - ٦ الاتصال على فترة	٦٥
١ - ٧ ملخص وتمارين عامة	٧٢

الفصل الثاني ٢

الاشتقاق	٧٧
٢ - ١ المشتقة	٧٩
٢ - ٢ قواعد أساسية لإيجاد المشتقة	٩٨
٢ - ٣ قواعد إضافية لإيجاد المشتقة	١٠٦
٢ - ٤ قاعدة التسلسل وتعميم قاعدة القوى	١١٩
٢ - ٥ الاشتقاق الضمني	١٢٨



المحتوى

الموضوع	الصفحة
٢ - ٦ المشتقات ذات الرتب العليا	١٣٢
٢ - ٧ ملخص وتمارين عامة	١٣٦
الفصل الثالث ٣	
تطبيقات هندسية ورياضية	١٤٥
٣ - ١ المماسات والأعمدة	١٤٧
٣ - ٢ المعدلات الزمنية المرتبطة (معدلات التغير المترابطة)	١٥٣
٣ - ٣ أ القيم الصغرى والقيم العظمى	١٦٠
٣ - ٣ ب القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية	١٧٥
٣ - ٤ التقعر ونقطة الانعطاف	١٨٥
٣ - ٥ رسم بيان الداله الحدودية	١٩٢
٣ - ٦ تطبيقات عملية للقيم العظمى أو الصغرى	١٩٧
٣ - ٧ ملخص وتمارين عامة	٢٠٣

المقدمة

المربي الفاضل . . .
المربية الفاضلة . . .

يسر مكتب التربية العربي لدول الخليج/المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج، أن يضع بين يديك كتاب الطالب لرياضيات الصف الثاني عشر/علمي في دولة الكويت المعادل للصف الثالث الثانوي العلمي في كل من: دول الإمارات العربية المتحدة، ومملكة البحرين، وسلطنة عُمان، ودولة قطر، والمملكة العربية السعودية. وذلك استكمالاً لمسيرة توحيد وتطوير مناهج الرياضيات لمراحل التعليم العام. وقد وضع هذا الكتاب في ظل منهج خليجي موحد، من أهم ملامحه أنه:

* يتناول محتوى موحداً في كل الدول الأعضاء بالمكتب، بقصد بناء الإنسان وتنمية المجتمع في إطار وحدة الفكر والهدف الخليجي.
* يتناول في محتواه موضوعات تربط دراسة الرياضيات وتكنولوجيا العصر مثل الحاسبات الإلكترونية.
* يعكس الاتجاهات العالمية المعاصرة في الرياضيات المدرسية.
* يتم بناؤه من خلال عمل جماعي تشارك فيه جميع الدول الأعضاء، وينبع من فكرها وتطلعاتها وواقعها.
* يؤكد على الدور الوظيفي للرياضيات وخاصة فيما يتعلق بحل المشكلات، ويؤكد على إيجابية ونشاط المتعلم.
* يراعي الفروق الفردية من خلال تنوع الأنشطة وتقديم توجيهات عمل في كتاب المعلم.
* يأتي بناؤه في تتابع تطويري، محاوره: التخطيط والإعداد، والتجريب، والتقويم المصاحب والتحسين، ثم التعميم، مع المتابعة التطويرية في ضوء التغذية الراجعة.

هذا ويتضمن محتوى منهج الثاني عشر الحد الأدنى من المعرفة والثقافة الرياضية اللازم لمتطلبات هذا الصف من أجل المواطنة ومن أجل متابعة الدراسة.

وقد جاء كتاب الطالب في جزأين:

الجزء الأول:

يتناول ثلاثة موضوعات وهي: النهايات والاتصال، الاشتقاق وتطبيقات هندسية ورياضية على الاشتقاق.

الجزء الثاني:

يتناول ثلاثة موضوعات وهي: التكامل وتطبيقاته، القطوع المخروطية وهندسة الفضاء.

أيها المربي الفاضل..
أيتها المربية الفاضلة..

إذا كانت كتب الرياضيات الموحدة قد حرصت على تقديم الأفضل، مادة وطريقة، فإنَّ الدور الذي ننتظره منك هو الذي يؤكد هذا الاتجاه وينميه، ويجعله وسيلة لإثارة الدافعية لدى المتعلم، فيكون تعلمه معتمداً على نشاطه، ويكون نشاطه منطلقاً من رغبة ذاتية، ويستطيع المعلم أن يهيئ للرغبة دوافعها، وإننا لعلى يقين من النجاح والتوفيق لجميع الزملاء من معلمين ومعلمات فيما قصدنا إليه، متى صحت النية وصدق العزم.

والله من وراء القصد، وهو يهدي السبيل،

مدير المركز
د. رشيد الحمد

النهايات والاتصال

The Limits and Continuity

الفصل الأول

١ - ١ نهاية الدالة عند نقطة.

١ - ٢ نهايات تشتمل على $+\infty$ ، $-\infty$.

١ - ٣ الصيغ غير المعينة.

١ - ٤ اتصال دالة عند نقطة.

١ - ٥ نظريات الاتصال.

١ - ٦ الاتصال على فترة.

١ - ٧ ملخص وتمارين عامة.

١ - ١ نهاية الدالة عند نقطة

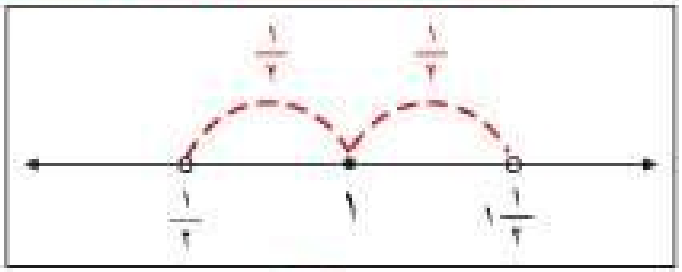
Limit of a Function at Apoint

جوار العدد أ حيث أ ∈ ح :

في الشكل (١ - ١)

تسمي الفترة المفتوحة $(\frac{١}{٢} ، ١\frac{١}{٢})$

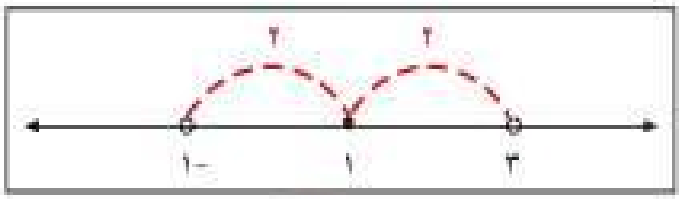
جواراً للعدد ١ وفقاً للمعيار $\frac{١}{٢}$



شكل (١-١)

في الشكل (١ - ٢)

تسمي الفترة المفتوحة (-١ ، ٣) جواراً للعدد ١ وفقاً للمعيار ٢

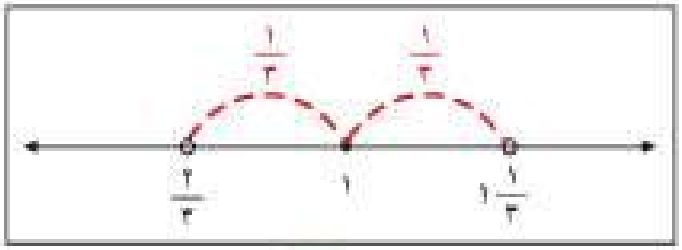


شكل (١-٢)

في الشكل (١ - ٣)

تسمي الفترة المفتوحة $(\frac{٢}{٣} ، ١\frac{١}{٣})$

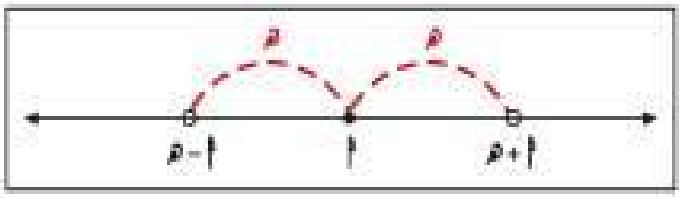
جواراً للعدد ١ وفقاً للمعيار $\frac{١}{٣}$.



شكل (١-٣)

تلاحظ مما سبق أن أي فترة مفتوحة على الصورة (١ - هـ ، ١ + هـ) حيث هـ > ٠ تسمى جواراً للعدد ١ وفقاً للمعيار هـ.

وبالتالي إذا كان أ ∈ ح فإنَّ الفترة المفتوحة (أ - هـ ، أ + هـ) حيث هـ > ٠ تكون جواراً للعدد أ . انظر شكل (١ - ٤).



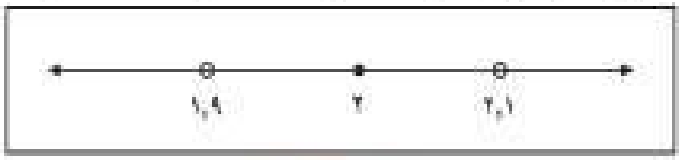
شكل (١-٤)

مثال ١

إذا كانت الفترة المفتوحة (١,٩ ، ٢,١) جواراً للعدد ٢ فاكتب بعض القيم القريبة جداً من العدد ٢ في هذا الجوار.

الحل

من القيم القريبة جداً من العدد ٢ وفقاً للمعيار ٠,١ هي ١,٩٥ ، ١,٩٩ ، ١,٩٩٩ ، ١,٩٩٩٩ ، ... وكذلك ٢,٠١ ، ٢,٠٠١ ، ٢,٠٠٠١ ، ٢,٠٠٠٠١ ، ... انظر شكل (١ - ٥)



شكل (١-٥)

ملاحظة:

- [أ ، أ + هـ) تسمى جواراً أيمن للعدد أ وهو فترة نصف مغلقه تحوى العدد أ .
- (أ − هـ ، أ] تسمى جواراً أيسر للعدد أ وهو فترة نصف مغلقة تحوى العدد أ .

فمثلاً في المثال السابق يكون

[٢ ، ٢,١) جوار أيمن للعدد ٢،

(١,٩ ، ٢] جوار أيسر للعدد ٢ .

تعريف (١)

لتكن س كمية متغيرة، أ ∈ ح ، نقول إن س تقترب من أ باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية | س − أ | أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

نهاية الدالة عند نقطة .

مفهوم نهاية الدالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية التي قدمت إلى الرياضيات الشيء الكثير، بل ونهضت بتطبيقاتها الأساسية في مجالاتها المختلفة وفي جميع العلوم الطبيعية الأخرى. وسنشرح هنا هذا المفهوم من خلال بعض الأمثلة التوضيحية.

مثال توضيحي (١):

اعتبر الدالة: ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$ حيث س ∈ ح − {١}.

سندرس قيم الدالة ق في جوار للعدد ١

نلاحظ أن الدالة ق غير معرفة عند س = ١

أي أن ق (١) غير معرفة.

والآن إذا أردنا أن نتعرف على قيم للدالة ق عندما س تقترب من العدد ١ دعنا نأخذ قيماً قريبة جداً من العدد ١ من جهة اليسار وقيماً أخرى قريبة جداً من العدد ١ من جهة اليمين كما هو موضح في الجدول التالي:

س	....	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	... ←	①	... →	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩	٠,٩٩	,٩	...
ق(س)	....	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	... ←	غير معرفة	... →	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	...

واضح من الجدول أنه كلما أخذنا قيماً قريبة جداً من العدد ١، تقترب قيم ق(س) باطراد من العدد ٢.

والجدول التالي يبين ذلك.

| س − ١ |	...	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	... ←		... →	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	...
| ق(س) − ٢ |	...	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	... ←		... →	٠,٠٠٠١	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	...

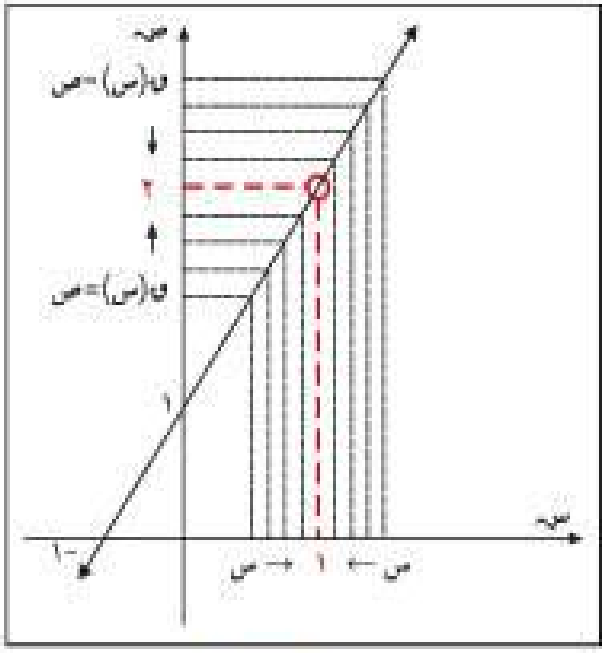
وللتأكد مما سبق:

نضع ق(س) = $\frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ١}$

= س + ١ حيث س ≠ ١

انظر شكل (١ − ٦)

نلاحظ أن (١ ، ٢) ∉ لبيان الدالة ق وبالتالي واضح أنه عندما تقترب س من العدد ١ باطراد فإنَّ ق(س) تقترب باطراد من العدد ٢ أي أن س ← ١ فإنَّ ق(س) ← ٢



شكل ١-٦

سنعبر عن ذلك رياضياً بقولنا أن:

نهاية الدالة ق عندما تؤول س إلى ١ تساوي ٢ ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي:

$$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$$

تعريف ٢

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل يعني أنه عندما تقترب س من أ باطراد ، س ≠ أ ،

فإنَّ: د(س) تقترب باطراد من ل.

أي أنه لكل س في جوار أ ، س ≠ أ فإنَّ ق(س) تأخذ قيماً مناظرة في جوار ل.

لاحظ أيضاً أنه إذا أخذت س قيماً في الجوار الأيسر للعدد أ ، س ≠ أ فإننا نقول إن س تقترب من أ من جهة اليسار.

وإذا أخذت س قيماً في الجوار الأيمن للعدد أ ، س ≠ أ

فإننا نقول إن س تقترب من أ من جهة اليمين.

نلاحظ من المثال السابق أنه:

١ كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار فإنَّ ق(س) تقترب باطراد من العدد ٢ أي أن:

س ← ١⁻ فإنَّ ق(س) ← ٢

سنعبر عن ذلك رياضياً بقولنا أن:

نهاية ق(س) عندما تؤول س إلى ١ من جهة اليسار تساوي ٢.

ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي:

$\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا}$ ق(س) = ٢ وتسمى النهاية من اليسار

(يقرأ الرمز س ← ١⁻ كالتالي: س تؤول إلى ١ من اليسار).

٢ كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين فإنَّ ق(س) تقترب باطراد من العدد ٢

أي أن: س ← ١⁺ فإنَّ ق(س) ← ٢

سنعبر عن ذلك رياضياً بقولنا أن:

نهاية ق(س) عندما تؤول س إلى ١ من جهة اليمين تساوي ٢.

ونعبر عن ذلك رمزياً كالتالي:

$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا}$ ق(س) = ٢ وتسمى النهاية من اليمين

(يقرأ الرمز س ← ١⁺ كالتالي: س تؤول إلى ١ من اليمين).

٣ $\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ ق(س) = ٢

لذلك نقول إن نهاية الدالة: ق(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ عندما س تؤول إلى ١ موجودة

وتساوي ٢ أي أن $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ = ٢

لاحظ في هذا المثال أن الدالة: ق(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ حيث س ∈ ح - {١} غير معرفة عند س = ١

لكن $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا}$ ق(س) موجودة.

مثال توضيحي (٢):

اعتبر الدالة: د(س) = ٢س − ١ : س ∈ ح

سندرس قيم الدالة د عندما س تأخذ قيماً قريبة جداً من العدد الحقيقي ٢

من الواضح أن س تقترب من العدد ٢ بإحدى طريقتين:

أ عندما تقترب س من العدد الحقيقي ٢ من جهة اليسار كما هو موضح بالجدول الآتي:

س	١,٧	١,٨	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	...
د(س)	٢,٤	٢,٦	٢,٨	٢,٩٨	٢,٩٩٨	٢,٩٩٩٨	...

واضح أن قيمة د(س) تقترب من العدد الحقيقي ٣ باطراد كلما اقتربت س من العدد ٢ من جهة اليسار باطراد.

أي أن $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ د(س) = ٣ وهي النهاية من اليسار.

ب عندما تقترب س من العدد الحقيقي ٢ من جهة اليمين كما هو موضح بالجدول الآتي:

س	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	...
د(س)	٣,٦	٣,٤	٣,٢	٣,٠٢	٣,٠٠٢	...

واضح أن قيم د(س) تقترب من العدد ٣ باطراد كلما اقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين باطراد.

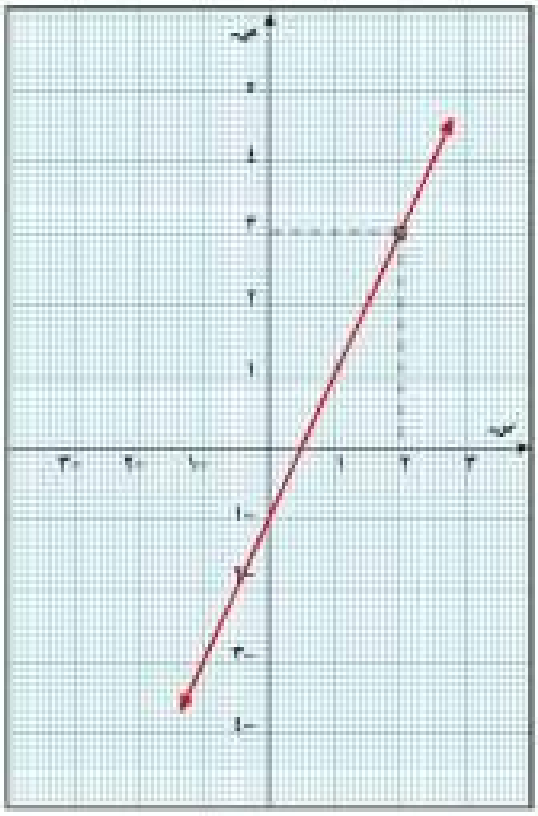
أي أن $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ د(س) = ٣ وهي النهاية من اليمين

يوضح المثال التوضيحي السابق أن:

i $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ (٢س − ١) = ٣

ii $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ (٢س − ١) = ٣

iii $\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا}$ (٢س − ١) = $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا}$ (٢س − ١) = ٣



شكل ١-٧

لذلك نقول إن نهاية الدالة: د(س) = (٢س − ١) عندما س تؤول إلى ٢ موجودة، وتساوي ٣، أي أن:

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (٢س - ١) = ٣$$

لاحظ في هذا المثال، أن الدالة: د(س) = ٢س − ١ : س ∈ ح معرّفة عند س = ٢،

د(٢) = ٢ × ٢ − ١ = ٣ ، وأن:

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (٢س - ١) = ٣ = د(٢).$$

مثال توضيحي (٣)

اعتبر الدالة:

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & : س \neq ٢ \\ ١ & : س = ٢ \end{cases}$$

لاحظ أن قيم هذه الدالة مطابقة لقيم الدالة المذكورة في المثال التوضيحي الثاني ما عدا عند س = ٢ حيث إن د(٢) = ٣ في المثال السابق، ولكن في هذا المثال هـ(٢) = ١، وبما أن تعريف النهايات يعتمد على قيم هـ(س) ، د(س) لكل س في جوار العدد ٢ دون الاهتمام بقيم تلك الدوال عند س = ٢ لذلك نستنتج أن:

$$\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}} هـ(س) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نهـا}} د(س) = ٣$$

$$\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} هـ(س) = \underset{س \to ٢^+}{\text{نهـا}} د(س) = ٣$$

وبالتالي $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = ٣$

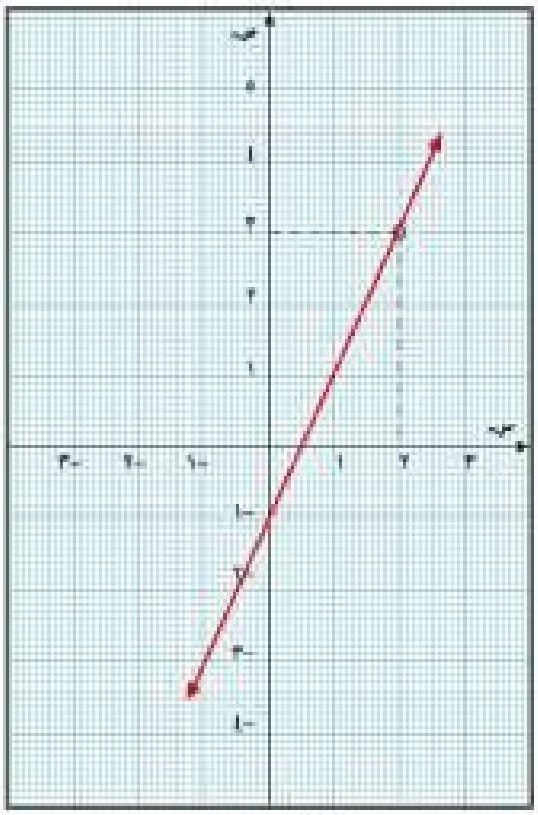
أي أن:

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س) = ٣$$

وحيث إن هـ (٢) = ١ فإنَّ:

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س) \neq هـ(٢)$$

لاحظ أن هـ(٢) ، $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} هـ(س)$ موجودتان ولكنهما غير متساويتين.



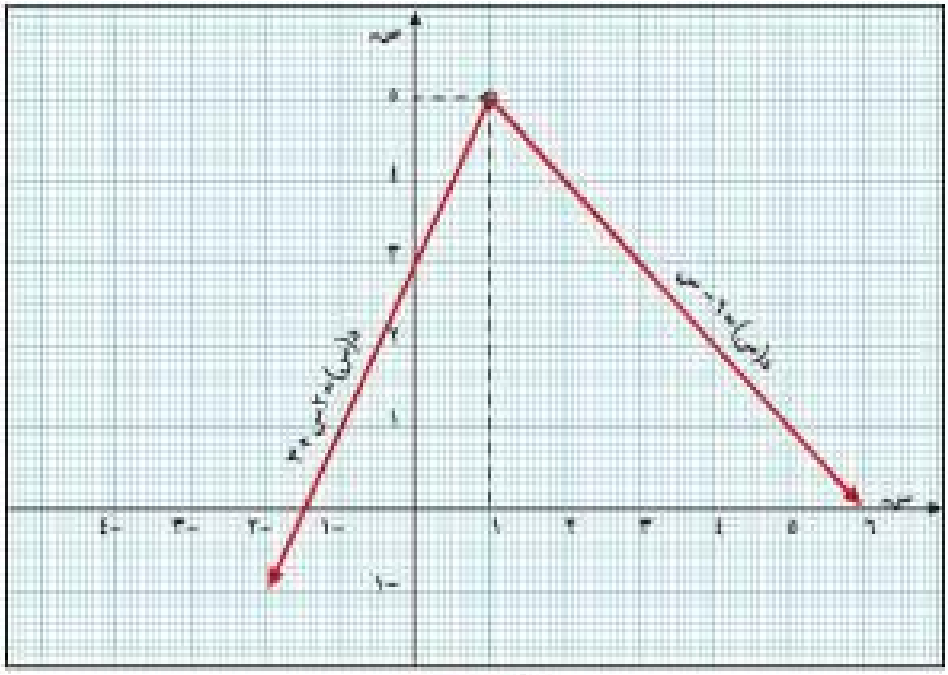
شكل ١-٨

مثال توضيحي (٤)

اعتبر الدالة الحقيقية:

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & : س < ١ \\ ٦ - س & : س > ١ \end{cases}$$

لاحظ أن الدالة د(س) المذكورة أعلاه غير معرفة عند س = ١ وإنما هي معرفة على يمين هذه القيمة وعلى يسارها كما يوضح شكل (١ - ٩).



شكل ١-٩

ومن الشكل يتبين أن د(س) تقترب باطراد من العدد ٥ كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليمين باطراد.

أي أن: $\underset{س \to ١^+}{نهـا}$ د(س) = ٥

وبالمثل د(س) تقترب باطراد من العدد ٥ كلما اقتربت س من العدد ١ من جهة اليسار باطراد.

أي أن: $\underset{س \to ١^-}{نهـا}$ د(س) = ٥

∴ $\underset{س \to ١^-}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ١^+}{نهـا}$ د(س) = ٥

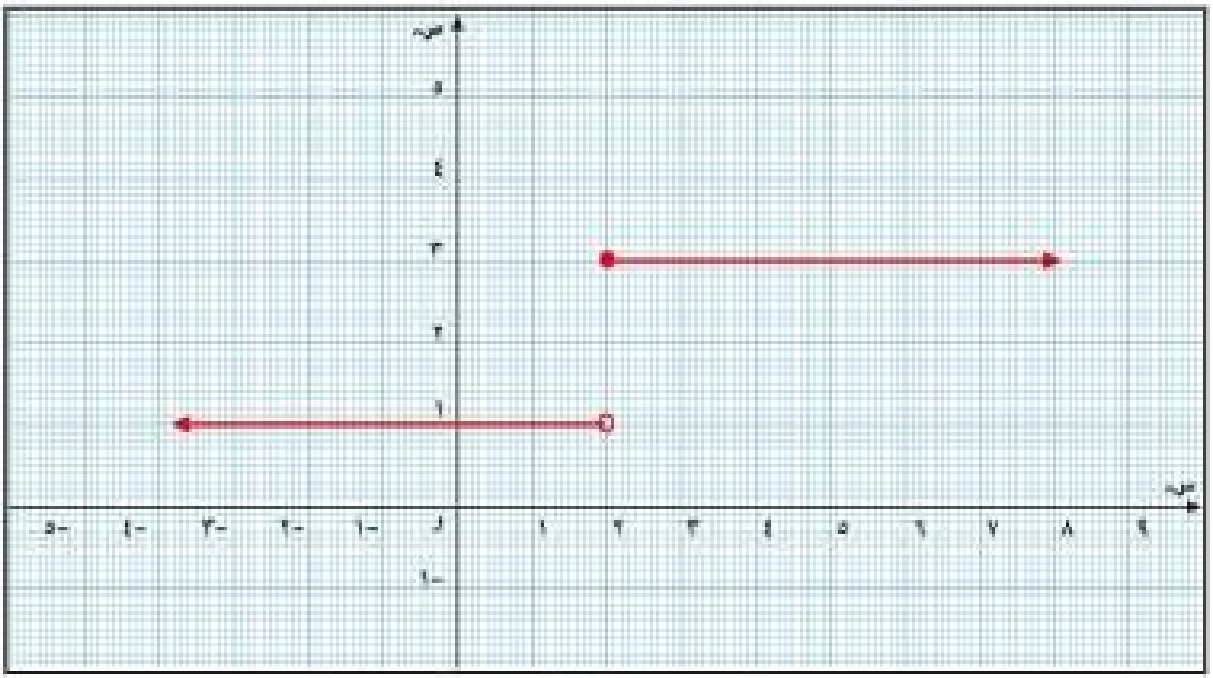
∴ $\underset{س \to ١}{نهـا}$ د(س) = ٥

مثال توضيحي (٥)

اعتبر الدالة:

$$د(س) = \begin{cases} ٣ & : س \geq ٢ \\ ١ & : س < ٢ \end{cases}$$

بيان هذه الدالة موضح في شكل (١ - ١٠).



شكل (١-١٠)

ويتضح بسهولة أن:

$$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ١ \text{ ، } \lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٣$$

$$\therefore \lim_{س \to ٢^-} د(س) \neq \lim_{س \to ٢^+} د(س)$$

ويعني ذلك أن $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة.

نلاحظ في هذا المثال أن الدالة معرفة عند العدد ٢ لكن $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة.

تدريب (١)

اعتبر الدالة: $د(س) = \begin{cases} س + ١ & : س \geq ٠ \\ ٢ - س & : س < ٠ \end{cases}$

بين أن $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا}$ د(س) غير موجودة، وأن $\underset{س \leftarrow ٠^+}{نهـا}$ د(س) = د(٠)،

ثم ارسم بيان الدالة د(س) لتتأكد من صحة إجابتك.

مما تقدم نستطيع استخلاص ما يأتي:

١ إذا كانت قيمة د(س) تقترب باطراد من عدد حقيقي ب عندما تقترب س بقدر كاف من جهة اليسار من عدد حقيقي أ فإننا نقول إن نهاية د(س) عندما تؤول س إلى أ من اليسار هي ب ونكتب ذلك على الصورة:

$\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ د(س) = ب

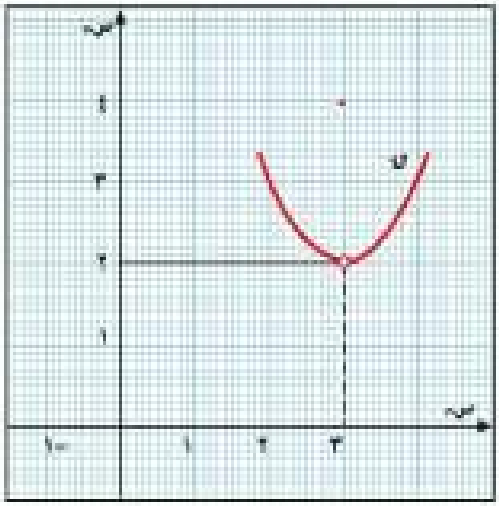
٢ إذا كانت قيمة د(س) تقترب باطراد من عدد حقيقي ب عندما تقترب س بقدر كاف من جهة اليمين من عدد حقيقي أ فإننا نقول إن نهاية د(س) عندما تؤول س إلى أ من اليمين هي ب، ونكتب ذلك على الصورة:

$\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ د(س) = ب.

نظـريـة ١

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د(س) = ب إذا وإذا فقط $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ د(س) = ب = $\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ د(س)

تدريب (٢): بالاستعانة بالأشكال التالية أوجد إن أمكن:

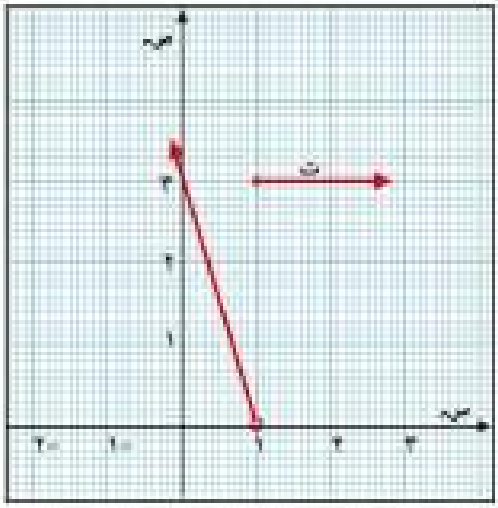


أ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا}$ ق(س) .....

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا}$ ق(س) .....

$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا}$ ق(س) .....

ق(٣) .....



ب

نهـا ت(س) _____
س←١⁺

نهـا ت(س) _____
س←١⁻

نهـا ت(س) _____
س←١

ت(١) _____

جـ

نهـا هـ(س) _____
س←٢⁺

نهـا هـ(س) _____
س←٢⁻

نهـا هـ(س) _____
س←٢

نهـا هـ(س) _____
س←٣

حساب النهاية عند نقطة :

من خلال مفهوم النهاية الذي تناولناه يمكن بسهولة إثبات صحة النظرية التالية والمتعلقة بنهاية الدالة الثابتة .

نظـريـة ٢

إذا كانت د دالة ثابتة :

د(س) = ل : س ∈ ح

فإنه لأي أ ∈ ح يكون : نهـا د(س) = نهـا ل = ل
س←أ س←أ

فمثلاً : نهـا ٢ = ٢ ، نهـا (-٥) = -٥
س←-٣ س←٠

نظـريـة ٣

إذا كانت د(س) = س : س ∈ ح

فإنه لأي أ ∈ ح يكون:

$$\underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س) = \underset{س \to أ}{نهـا}\ س = أ$$

فمثلاً: $\underset{س \to ٤}{نهـا}\ س = ٤$ ، $\underset{س \to -٣}{نهـا}\ س = -٣$

إن الحساب المباشر لنهايات الدوال قد يحتاج في كثير من الأحيان إلى الوقت والجهد فضلاً عما يتخلله من صعوبة، ولذلك يلزم اللجوء إلى بعض الأساليب الأخرى غير المباشرة لتبسيط عملية حساب النهايات وتوفر الوقت والجهد، وهذا ما نعرضه في النظريات الآتية:

نظـريـة ٤

لتكن د ، هـ دالتين ، أ ، ب ، حـ ∈ ح بحيث إن:

$\underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س) = ب$ ، $\underset{س \to أ}{نهـا}\ هـ(س) = حـ$ عندئذ يكون:

١ $\underset{س \to أ}{نهـا}\ [د(س) \pm هـ(س)] = \underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س) \pm \underset{س \to أ}{نهـا}\ هـ(س) = ب \pm حـ$

٢ $\underset{س \to أ}{نهـا}\ [د(س) \cdot هـ(س)] = \underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س) \cdot \underset{س \to أ}{نهـا}\ هـ(س) = ب \cdot حـ$

٣ إذا كانت حـ ≠ ٠ فإنَّ:

$$\underset{س \to أ}{نهـا}\ \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س)}{\underset{س \to أ}{نهـا}\ هـ(س)} = \frac{ب}{حـ}$$

٤ إذا كانت ب ≥ ٠ وكانت د(س) ≥ ٠ لقيم س القريبة جداً من أ (من جهة اليمين ومن جهة اليسار) فإنَّ:

$$\underset{س \to أ}{نهـا}\ \sqrt{د(س)} = \sqrt{\underset{س \to أ}{نهـا}\ د(س)} = \sqrt{ب}$$

ملاحظة :

النظرية السابقة تبقى صحيحة حتى إذا أخذنا النهاية من اليمين فقط أو النهاية من اليسار فقط .

مثال ١

احسب النهايات الآتية :

أ $\lim\limits_{س \to ٢} س^٢$ ب $\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٥س)$ جـ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س}}{س^٢ - ٥س}$

الحل

أ واضح أن $\lim\limits_{س \to ٢} س = ٢$ وبالتالي من الفقرة (٢) في النظرية السابقة فإنَّ :

$$\lim\limits_{س \to ٢} س^٢ = \lim\limits_{س \to ٢} (س \cdot س) = (\lim\limits_{س \to ٢} س) \cdot (\lim\limits_{س \to ٢} س)$$

$$= ٢ \times ٢ = ٤$$

ب باستخدام النظرية (٢) والفقرات (١) ، (٢) من النظرية (٤) :

$$\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٥س) = \lim\limits_{س \to ٢} س^٢ - (\lim\limits_{س \to ٢} ٥) \times (\lim\limits_{س \to ٢} س)$$

$$= ٤ - ٥ \times ٢ = ٤ - ١٠ = -٦$$

جـ ومن الجزء (ب) واضح أن : $\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٥س) = -٦$ وهي لا تساوي الصفر .

وكذلك : $\lim\limits_{س \to ٢} س = ٢ \geqslant ٠$

وبوضع د(س) = س يكون لجميع قيم س القريبة جداً من العدد ٢ من جهة اليمين ومن جهة اليسار

د(س) $\geqslant$ ٠ وبالتالي $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt{س} = \sqrt{\lim\limits_{س \to ٢} س} = \sqrt{٢}$

$$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س}}{س^٢ - ٥س} = \frac{\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt{س}}{\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٥س)} = \frac{\sqrt{٢}}{-٦}$$

في الواقع إن الفقرتين (أ) ، (ب) في المثال السابق هي حالة خاصة من نظرية أعم وأشمل وهي:

نظرية ٥

ليكن لدينا دالة حدودية من الدرجة ن حيث إن:

$$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_١ س + أ_٠$$

عندئذٍ لأي عدد م ∈ ح فإن:

$$\underset{س \to م}{نهـا} د(س) = أ_ن م^ن + أ_{ن-١} م^{ن-١} + ... + أ_١ م + أ_٠$$

مثال ٢

أوجد $\underset{س \to ٣}{نهـا} (٢س^٣ - ٥س^٢ + ٣س - ٨)$

الحل

من نظرية (٥): $\underset{س \to ٣}{نهـا} (٢س^٣ - ٥س^٢ + ٣س - ٨)$

$$= ٢ \times ٣^٣ - ٥ \times ٣^٢ + ٣ \times ٣ - ٨$$

$$= ٥٤ - ٤٥ + ٩ - ٨ = ١٠$$

نظرية ٦

$\underset{س \to أ}{نهـا} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$ حيث ن ∈ ص+ - {١}

وعندما يكون ن عدداً زوجياً تكون أ > ٠

مثال ٣

أوجد قيمة النهايات التالية إن وجدت:

أ $\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$

ب $\underset{\text{س} \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$

جـ $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١}$

د $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{\text{س}}$

الحل

أ (س − ١) ≥ ٠ لجميع قيم س التي تقترب من الواحد من اليمين

وبالتالي من النظرية (٤) فقرة (٤):

$$\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ١} = \sqrt{\underset{\text{س} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} (\text{س} - ١)} = \sqrt{٠} = ٠$$

ب (س − ١) < ٠ لقيم س التي تقترب من الواحد من اليسار، وبالتالي فإنَّ الدالة:

ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ غير معرفة في هذه الحالة والنهاية من اليسار غير موجودة.

جـ حيث إن (س − ١) < ٠ لقيم س المجاورة للواحد من اليسار، فإنَّ الدالة:

ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ غير معرفة في هذه الحالة والنهاية من اليسار غير موجودة،

وعليه تكون النهاية غير موجودة.

د $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{\text{س}} = \sqrt[٣]{-١} = ١$

مثال ٤

لتكن د(س) = $\begin{cases} ٢س + ٥ & : س > ٣ \\ س^٢ + ٢ & : س \leq ٣ \end{cases}$

احسب $\underset{س \to ٣}{نهـا}$ د(س)

الحل

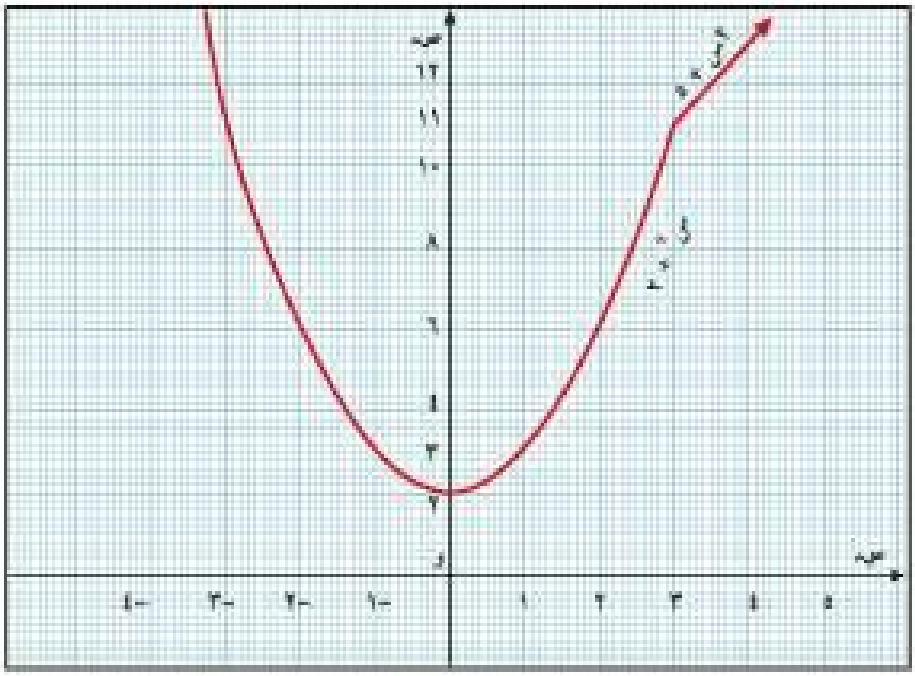
$\underset{س \to ٣^+}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٣^+}{نهـا}$ (٢س + ٥) = ٢ × ٣ + ٥ = ١١

$\underset{س \to ٣^-}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٣^-}{نهـا}$ (س^٢ + ٢) = ٣^٢ + ٢ = ١١

∴ $\underset{س \to ٣^-}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٣^+}{نهـا}$ د(س) = ١١

∴ $\underset{س \to ٣}{نهـا}$ د(س) = ١١ ■

بيان هذه الدالة موضح في الشكل (١-١١) التالي.



شكل (١-١١)

مثال ٥

أوجد إن أمكن:

أ $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$ ب $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$ جـ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$

الحل

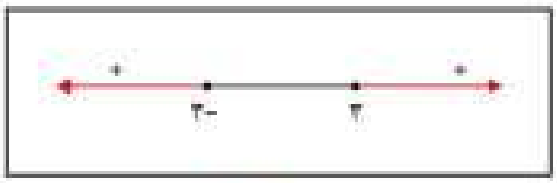
نفرض $د(س) = \sqrt{س^٢ - ٩}$

مجال د = {س : $س^٢ - ٩ \geqslant ٠$ ، س ∈ ح}

$س^٢ - ٩ \geqslant ٠$

$س^٢ \geqslant ٩$

$|س| \geqslant ٣$



شكل (١-١٢)

∴ $س \geqslant ٣$ أو $س \leqslant -٣$

∴ مجال د هو ح − (−٣،٣).

أ د معرفة لجميع قيم س القريبة من يمين ويسار العدد ٥

$\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} (س^٢ - ٩) = ٥^٢ - ٩ = ١٦$

وحيث إن $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} س^٢ - ٩ \geqslant ٠$

∴ $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} (س^٢ - ٩)} = \sqrt{١٦} = ٤$

ب د غير معرفة لقيم س القريبة من يسار العدد ٣

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$ غير موجودة.

جـ د غير معرفة لقيم س القريبة من يمين ويسار العدد ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$ غير موجودة.

تدريب:

هل $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩}$ موجودة؟

تمارين ١ - ١

بنود موضوعية

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ إذا كانت $\lim_{س \to س_{٠}}$ ق(س) موجودة فإنَّ ق معرفة في جوار س$_{٠}$.

٢ إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ (د(س) + ق(س)) موجودة فإنَّ $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة.

٣ إذا كانت ت: {١، ٢، ٣، ٤} ← ح ، ت(س) = (س + ١)^{٢} فإنَّ $\lim_{س \to ٢}$ ت(س) = ٩

٤ $\lim_{س \to ١}$ $\sqrt{١ - س^{٢}}$ = صفر

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت أ قريبة من ٣ وفقاً للمعيار ٢ فإنَّ العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(أ) |أ - ٣| < ٢ (ب) |٢أ - ٣| < ٣

(ج) |أ - ٢| < ٢ (د) |أ - ٣| < ١

٢ إذا كانت $\lim_{س \to ٠}$ (أس - |س| + ٢) = ٣ فإنَّ أ =

(أ) صفر (ب) ١

(ج) ٢ (د) ٣

٣ $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}}$ $\sqrt{\frac{١}{س} + ١}$ هي:

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ب) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ج) غير موجودة (د) ليس أياً مما سبق

• ثالثاً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت د(س) = { س + ٢ : ٠ ≤ س ≤ ٢ ، ٣ − س : ٣ < س ≤ ٥ } فإنَّ:

القائمة ١	القائمة ٢
١ نهـا (س ← ٠⁺) د(س) هي	أ −٢
	ب −١
٢ نهـا (س ← ٣) د(س) هي	جـ صفر
	د ٢
٣ د(٥) هي	هـ غير موجودة.

➤ أسئلة مقالية:

• أولاً: ادرس النهاية لكل من الدوال الآتية عندما س ← أ الموضحة:

١ د(س) = س² + ٣س ، أ = ٣

٢ د(س) = ٢س³ − ٥س + ٧ ، أ = −١

٣ د(س) = ١ / (٣س − ٥) ، أ = ٤

٤ د(س) = √(س² − ٥) ، أ = ٣

٥ د(س) = √(س² − ٤) ، أ = ٢

٦ د(س) = { ٢س + ١ : س ≤ ٢ ، س² + ١ : س > ٢ } ، أ = ٢

٧ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٥ & : \text{س} \geqslant -١ \\ ٢\text{س} + ٣ & : \text{س} < -١ \end{cases}$ ، $\text{أ} = -١$

٨ $\text{د(س)} = \sqrt{٣\text{س} + |\text{س}|}$ ، $\text{أ} = ٤$

٩ $\text{د(س)} = \dfrac{\sqrt{١٠\text{س} - \text{س}^٢}}{\text{س} + ١}$ ، $\text{أ} = ٥$

١٠ $\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}^٢(١ - \text{س})}$ ، $\text{أ} = ٠$

• ثانياً: **أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب في كل مما يلي:**

١ إذا علمت أن الدالة د: $\text{د(س)} = \text{أ س} |\text{س}| + \text{ب}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د(س)} = ٢$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \text{د(س)} = ٠$

٢ إذا علمت أن الدالة د حيث:

$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ + \text{ب س} + ٣ & : \text{س} < ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & : \text{س} \geqslant ١ \end{cases}$ وكانت

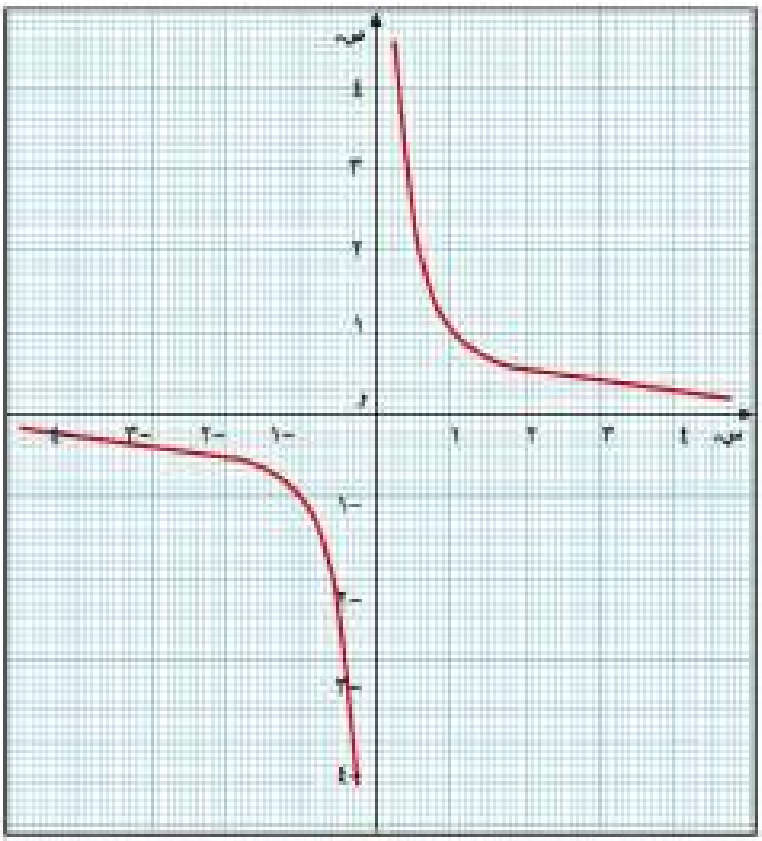
$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د(س)} = ٧$

١-٢ نهايات تشتمل على $+\infty$ ، $-\infty$

The Limit at Infinity

في كثير من التطبيقات الرياضية للدوال نحتاج لمعرفة سلوك دالة د عندما س ← $+\infty$ أو س ← $-\infty$ ، أو بعبارة أخرى ندرس فيما إذا كانت د(س) تقترب من عدد معين كلما تزايدت قيم س بلا حدود أو كلما تناقصت قيم س بلا حدود. ولتوضيح ذلك ندرس على سبيل المثال الدالة:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ والموضح مخططها البياني في شكل (١ - ١٣).



شكل (١-١٣)

شكل (١ - ١٣) يوضح أنه كلما زدات قيم س اقتربت قيمة د(س) من الصفر بقيم موجبة، والجدول الآتي يوضح ذلك:

س	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	....
د(س)	٠,١	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	....

لذلك، نقول إن نهاية $\frac{١}{س}$ عندما س ← ∞ موجودة وتساوي الصفر، ونكتب ذلك على الصورة:

$$\underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$$

بتكوين جدول مشابه للجدول السابق يمكن ملاحظة أنه كلما نقصت قيم س اقتربت قيمة د(س) من الصفر بقيم سالبة.

ولذلك، نقول إن نهاية $\frac{١}{س}$ عندما س ← −∞ موجودة وتساوي الصفر، ونكتب ذلك على الصورة:

$$\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$$

ويقودنا ذلك إلى النظريات الآتية:

نظـريـة ٧

أ) $\underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$

ب) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$

نظـريـة ٨

لكل ل ∈ ح ، ن ∈ ط.

أ) $\underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نهـا}} \frac{ل}{س^{ن}} = ٠$

ب) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{ل}{س^{ن}} = ٠$ (بشرط أن $س^{ن}$ معرفة).

ملاحظة مهمة:

تظل نظرية (٤) صحيحة عند إيجاد $\underset{س \leftarrow +\infty}{\text{نهـا}}$ د(س)؛ وكذلك $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}$ د(س).

مثال ١

أوجد النهايات الآتية - إن وجدت :

أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س} + ٩}$ ب) $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$ جـ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٨\text{س}^{٢}}{-٣\text{س}^{٣} + ١٠}$

الحل

أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س} + ٩} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}}}{١ + \frac{٩}{\text{س}}}$ (بالقسمة بسطاً ومقاماً على س)

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س} + ٩} = \frac{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} ١ + ٩ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}}}$$

$$= \frac{٠}{١ + ٩ \times ٠} = ٠$$

ب) $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}{١ - \frac{٩}{\text{س}^{٢}}}$ (بالقسمة بسطاً ومقاماً على $\text{س}^{٢}$)

$$\therefore \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} = \frac{\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} + \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{\text{س}^{٢}}}{\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} ١ - \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} \frac{٩}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{٠ + ٠}{١ - ٠} = ٠$$

جـ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٨\text{س}^{٢}}{-٣\text{س}^{٣} + ١٠} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٨}{-٣ + \frac{١٠}{\text{س}^{٣}}}$ (بالقسمة بسطاً ومقاماً على $\text{س}^{٣}$)

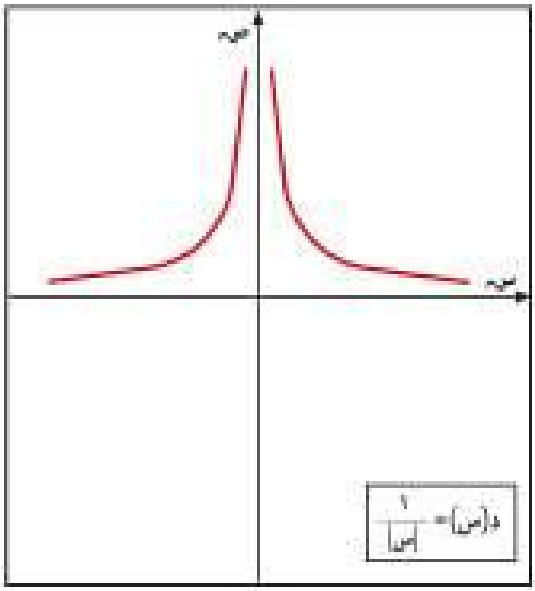
$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٨\text{س}^{٢}}{-٣\text{س}^{٣} + ١٠} = \frac{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} ٨}{\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (-٣) + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١٠}{\text{س}^{٣}}}$$

$$= \frac{٨}{-٣ + ٠} = -\frac{٨}{٣}$$

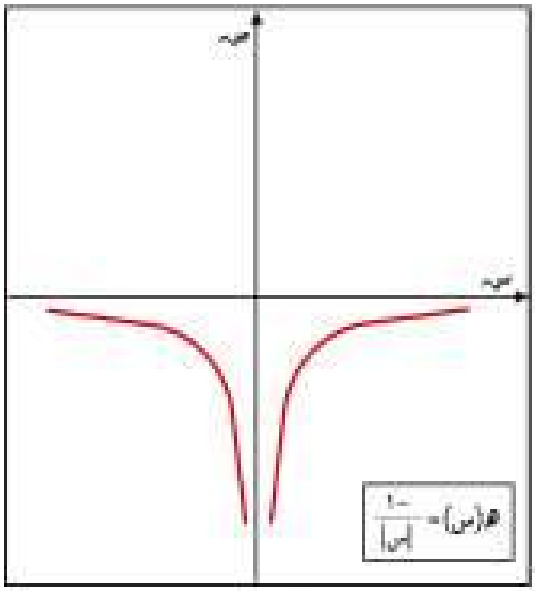
تزايد قيم الدالة إلى ∞ وتناقص قيم الدالة إلى −∞:

لنعتبر على سبيل المثال الدالة:

د(س) = $\frac{١}{|س|}$ والممثلة بيانياً بالمنحنى المرسوم في شكل (١ − ١٤).



شكل (١ − ١٤)



شكل (١ − ١٥)

نلاحظ من الشكل أن قيم د(س) تزداد بلا حدود كلما اقتربت قيم س من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإنَّ $\underset{س \to ٠}{نهـا}$ د(س) غير موجودة في ح ولكنها تتزايد بلا حدود، ونعبر عن ذلك رياضياً بالصيغة:

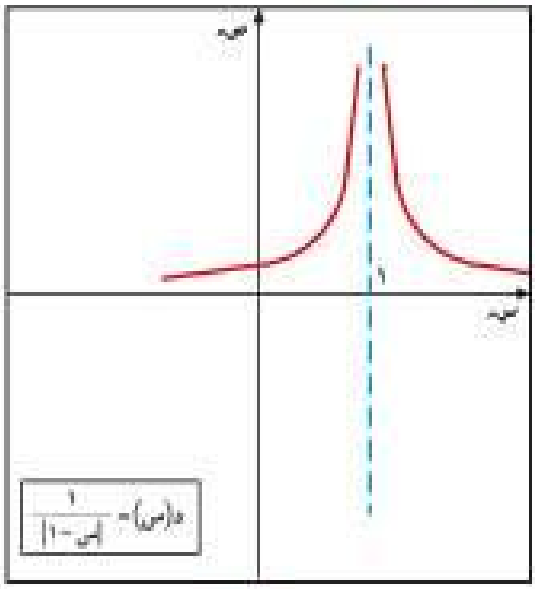
$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{١}{|س|} = \infty$ ، ويجب أن يدرك الطالب أن الرمز ∞ لا يعني قيمة معينة

وإنما يفيد أن الدالة $\frac{١}{|س|}$ تتزايد بلا حدود عندما س ← ٠

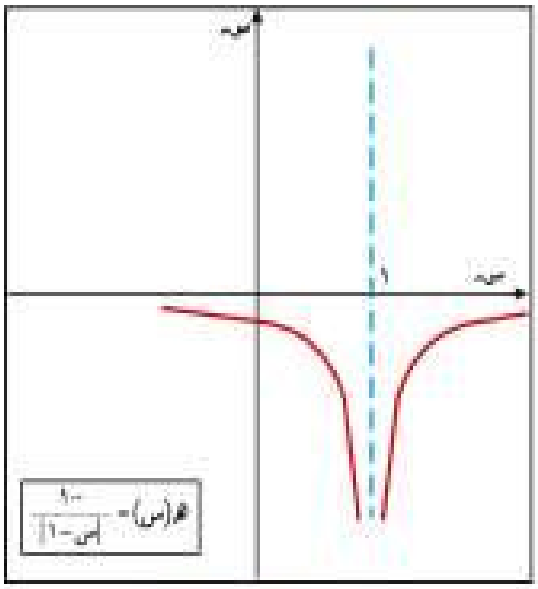
بالمثل نرى أن الدالة هـ(س) = $\frac{-١}{|س|}$ الممثلة بيانياً بالمنحنى المرسوم في شكل (١ − ١٥) تتناقص بلا حدود عندما س ← ٠ لذلك نكتب:

$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{-١}{|س|} = -\infty$

تدريب: أكمل ما يلي:



شكل (١-١٦)



شكل (١-١٧)

١ من شكل (١ - ١٦): قيم د(س) تتزايد بلا حدود عندما تؤول س إلى ١

أي أن $\lim\limits_{س \to ١} \frac{١}{|س - ١|} = ...$

٢ من شكل (١ - ١٧): قيم هـ(س) تتناقص بلا حدود عندما تؤول س إلى ١

أي أن $\lim\limits_{س \to ١} \frac{-١}{|س - ١|} = ...$

يمكن تعميم ذلك على النحو الآتي:

تعميم

١ إذا كانت قيم د(س) تزداد بلا حدود عندما تؤول س إلى أ فإننا نقول: إن قيم الدالة تتزايد إلى ∞ ونكتب:

$$\lim\limits_{س \to أ} د(س) = \infty$$

٢ إذا كانت د(س) تتناقص بلا حدود عندما س تؤول إلى أ فإننا نقول: إن قيم الدالة تتناقص إلى -∞ ونكتب:

$$\lim\limits_{س \to أ} د(س) = -\infty$$

ملاحظات:

لاحظ ما يأتي:

١ إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = ∞ ، وكان ب ∈ ح فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} [د(س) + ب] = ∞$$

وإذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = −∞ ، وكان ب ∈ ح فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} [د(س) + ب] = -∞$$

٢ إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = ±∞ ، وكان ل ∈ ح⁺ فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} [ل \bullet د(س)] = \pm ∞ .$$

وإذا كان ل ∈ ح⁻ فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} [ل \bullet د(س)] = \mp ∞$$

نظـريـة ٩

١ إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً وزوجياً فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = ∞ .$$

٢ إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً وفردياً فإنَّ:

$$\underset{س \leftarrow أ^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = ∞ ،$$

$$\underset{س \leftarrow أ^{-}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - أ)^{ن}} = -∞ .$$

فمثلاً: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - ٣)^{٨}} = ∞ ،$

$$\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س + ٢)^{٥}} = ∞ ،$$

$$\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س + ٢)^{٥}} = -∞$$

نظـريـة ١٠

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د(س) = ∞ إذا وإذا فقط $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ د(س) = ∞ و $\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ د(س) = ∞ ،

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ د(س) = −∞ إذا وإذا فقط $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ د(س) = −∞ و $\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ د(س) = −∞ ،

مثال ٢

أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{١}{|س - ٣|}$

الحل

$$\frac{١}{|س - ٣|} = \begin{cases} \frac{١}{س - ٣} & : س > ٣ \\ \frac{-١}{س - ٣} & : س < ٣ \end{cases}$$

$$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} \frac{١}{|س - ٣|} = \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} \frac{١}{س - ٣} = ∞ \quad \text{_____} (١)$$

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \frac{١}{|س - ٣|} = \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \frac{-١}{س - ٣} = -\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} \frac{١}{س - ٣} = -(-∞) = ∞ \quad \text{__} (٢)$$

من (١) ، (٢)

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{١}{|س - ٣|} = ∞$$

تمارين

١ - ٢

- احسب النهايات التالية إن وجدت:

١ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{١}{س - ٤}$

٢ $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٧س}{٢س + ٥}$

٣ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٣}{|٢س - ٤|}$

٤ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٤}{٣ - س}$

٥ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س - ٥}{س^٢ - ٢٥}$

٦ $\lim\limits_{س \to -\infty} \frac{٧}{(٤ - س)^٢}$

٧ $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^٢}{س^٣ + ٥س^٢ - ٩}$

٨ $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(٣ - \frac{٢س^٢}{س^٢ - ١}\right)$

٩ $\lim\limits_{س \to ١} \left|\frac{٢}{١ - س}\right|$

١٠ $\lim\limits_{س \to -٤} \frac{٤}{|س + ٤|}$

١-٣ الصيغ غير المعينة

Indeterminate Forms

أحياناً نحتاج لحساب نهاية على الصورة:

$$\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{هـ(س)} \text{ حيث } \lim_{س \to أ} د(س) = صفر \text{ ، } \lim_{س \to أ} هـ(س) = صفر .$$

لو أننا أوجدنا $\frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)}$ نحصل على $\frac{صفر}{صفر}$

ونسميها كمية غير معينة.

وبالمثل عندما: $\lim_{س \to أ} د(س) = \infty$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = \infty$.

لو أننا أوجدنا $\frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)}$ نحصل على $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها كمية غير معينة، لذلك فلا يمكن عند حساب $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{هـ(س)}$ في مثل هذه الحالة قسمة نهاية البسط على نهاية المقام وإنما نلجأ لبعض الأساليب الجبرية التي تحدد لنا قيمة هذه النهاية. أيضاً نفس الشيء ينطبق على النهاية $\lim_{س \to ب} (د(س) - هـ(س))$ في حالة أن $\lim_{س \to ب} د(س) = \pm\infty = \lim_{س \to ب} هـ(س)$ حيث إن $\lim_{س \to ب} د(س) - \lim_{س \to ب} هـ(س) = \infty - \infty$ وهي أيضاً كمية غير معينة والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيف يمكن حساب مثل هذه النهايات المتضمنة لكميات غير معينة.

مثال ١

احسب $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

الحل

لو حسبنا نهاية البسط على نهاية المقام لحصلنا على $\frac{صفر}{صفر}$ وهي كمية غير معينة. ولتجنب ذلك سنلجأ إلى اختصار الحدودية النسبية (أو الدالة النسبية).

$$\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} = \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٢)} = س - ٣ \text{ حيث } س \neq ٢ \quad (\text{لماذا؟})$$

عليه يكون: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} \right) = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ٣) = -١$

مثال ٢

احسب $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س}$

الحل

نعلم أن: $|س| = \begin{cases} س & : س \geq ٠ \\ -س & : س < ٠ \end{cases}$

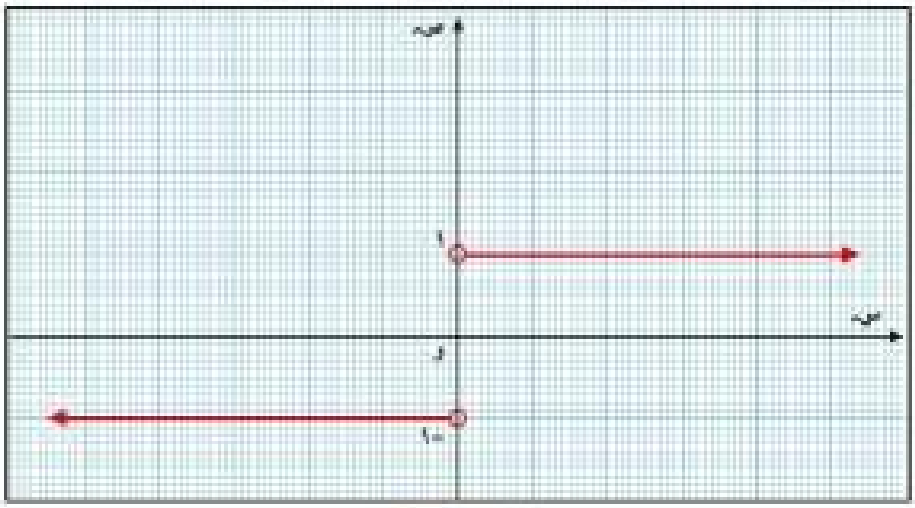
$\therefore \frac{|س|}{س} = \begin{cases} ١ & : س > ٠ \\ -١ & : س < ٠ \end{cases}$

وعليه يكون: $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س} = ١$ ، $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س} = -١$

ولأن $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س} \neq \underset{س \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س}$ ،

فإنّ: $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س|}{س}$ غير موجودة

(بيان هذه الدالة موضح في شكل (١ - ١٨) مع ملاحظة أن الدالة غير معرّفة عند الصفر).



شكل (١-١٨)

مثال ٣

احسب $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$

الحل

لو حسبنا نهاية البسط على نهاية المقام لحصلنا على $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهي كمية غير معينة. ولتجنب ذلك نختصر الدالة بعد الضرب بسطاً ومقاماً في مرافق البسط:

$$\frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} = \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} \times \frac{\sqrt{س + ٣} + ٢}{\sqrt{س + ٣} + ٢}$$

$$= \frac{س + ٣ - ٤}{(س - ١)\left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right)}$$

$$= \frac{س - ١}{(س - ١)\left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right)} = \frac{١}{\sqrt{س + ٣} + ٢}$$

حيث $س \neq ١$

$\because \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س + ٣) = ٤ > ٠$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{س + ٣} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س + ٣)} = ٢$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س + ٣} + ٢\right) = ٤ \neq ٠$

من ذلك ينتج أن:

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{س + ٣} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

مثال ٤

احسب النهايات التالية:

أ) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^٢ - ٥س + ٢}{٥س^٢ - ١٠س - ١}$

ب) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤س^٣ + س^٢ - ٥س}{س^٥ - ٦س^٣ + ٤س^٢ - ٧}$

الحل

أ لو حسبنا نهاية البسط على نهاية المقام لحصلنا على كمية غير معينة لذلك سنلجأ لأساليب جبرية أخرى:

$$\frac{٣س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ١٠س - ١} = \frac{٣ - \frac{٥}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}}{٥ - \frac{١٠}{س} - \frac{١}{س^{٢}}}$$

(بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$)

$$\therefore \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} - ٥س + ٢}{٥س^{٢} - ١٠س - ١} = \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٣ - \frac{٥}{س} + \frac{٢}{س^{٢}}}{٥ - \frac{١٠}{س} - \frac{١}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to \infty} ٣ - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٥}{س} + \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٢}{س^{٢}}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} ٥ - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١٠}{س} - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{٣ - ٠ + ٠}{٥ - ٠ - ٠} = \frac{٣}{٥}$$

ب $$\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٤س^{٣} + س^{٢} - ٥س}{س^{٥} - ٦س^{٣} + ٤س^{٢} - ٧} = \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{\frac{٤}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}} - \frac{٥}{س^{٤}}}{١ - \frac{٦}{س^{٣}} + \frac{٤}{س^{٢}} - \frac{٧}{س^{٥}}}$$

(بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٥}$)

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٤}{س^{٢}} + \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{١}{س^{٣}} - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٥}{س^{٤}}}{\text{نهـا}_{س \to \infty} ١ - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٦}{س^{٣}} + \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٤}{س^{٢}} - \text{نهـا}_{س \to \infty} \frac{٧}{س^{٥}}}$$

$$= \frac{٠ + ٠ - ٠}{١ - ٠ + ٠ - ٠} = ٠$$

ويلاحظ في المثال السابق ما يأتي:

- في الفقرة (أ)، درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام = ٢، ونهاية الدالة النسبية = $\frac{٣}{٥}$ = ناتج قسمة معامل س بأكبر قوة في البسط على معامل س بأكبر قوة في المقام.
- في الفقرة (ب)، درجة الحدودية في البسط أصغر من درجة الحدودية في المقام، ونهاية الدالة النسبية = صفر.

نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية الآتية:

نظرية ١١

إذا كانت كل من د(س)، هـ(س) دالة حدودية، حيث:

د(س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $أ_٠$،

هـ(س) = $ب_م$ $س^م$ + $ب_{م-١}$ $س^{م-١}$ + ... + $ب_٠$، فإن:

أ) $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{أ_ن}{ب_م}$، إذا كان ن = م

ب) $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{هـ(س)}$ = صفر، إذا كان ن < م

ملاحظة:

تبقى النظرية صحيحة عندما س ← −∞

تدريب (١):

طبق النتائج الواردة في النظرية (١١) في حساب كل مما يأتي:

١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢ - ٥س^٢ + ٨}{٣س^٣ + ٤س^٢ - ١٠٠}$

٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٧س^٤ + ٩س^٢ - ٣}{٨س^٤ - ٩٧س^٢ + ٥س}$

مثال ٥

أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}}$

الحل

$$\frac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}} = \frac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س}^٢\left(١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)}}$$

$$= \frac{\text{س}\left(١ - \frac{٥}{\text{س}}\right)}{|\text{س}|\sqrt{١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}} = \frac{١ - \frac{٥}{\text{س}}}{\sqrt{١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}}$$

($|\text{س}| = \text{س}$ لأن $\text{س} > ٠$ هنا) من ذلك ينتج أن:

$$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}} = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١ - \frac{٥}{\text{س}}}{\sqrt{١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}}$$

$$\because \lim\limits_{\text{س} \to \infty}\left(١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}\right) = \lim\limits_{\text{س} \to \infty} ١ - \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٢}{\text{س}} - \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{٣}{\text{س}^٢}$$

$$= ١ - ٠ - ٠ = ١ > ٠$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١ - \frac{٥}{\text{س}}}{\sqrt{١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}} = \frac{\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ - \frac{٥}{\text{س}}\right)}{\lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}}$$

$$= \frac{\lim_{\text{س} \to \infty} ١ - \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥}{\text{س}}}{\sqrt{\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ - \frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}\right)}}$$

$$= \frac{١ - ٠}{\sqrt{١}} = ١$$

تدريب (٢):

تحقق من أن $\lim_{\text{س} \to -\infty} \frac{\text{س} - ٥}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}} = -١$

مثال ٦

احسب $\lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} - ٢\text{س}$

الحل

$$\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} - ٢\text{س} =$$

$$\left(\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} - ٢\text{س}\right) \times \frac{\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} + ٢\text{س}}{\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} + ٢\text{س}}$$

$$\frac{(٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥) - ٤\text{س}^٢}{\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} + ٢\text{س}} = \frac{-٣\text{س} + ٥}{\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} + ٢\text{س}}$$

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} - ٢\text{س}\right) = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{-٣\text{س} + ٥}{\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} + ٢\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}\left(-٣ + \frac{٥}{\text{س}}\right)}{|\text{س}|\sqrt{٤ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^٢}} + ٢\text{س}}$$

(حيث |س| = س عندما س > ٠ هنا) من ذلك ينتج أن

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٥} - ٢\text{س}\right) = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{-٣ + \frac{٥}{\text{س}}}{\sqrt{٤ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^٢}} + ٢}$$

$$= \frac{-٣ + ٠}{\sqrt{٤ - ٠ + ٠} + ٢} \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \frac{-٣}{٤} \quad \blacksquare$$

تمارين

١ - ٣

بنود موضوعية:

• **أولاً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤أ}{س - ٢}$ موجودة فإنَّ أ =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) ٣ (د) ٤

٢ إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س^٢}{٣ - س^٢} = ٢$ فإنَّ أ =

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) -٢

٣ إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س + ٣س^٢}{س^٢ - ٤} = ب$ فإنَّ ب =

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) -٤ (د) ليس أياً مما سبق

٤ إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{أ س^٢ + ٤}{س^٢ + ٥س - ١} =$ صفراً فإنَّ أ =

(أ) -١ (ب) صفراً (ج) ١ (د) $\frac{٤}{٥}$

٥ $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{س^٢ + ١}{س} - س \right)$ هي:

(أ) $-\infty$ (ب) صفر (ج) ∞ (د) ليست موجودة

• ثانياً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة

القائمة ١	القائمة ٢
١ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} (س - |س| + ٣) =$	أ صفراً
٢ $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{|س - ١|}{س^٢ + ١} =$	ب ٢
٣ $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \frac{٣}{(س - ١)^٥} =$	جـ ٣
	د $-\infty$
٤ $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \frac{٧}{(س + ٣)^٨} =$	هـ ∞
٥ $\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \left(\frac{\sqrt{س^٢} - س}{س}\right)$ هي	أ صفراً
	ب ١
٦ $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \left(\frac{|٢ - س|}{س^٢ - ٤} + \frac{٣}{٨}س\right)$ هي	جـ -٢
	د -٤
٧ $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{(هـ - ٢)^٢ - ٤}{هـ}\right)$ هي	هـ ليست موجودة

أسئلة مقالية:

• أولاً: أجب عن الأسئلة التالية:

احسب النهايات التالية في التمارين (١) - (١٣):

١ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

٣ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩}$

٤ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{٢س^٢ - ٣س + ١}{٣س^٢ - س - ٢}$

٥ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - س}$

٦ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{|س - ١|}{س - ١}$

٧ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{|س - ١|}{س^٢ - ١}$

٨ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \left(٥ - \frac{٢س}{س^٢ - س}\right)$

٩ $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـا} \left(\frac{٢}{س - ٤} + \frac{١٦}{١٦ - س^٢}\right)$

١٠ $\underset{س \leftarrow ٩}{نهـا} \frac{٣ - \sqrt{س}}{س - ٩}$

١١ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{\sqrt{٢س} - ٢}{س^٢ - ٤}$

١٢ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{٣ - س}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

١٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{\sqrt{٢س + ٥} - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$

١٤ لتكن $د(س) = س^٢ - ٣$

أ أوجد $د(٢ + ر)$

ب تحقق من أن $\underset{ر \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(٢ + ر) - د(٢)}{ر} = ٤$

١٥ أوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٣س - ٢}{٢ - ٥س}$

١٦ أوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٥س - ٣}{\sqrt{س^٢ - ٤}}$

١٧ أوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{٢س^٣ - س^٢ + ٥}{٥س^٣ + س^٢ - ٣س}$

في التمارين (١٨) ، (١٩) ، (٢٠) احسب النهايات المبينة علماً بأن س ← ±∞ تعني الحالتين س ← ∞ ، س ← −∞ كلًا على حدة:

١٨ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢ - ٢س + ٢} - س\right)$

١٩ $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣س^٢}{س - ١} - \frac{٦س^٢}{٢س - ١}\right)$

٢٠ $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٢|}{س + ٣}$

٢١ لتكن $ق(س) = \frac{أ س^٢ - ١}{س^٢ - ب}$ وكانت $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ق(س) = ٢$ ، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} ق(س) = \frac{١}{٣}$

أوجد قيمة كل من أ ، ب

٢٢ إذا كانت

$\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{أ س^٢ + ب س}{س + ٥} = ٤$ أوجد قيمة كل من أ ، ب

٢٣ إذا كانت $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^٢ + ١}{س + ١} - أس - ب\right) =$ صفراً.

أوجد قيمة كل من أ ، ب

٢٤ أ إذا كانت $ق(س) = \begin{cases} \frac{٢س}{س + ٤} & : س > -٢ \\ \frac{س}{س + ٢} & : س < -٢ \end{cases}$

فأوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ق(س) + \underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} ق(س)$

ب إذا كانت $ق(س) = \frac{س^٢}{س + ١} - \frac{س^٢}{س + ٣}$

فأوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ق(س)$

١ - ٤ اتصال دالة عند نقطة

Continuity of function at a point

يتذكر الطالب في دراستنا لنهاية دالة د عند نقطة مثل س = أ أننا لم نشترط أن تكون د معرفة عند س=أ (أي ليس من الضروري أن تكون د(أ) موجودة) وإنما اشترطنا أن تعرف د على جميع قيم س القريبة من أ من اليمين واليسار. في هذا البند سندرس مفهوم الاتصال لدالة د عند نقطة مثل س = أ والذي يربط بين نهاية الدالة عند هذه النقطة وقيمتها د(أ).

هندسياً، اتصال الدالة د عند النقطة س = أ يعني أن منحنى الدالة لا يعاني انقطاعاً عند هذه النقطة، وبالمقابل تكون د منفصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة، فمثلاً المنحنى شكل (١ - ١٩) لدالة منفصلة عند كل من:

س = $أ_١$ ، س = $أ_٢$

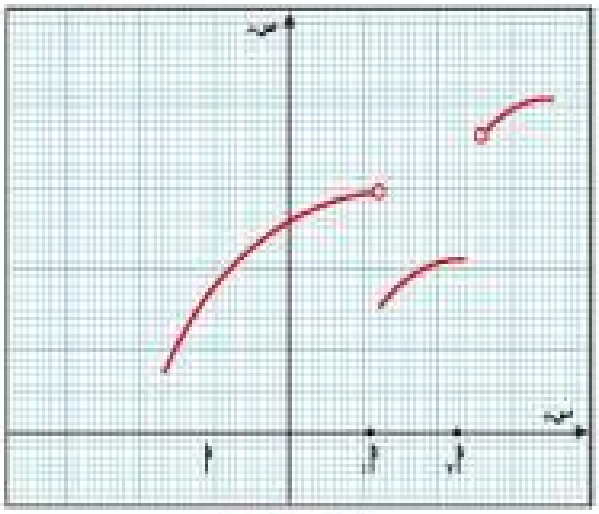
ولكنها متصلة عند أي نقطة أخرى

مثل س = أ

قبل أن نورد التعريف الرياضي لاتصال دالة عند نقطة، نذكر الطالب بالآتي:

الدالة د معرفة على الفترة (حـ ، ء)

يعني أن د(أ) موجودة ∀ أ ∈ (حـ ، ء)



شكل (١-١٩)

تعريف ٣

لتكن د دالة معرفة على الفترة (حـ ، ء)، ولتكن أ ∈ (حـ ، ء) نقول أن الدالة د متصلة عند النقطة أ إذا تحقق الشرطان:

أ) $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة.

ب) $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ).

وإذا لم يتحقق أحد هذين الشرطين أو كلاهما، نقول إن الدالة د منفصلة عند النقطة س = أ، وتسمى النقطة س = أ نقطة انفصال للدالة د.

مثال ١

ادرس اتصال الدالة د(س) = |س| عند س = ٠

الحل

حيث إن |س| = { س عندما س ≥ ٠ ، −س عندما س < ٠ }

فإنَّ د(٠) = ٠ ولدينا:

$\lim_{س \to ٠^-}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ (−س) = صفراً، وكذلك:

$\lim_{س \to ٠^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ س = صفراً

وعليه فإنَّ:

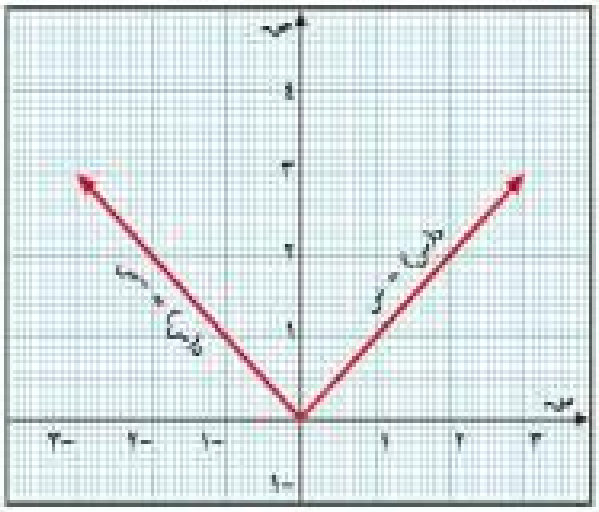
$\lim_{س \to ٠}$ د(س) موجودة وتساوي الصفر

وهذا يحقق الشرط (١)،

أيضاً د(٠) = ٠ = $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

وهذا يحقق الشرط (٢)،

لذلك فإنَّ الدالة د(س) = |س| متصلة عند الصفر. ■



شكل (١-٢٠)

انظر شكل (١ - ٢٠) الذي يوضح منحنى بيان الدالة: د(س) = |س|

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة د حيث:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ١}{|\text{س} - ١|} & : \text{س} \neq ١ \\ -١ & : \text{س} = ١ \end{cases}$$

عند النقطة س = ١

الحل

نلاحظ أن $|\text{س} - ١| = \begin{cases} \text{س} - ١ & : \text{س} > ١ \\ ١ - \text{س} & : \text{س} < ١ \\ ٠ & : \text{س} = ١ \end{cases}$

$$\therefore \text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١} & : \text{س} > ١ \\ \dfrac{\text{س} - ١}{١ - \text{س}} & : \text{س} < ١ \\ -١ & : \text{س} = ١ \end{cases}$$

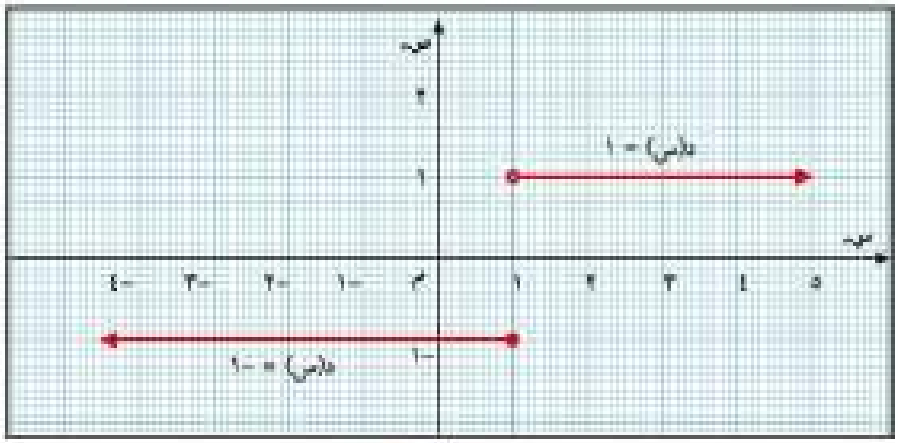
$$\therefore \text{د(س)} = \begin{cases} ١ & : \text{س} > ١ \\ -١ & : \text{س} \leq ١ \end{cases}$$

لذلك فإنَّ $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = −١ ، بينما $\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١

وبالتالي $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة

∴ الشرط (١) في التعريف غير متحقق، ولذلك تكون د(س) منفصلة عند س = ١ ■

انظر شكل (١ - ٢١)



شكل (١-٢١)

مثال ٣

لتكن د هي الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^2 - \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤}$ حيث س ≠ ٤ عرّف الدالة عند س = ٤ بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة.

الحل

لدينا $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}}$ $\frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٣)}{\text{س} - ٤}$

= $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}}$ (س + ٣) = ٧ والشرط (١) يتحقق

وحتى تكون د متصلة عند س = ٤ فيجب تحقق الشرط (٢) أي يجب أن نضع

د(٤) = $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٧

∴ يلزم تعريف الدالة د على النحو الآتي:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^2 - \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤} & : \text{س} \neq ٤ \\ ٧ & : \text{س} = ٤ \end{cases}$$

تمارين

١ - ٤

بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$ - ١ فإنَّ الدالة د متصلة عند س = ٠

٢ إذا كانت ت(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & : س < ١ \\ ٣ & : س > ١ \end{cases}$ فإنَّ الدالة ت متصلة عند س = ١

٣ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = -١ وكان $\lim_{س \to -١}$ (د(س) - ٢) = -١ فإنَّ د(-١) = ١

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٢ فإنَّ د(س) يمكن أن تساوي:

(أ) $\frac{١}{|س - ٢|}$ (ب) $\sqrt{س - ٢}$

(ج) $\frac{|س - ٢|}{س - ٢}$ (د) $\begin{cases} \sqrt{س^٢ - ٣} & : س < ٢ \\ ٣س - ٥ & : س \geq ٢ \end{cases}$

٢ إذا كانت الدالة د: د(س) = $\begin{cases} \sqrt{س + ل} & : س < ٢ \\ ل & : س \geq ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢ فإنَّ ل =

(أ) صفراً (ب) ٢

(ج) -١ (د) ليس أي مما سبق صحيحاً

٣ إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & : \text{س} \geqslant ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & : \text{س} < ٢ \end{cases}$ فإنَّ:

(أ) $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٤ (ب) $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٤

(ج) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) موجودة (د) د متصلة عند س = ٢

• ثالثاً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة

إذا كانت ق دالة متصلة عند س = ل ، ل ∈ صـ وكانت:

القائمة ١	القائمة ٢
١ ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & : \text{س} > \text{ل} \\ ٣ - \text{س} & : \text{س} \leqslant \text{ل} \end{cases}$ فإنَّ ل =	أ −١
	ب ٢
٢ ق(س) = $\begin{cases} ٢\text{ل س} - ٢ & : \text{س} \neq \text{ل} \\ ٣\text{ل} & : \text{س} = \text{ل} \end{cases}$ فإنَّ ل =	ج صفر
	د ١
٣ ق(س) = $\begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & : \text{س} > \text{ل} \\ ٢\text{س} & : \text{س} \leqslant \text{ل} \end{cases}$ فإنَّ ل =	هـ $\frac{٢}{٣}$

أسئلة مقالية:

• أولاً: ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:

١ د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٣ & : \text{س} \geqslant ٠ \\ ٣ - \text{س} & : \text{س} < ٠ \end{cases}$ ، س = ٠

٢ د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}{\text{س} + ١} & : \text{س} \neq -١ \\ -١ & : \text{س} = -١ \end{cases}$ ، س = −١

٣ $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢ & : \text{س} \geq ٠ \\ \text{س} - ٢ & : \text{س} < ٠ \end{cases}$ ، $\text{س} = ٠$

٤ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & : \text{س} \neq ٣ \\ ٥ & : \text{س} = ٣ \end{cases}$ ، $\text{س} = ٣$

٥ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢٠}{\text{س} + ٥} & : \text{س} \neq -٥ \\ -١ & : \text{س} = -٥ \end{cases}$ ، $\text{س} = -٥$

٦ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٣} & : \text{س} \notin \{\sqrt{٣} ، -\sqrt{٣}\} \\ \dfrac{١}{٤} & : \text{س} = \sqrt{٣} \end{cases}$ ، $\text{س} = \sqrt{٣}$

٧ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} - ٢}{\text{س} - ١} & : \text{س} \neq ١ \\ ٣ & : \text{س} = ١ \end{cases}$ ، $\text{س} = ١$

٨ $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{|\text{س}|} & : \text{س} \neq ٠ \\ -٣ & : \text{س} = ٠ \end{cases}$ ، $\text{س} = ٠$

• **ثانياً: في كل من التمارين التالية حدد النقطة التي عندها الدالة المعطاة غير معرفة ثم عرفها عند هذه النقطة بحيث تصبح متصلة عند هذه النقطة:**

١ $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦}{\text{س} - ١}$

٢ $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٨}$

١-٥ نظريات الاتصال

Theorems of continuity

علمنا من البند السابق أن الدالة د تكون متصلة عند س = أ عندما تكون $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) = د(أ).

وفي هذا البند ستعرض نظريات مهمة في الاتصال عند نقطة أ تنتمي لمجال الدالة المعطاة.

نظـريـة ١٢

إذا كانت كل من د، ق دالة متصلة عند س = أ فإنَّ كل دالة من الدوال التالية متصلة عند س = أ:

١ د + ق

٢ د − ق

٣ د • ق

٤ $\frac{د}{ق}$ حيث ق(أ) ≠ ٠

البرهان

١ ∵ كل من د ، ق دالة متصلة عند س = أ

∴ $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) = د(أ) ، $\underset{س \to أ}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ)

نفرض ت(س) = د(س) + ق(س)

∴ ت(أ) = د(أ) + ق(أ).

$\underset{س \to أ}{نهـا}$ ت(س) = $\underset{س \to أ}{نهـا}$ (د(س) + ق(س))

= $\underset{س \to أ}{نهـا}$ د(س) + $\underset{س \to أ}{نهـا}$ ق(س)

= د(أ) + ق(أ) = ت(أ)

∴ ت متصلة عند س = أ ■

ملاحظة: بنفس الطريقة يمكن إثبات (٢) ، (٣) ، (٤)

نظرية ١٣

١ الدالة د(س) = ب (حيث ب ثابت) متصلة عند كل أ ∈ ح

٢ الدالة الحدودية متصلة عند كل أ ∈ ح

٣ الدالة الحدودية النسبية $\frac{د}{ق}$ متصلة عند كل عدد حقيقي أ ما عدا الأعداد التي عندها ق(أ) = صفر

٤ الدالة ق(س) = |س| متصلة عند كل أ ∈ ح

٥ الدالة هـ(س) = $\sqrt[ن]{س}$ متصلة عند كل أ ∈ ح⁺ حيث ن عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل أ ∈ ح حيث ن عدد صحيح فردي أكبر من ١.

مثال ١

بيّن أن د(س) = س + |س| متصلة عند س = ٣

الحل

نضع د(س) = هـ(س) + ق(س)

هـ(س) = س حدودية متصلة عند س = ٣،

ق(س) = |س| متصلة عند س = ٣ (نظرية)

∴ هـ + ق متصلة عند س = ٣ (نظرية)

∴ د متصلة عند س = ٣ ■

مثال ٢

بين أن ق(س) = $\frac{\sqrt{س}}{س^٢ + ١}$ متصلة عند س = ١

الحل

نضع ق(س) = $\frac{د(س)}{هـ(س)}$

د(س) = $\sqrt{س}$ متصلة عند س = ١ حيث ١ ∈ ح⁺

هـ(س) = س^{٢} + ١ حدودية متصلة عند س = ١

وحيث إن هـ(١) ≠ ٠

∴ $\frac{د}{هـ}$ متصلة عند س = ١

∴ ق متصلة عند س = ١ ■

نظرية ١٤

إذا كانت د دالة متصلة عند س = أ وكانت د(أ) > ٠

فإنَّ الدالة: ق(س) = $\sqrt{د(س)}$ متصلة عند س = أ.

مثال ٣

إذا كانت ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦}$

فادرس اتصال الدالة ق عند س = ٦

الحل

الدالة د: د(س) = س^{٢} − ١٦ متصلة عند س = ٦،

د(٦) = ٣٦ − ١٦ = ٢٠ > ٠

∴ ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ١٦}$ متصلة عند س = ٦ ■

نظرية ١٥

لتكن د متصلة عند النقطة أ ∈ ح حيث د(أ) = ب، ولتكن هـ متصلة عند النقطة ب، عندئذٍ تكون: (هـ ∘ د) متصلة عند النقطة أ.

مثال ٤

إذا كانت د(س) = س^{٢} − س

هـ(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٧}$

أثبت أن الدالة (د ∘ هـ) متصلة عند س = $\sqrt{٢}$

الحل

نفرض أن ق(س) = س^{٢} + ٧

∴ ق متصلة عند س = $\sqrt{٢}$ ، ق($\sqrt{٢}$) = ٢ + ٧ = ٩ > ٠

∴ الدالة: هـ(س) = $\sqrt{\text{ق(س)}}$ متصلة عند س = $\sqrt{٢}$ ..... (١)

هـ($\sqrt{٢}$) = $\sqrt{٩}$ = ٣

الدالة: د(س) = س^{٢} − س متصلة عند س = ٣ ..... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن الدالة (د ∘ هـ) متصلة عند س = $\sqrt{٢}$

مثال ٥

أثبت أن الدالة د: د(س) = |س^{٢} − ٥س + ٦| متصلة عند أي نقطة أ ∈ ح.

الحل

لنعرّف الدالتين د$_{١}$ ، د$_{٢}$ بالقاعدتين:

د$_{١}$(س) = س^{٢} − ٥س + ٦ ، د$_{٢}$(س) = |س|

فيكون (د$_{٢}$ ∘ د$_{١}$)(س) = د$_{٢}$(د$_{١}$(س)) = د$_{٢}$(س^{٢} − ٥س + ٦)

= |س^{٢} − ٥س + ٦| = د(س).

أي أن د هي تركيب الدالتين د$_{١}$ ، د$_{٢}$.

وحيث إن د$_{١}$ دالة متصلة عند أي نقطة أ ∈ ح لأنها حدودية.

وكذلك د$_{٢}$ دالة متصلة عند أي نقطة ب ∈ ح (نظرية).

فمن النظرية السابقة نستنتج أن د متصلة عند أي نقطة أ ∈ ح.

تمارين

١ – ٥

بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ الدالة: ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ + |س| متصلة عند س = ٤

٢ الدالة: ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ متصلة عند س = −٢

٣ الدالة: ق(س) = |س^{٢} − ٢س| متصلة عند س = ١

٤ الدالة: ق(س) = ٣س^{٢} + $\sqrt{\text{س}}$ متصلة عند س = ٠

٥ الدالة: ق(س) = $\frac{\text{٢س}}{|\text{س}| - ١}$ متصلة عند س = −١

٦ الدالة: ق(س) = $\sqrt{|\text{س}|}$ ليست متصلة عند س = ٠

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، د(س) = ١ − $\frac{١}{\text{س}}$ فإنَّ الدالة (ق + د) متصلة عند س = ٠

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت ت دالة متصلة عند س = ١ وكانت (١ ، −٣) ∈ ت

فإنَّ $\lim_{\text{س} \to ١}$ (ت(س))^{٢} =

(أ) ١ (ب) −٣ (ج) ٩ (د) −٦

٢ إذا كانت ت متصلة عند س = −٢ وكان $\lim_{\text{س} \to -٢}$ (س^{٢} + ت(س)) = ٧

فإنَّ ت(−٢) =

(أ) ١١ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٩

٣ إذا كانت ت دالة متصلة عند س = ٢ فإنَّ الدالة المتصلة عند س = ٢ فيما يلي هي ق(س) =

(أ) $\sqrt{\text{ت(س)}}$ (ب) $\frac{١}{\text{ت(س)}}$ (ج) $\frac{\text{ت(س)}}{\text{س} - ٢}$ (د) |ت(س)|

٤ إذا كانت الدالة: ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{أ}}$ متصلة عند س = ٣ فإنَّ أ يمكن أن تساوي

(أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٦ (د) ٢٥

أسئلة مقالية:

أجب عن الأسئلة التالية:

١ إذا كانت ت(س) = ٣س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = |س| فابحث اتصال

الدالة: ق(س) = ت(س) + هـ(س) عند س = ١

٢ إذا كانت ت(س) = س^{٢} + ٢س − ١ ابحث اتصال

الدالة: ق(س) = |ت(س)| عند س = ٢

٣ إذا كانت ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ فابحث اتصال

الدالة: ت(س) = ق(س) − |س − ٣| عند س = ٣

٤ لتكن ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، ت(س) = ٣س + ٤ ابحث اتصال

الدالة: هـ(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ت(س)}}$ عند س = ٥

٥ لتكن ق(س) = ٣س^{٢} + ٤س − ١ ابحث اتصال

الدالة: ت(س) = (ق(س))^{٢} + |س| عند س = −١

٦ إذا كانت ق(س) = |$\sqrt{\text{س}}$ − ٣| ابحث اتصال

الدالة ق عند س = ٤

٧ إذا كانت ق(س) = ٣س^{٢} + ٤س فابحث اتصال

الدالة: هـ(س) = $\sqrt{|\text{ق(س)}|}$ عند س = −٢

٨ لتكن ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ − $\sqrt{١٤ - \text{س}}$ ابحث اتصال

الدالة ق عند س = ٥

٩ إذا كان ق(س) = س^{٢} + س ، هـ(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ فأثبت أن الدالة (ق ∘ هـ) متصلة عند س = −٢

تعريف ٤

لتكن د دالة معرفة على الفترة المغلقة [حـ ، ء] عندئذ:

١ إذا كانت د متصلة عند جميع نقاط الفترة المفتوحة (حـ ، ء) فنقول إنها متصلة على هذه الفترة المفتوحة.

٢ إذا كانت د متصلة على الفترة المفتوحة (حـ ، ء) $\lim_{س \to حـ^+}$ د(س) = د(حـ) ، $\lim_{س \to ء^-}$ د(س) = د(ء) فنقول إن د متصلة على الفترة المغلقة [حـ ، ء].

ملاحظة (١):

نسمي المتساوية $\lim_{س \to حـ^+}$ د(س) = د(حـ) شرط اتصال د عند النقطة حـ من اليمين، وكذلك نسمي المتساوية $\lim_{س \to ء^-}$ د(س) = د(ء) شرط اتصال د عند النقطة ء من اليسار، وكذلك يمكن أن نعرّف اتصال د على الفترة المغلقة [حـ ، ء] بقولنا إنها متصلة عند كل نقطة داخل هذه الفترة أما عند طرفيها فهي متصلة عند حـ من اليمين وعند ء من اليسار.

ملاحظة (٢):

تبقى النظريات (١٢) ، (١٣) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

مثال ١

بيّن أن الدوال التالية متصلة على الفترة [-١ ، ٥]:

١ ق(س) = -٢

٢ د(س) = ٣س^{٢} + س

٣ حـ(س) = |س|

الحل

١ ق(س) = −٢ دالة ثابتة متصلة على ح

∴ ق متصلة على [−١ ، ٥].

٢ د(س) = ٣س^{٢} + س دالة حدودية متصلة على ح

∴ د متصلة على [−١ ، ٥].

٣ ح(س) = |س| دالة متصلة على ح

∴ ح متصلة على [−١ ، ٥]

مثال ٢

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ على الفترة [٠ ، ١].

الحل

الدالة د دالة نسبية كل من البسط والمقام فيها حدودية

البسط دالة حدودية متصلة على [٠ ، ١]

المقام دالة حدودية متصلة على [٠ ، ١]

المقام لا يساوي الصفر في الفترة [٠ ، ١]

∴ الدالة د المعطاة متصلة على الفترة [٠ ، ١]

مثال ٣

إذا كانت الدالة د:

د(س) = { ٢س ؛ ٠ ≤ س ≤ ٣
٥ − ٣س ؛ ٣ < س ≤ ٥ }

فأوجد مجال الدالة د ثم ابحث اتصال الدالة د

الحل

مجال الدالة د هو [٠ ، ٣] ∪ (٣ ، ٥] = [٠ ، ٥]

نبحث اتصال الدالة على [٠ ، ٥]

عندما ٠ ≤ س ≤ ٣

د(س) = ٢س دالة متصلة على [٠ ، ٣] ..... (١)

وعندما ٣ < س ≤ ٥

د(س) = ٥ − ٣س دالة متصلة على (٣ ، ٥] ..... (٢)

نبحث اتصال الدالة د عند س = ٣ من اليمين:

$\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ (٥ − ٣س) = ٥ − ٣ × ٣ = −٤ ،

د(٣) = ٢ × ٣ = ٦

∵ $\lim_{س \to ٣^+}$ د(س) ≠ د(٣)

∴ الدالة ليست متصلة عند س = ٣ من اليمين ..... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣).

الدالة د متصلة على [٠ ، ٣] ومتصلة على (٣ ، ٥]

ولكنها ليست متصلة عند س = ٣ من اليمين

مثال ٤

حدد مجال الدالة: د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ ثم ادرس اتصال الدالة على هذا المجال.

الحل

د(س) معرفة ⇔ ٩ − س^٢ ≥ ٠ ⇔ ٩ ≥ س^٢ ⇔ ٣ ≥ س ≥ −٣ ⇔ س ∈ [−٣ ، ٣]

وبالتالي مجال د هو [−٣ ، ٣].

ونبحث اتصال د على هذه الفترة نفرض أ ∈ [−٣ ، ٣] فيكون:

$\lim_{س \to أ}$ د(س) = $\lim_{س \to أ}$ $\sqrt{٩ - س^٢}$ = $\sqrt{\lim_{س \to أ} (٩ - س^٢)}$

= $\sqrt{٩ - أ^٢}$ = د(أ)

∴ د متصلة على الفترة المفتوحة (−٣ ، ٣)

أما عند نقطة البداية حـ = −٣ فلدينا:

$\lim_{س \to -٣^+}$ $\sqrt{٩ - س^٢}$ = $\sqrt{\lim_{س \to -٣^+} (٩ - س^٢)}$ = $\sqrt{٩ - ٩}$ = ٠ = د(−٣) ،

أي أن د متصلة عند س = −٣ من اليمين وبالمثل عند نقطة النهاية ى = ٣ لدينا :

$$\lim_{س \to -٣^+} \sqrt{٩ - س^٢} = \sqrt{\lim_{س \to -٣^+} (٩ - س^٢)} = \sqrt{٩ - ٩} = ٠ = د(٣) ،$$

أي أن د متصلة عند س = +٣ من اليسار. ■

مما سبق يتضح أن الدالة د متصلة على مجالها [−٣ ، ٣].

تعميم

إذا كانت الدالة د متصلة على فترة ما ،

د(س) ≥ ٠ في هذه الفترة فإنَّ

الدالة : و(س) = $\sqrt{د(س)}$ متصلة على هذه الفترة.

تدريب :

حل مثال (٤) باستخدام التعميم السابق

مثال ٥

لتكن هـ(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢س}$

أوجد مجال الدالة هـ ، ثم ادرس اتصال الدالة هـ على [− ٥ ، ٠].

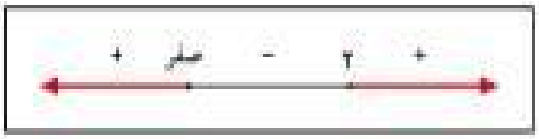
الحل

مجال الدالة هـ = {س : س^٢ − ٢س ≥ ٠} .

س^٢ − ٢ س ≥ ٠

س (س − ٢) ≥ ٠

∴ مجال الدالة هـ هو ح − (٠ ، ٢)



شكل (١-٢٢)

لدراسة اتصال الدالة هـ على الفترة [− ٥ ، ٠].

هـ(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢س}$

س^٢ − ٢س ≥ ٠ في الفترة [− ٥ ، ٠]

لأن [−٥ ، ٠] مجموعة جزئية من ح − (٠ ، ٢)

، د(س) = س^{٢} − ٢س دالة متصلة على [−٥ ، ٠]

∴ هـ متصلة على الفترة [−٥ ، ٠]

ملاحظة :

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على ح هو دالة متصلة على ح .

مثال ٦

إذا كانت الدالة : د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١}$ ابحث اتصال الدالة د .

الحل

نفرض أن الدالة : د(س) = (هـ ∘ و) (س)

حيث و(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$

الدالة و متصلة على ح ،

الدالة هـ متصلة على ح (نظرية)

∴ الدالة د متصلة على ح

تمارين

١ - ٦

بنود موضوعية:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:

١ إذا كانت ق دالة متصلة على كل من [١ ، ٣) ، [٣ ، ٥] فإنَّ ق متصلة على [١ ، ٥].

٢ الدالة د: د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ متصلة على [-١ ، ٣].

٣ الدالة ق: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١} & : \text{س} > ١ \\ ٣\text{س} & : \text{س} \leqslant ١ \end{cases}$ متصلة على [٠ ، ١].

أسئلة مقالية:

أجب عن الأسئلة التالية:

في التمرينات (١) - (٦) أوجد مجال الدالة د ثم ابحث اتصالها:

١ د(س) = ٣س^٤ - ٥س^٢ + ٧س + ٩

٢ د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{\text{س} + ١} & : \text{س} \neq -١ \\ -٥ & : \text{س} = -١ \end{cases}$

٣ د(س) = $\sqrt{٨ - ٢\text{س}^٢}$

٤ د(س) = $\begin{cases} \text{س} & : \text{س} \geqslant ٢ \\ ١ & : \text{س} < ٢ \end{cases}$

٥ د(س) = $\sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨}$

٦ د(س) = $\sqrt{١ - \text{س}^٢}$

٧ لتكن د هي الدالة :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٣ & : \text{س} > ٥ \\ \text{س} + ٦ & : \text{س} \leqslant ٥ \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة د موضحاً إجابتك بالرسم.

٨ لتكن الدالة د :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - ٢\text{س} & : \text{س} \geqslant ١ \\ \text{س}^{٢} + ١ & : \text{س} < ١ \end{cases}$$

ابحث اتصال د على [−٢ ، ٢] .

٩ إذا كانت الدالة د :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & : ٢ \leqslant \text{س} < ٤ \\ ٣\text{س} + ٣ & : ٤ \leqslant \text{س} \leqslant ٦ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الدالة د .

١٠ إذا كانت ق :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} + ١ & : \text{س} \leqslant ١ \\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & : \text{س} > ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الدالة ق

١ – ٧ ملخص وتمارين عامة

١ لتكن س كمية متغيرة ، أ ∈ ح ، نقول إن س تقترب من أ باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية | س – أ | أصغر من أي عدد حقيقي موجب .

٢ $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ل يعني أنه عندما تقترب س من أ ، س ≠ أ

فإنَّ د(س) تقترب باطراد من ل .

٣ $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ب ⟺ $\underset{\text{س}\to\text{أ}^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = ب = $\underset{\text{س}\to\text{أ}^-}{\text{نهـا}}$ د(س)

٤ لتكن د ، هـ دالتين ، أ ، ب ، حـ ∈ ح بحيث إن:

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) = ب ، $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = حـ عندئذٍ:

أ $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ [د(س) ± هـ(س)] = $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) ± $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ب ± حـ

ب $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ [د(س) × هـ(س)] = $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ د(س) × $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = ب × حـ

حـ إذا كانت حـ ≠ ٠ فإنَّ:

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}} = \frac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$$

٤ إذا كانت ب ≥ ٠ وكانت د(س) ≥ ٠ لقيم س المجاورة لـ أ من اليمين واليسار

فإنَّ: $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{د(س)}} = \sqrt{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}} = \sqrt{\text{ب}}$

٥ إذا كانت د(س) = ل هي الدالة الثابتة وكانت:

هـ(س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... + $أ_١$ س + $أ_٠$ حدودية فلأي ب ∈ ح

يكون: $\lim_{س \to ب}$ د(س) = ل = د(ب)،

$\lim_{س \to ب}$ هـ(س) = $أ_ن$ $ب^ن$ + $أ_{ن-١}$ $ب^{ن-١}$ + ... + $أ_١$ ب + $أ_٠$ = هـ(ب)

٦ $\lim_{س \to أ}$ $\sqrt[ن]{س}$ = $\sqrt[ن]{أ}$ حيث ن ∈ ص+ − {١} وعندما يكون ن عدداً زوجياً تكون أ > ٠

٧ لكل ل ∈ ح ، ن ∈ ز+

أ $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{ل}{س^ن}$ = ٠

ب $\lim_{س \to -\infty}$ $\frac{ل}{س^ن}$ = ٠

بشرط أن $س^ن$ معرفة

٨ إذا كانت د ، هـ دالتين وكان أ ∈ ح بحيث إن قيمة د(س) تزداد بلا حدود عندما تؤول س إلى أ فنقول أن قيم الدالة تتزايد إلى ∞ ونكتب: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ∞.

بينما إذا كانت قيمة هـ(س) تتناقص بلا حدود عندما س تؤول إلى أ فنقول إن قيم الدالة تتناقص إلى −∞ ونكتب $\lim_{س \to أ}$ د(س) = −∞

٩ إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً وزوجياً فإنَّ $\lim_{س \to أ}$ $\frac{١}{(س - أ)^ن}$ = ∞

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً وفردياً فإنَّ $\lim_{س \to أ^+}$ $\frac{١}{(س - أ)^ن}$ = ∞

$\lim_{س \to أ^-}$ $\frac{١}{(س - أ)^ن}$ = −∞

١٠ إذا كانت كل من د ، هـ دالة حدودية حيث:

$$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_٠ ،$$

$$هـ(س) = ب_م س^م + ب_{م-١} س^{م-١} + ... + ب_٠ \text{ فإنَّ}$$

أ $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{أ_ن}{ب_م}$ إذا كان ن = م

ب $\lim_{س \to \infty} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \text{صفر}$ إذا كان ن < م

١١ $\lim_{س \to أ} د(س) = \pm\infty$ إذا وفقط إذا $\lim_{س \to أ^+} د(س) = \pm\infty$ و $\lim_{س \to أ^-} د(س) = \pm\infty$

١٢ إذا كانت كل من د، ق متصلة عند س = أ فإنَّ كل دالة من الدوال التالية متصلة عند س = أ:

د + ق ، د − ق ، د . ق ، $\frac{د}{ق}$ حيث ق (أ) ≠ ٠

ويبقى ذلك صحيحاً إذا استبدلنا النقطة أ بفترة.

١٣ كل من الدالة الثابتة والدالة الحدودية والدالة: د(س) = |س| متصلة عند كل نقطة أ ∈ ح.

وكذلك الدالة: هـ(س) = $\sqrt[ن]{س}$ متصلة عند كل أ ∈ ح$^+$ حيث ن عدد صحيح زوجي موجب ومتصلة عند كل أ ∈ ح حيث ن عدد صحيح فردي موجب.

ويبقى ذلك صحيحا إذا استبدلنا النقطة بفترة تكون مجموعة جزئية من مجال الدالة.

١٤ إذا كانت د دالة متصلة عند س = أ وكانت د(أ) > ٠ فإنَّ الدالة: ق(س) = $\sqrt{د(س)}$ متصلة عند س = أ .

١٥ لتكن د متصلة عند النقطة أ ∈ ح حيث د(أ) = ب ، ولتكن هـ متصلة عند النقطة ب، عندئذ تكون: (هـ ∘ د) متصلة عند النقطة أ .

١٦ إذا كانت د متصلة عند كل نقطة في الفترة المفتوحة (حـ ، ء) فنقول إن د متصلة على الفترة (حـ ، ء) ، وإذا كانت أيضاً متصلة عند س = حـ من اليمين وعند س = ء من اليسار فنقول إن د متصلة على الفترة المغلقة [حـ ، ء].

١٧ إذا كانت الدالة د متصلة على فترة ما د(س) ≥ ٠ في هذه الفترة فإنَّ الدالة: ق(س) = $\sqrt{د(س)}$ متصلة على هذه الفترة.

تمارين عامة

١ – ٧

أسئلة مقالية:

في التمارين (١) – (٤) ابحث نهاية الدالة عندما تؤول س إلى القيمة المعطاة أ :

١ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{٨\text{س}^{٣} - ٢٧}{٤\text{س}^{٢} - ٩}$ ، $\text{أ} = \dfrac{٣}{٢}$

٢ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٢}}$ ، $\text{أ} = ٢$

٣ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{٣\text{س}^{٢} - ١٢}$ ، $\text{أ} = ٢$

٤ $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$ ، $\text{أ} = -١$

احسب النهايات الواردة في التمارين (٥) – (٩):

٥ $\underset{\text{س} \to \pm\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{حـ}}{\text{و س}^{٢} + \text{ل}}$ حيث أ ، ب، حـ، و، ل ثوابت حقيقية، و ≠ صفراً.

٦ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} = \dfrac{\text{س} + ٧}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} - ٥}}$

٧ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س}^{٣} - ٩|}{٢\text{س}^{٣} + ٧}$

٨ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ - ٥\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}}{\text{س} - ٩}$

٩ $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤\text{س}^{٢} - ٣}}{٢\text{س} + ١}$

في التمارين (١٠) - (١٢) أوجد مجال كل دالة من الدوال المعطاة ثم ابحث اتصالها:

١٠ $د(س) = \frac{س}{س + ١}$

١١ $د(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٤س + ٣}$

١٢ $د(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{|١ + س|} & : -٢ \leqslant س < -١ \\ -٢س & : -١ \leqslant س \leqslant ٤ \end{cases}$

١٣ لتكن $د(س) = \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢}$

عرف الدالة عند س = ٢ بحيث تكون متصلة عند هذه النقطة.

١٤ إذا كانت الدالة ق : $ق(س) = \begin{cases} \frac{٥س}{أس + ٦} & : س > -٢ \\ أس + ب & : س \leqslant -٢ \end{cases}$

متصلة عند س = -٢ ، $\lim_{س \to \infty} ق(س) = \frac{-٥}{٢}$

فأوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الاشتقاق

The Differentiation

الفصل الثاني

٢ - ١ المشتقة .

٢ - ٢ قواعد أساسية لإيجاد المشتقة .

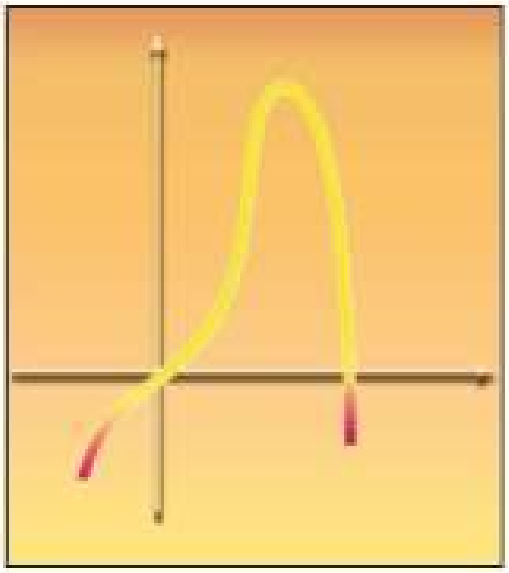
٢ - ٣ قواعد إضافية لإيجاد المشتقة .

٢ - ٤ قاعدة التسلسل وتعميم قاعدة القوى .

٢ - ٥ الاشتقاق الضمني .

٢ - ٦ المشتقات ذات الرتب العليا .

٢ - ٧ ملخص وتمارين عامة



٢-١ المشتقة

The Derivative

لقد تناولنا بالتفصيل في الفصل السابق مفهوم نهاية الدالة، وأصبح بإمكاننا أن نحدد ما إذا كانت دالة ما متصلة عند نقطة معينة.

وسنبدأ في هذا الفصل بتوضيح مفهوم التغير في الدالة. فمن الصيغ الهامة استخدام الرمز Δ ويقرأ (دلتا) ويرمز لمقدار التغير، وهو الفرق بين قيمتي المتغير، فمثلاً إذا كان المتغير س يتزايد أو يتناقص من $س_{٠}$ إلى $س_{١}$ فإنَّ مقدار التغير يكون $\Delta س$ ويقرأ (دلتا سين) ويكون $\Delta س = س_{١} - س_{٠}$، وبالمثل يرمز للتغير في ص بالرمز $\Delta ص$، ويرمز للتغير في الزمن ن بالرمز $\Delta ن$، . . . وهكذا.

ويجب ملاحظة أن الرمز $\Delta س$ هو رمز واحد لا يمكن تجزئته حيث إنه ليس حاصل ضرب Δ في المقدار س

وإذا كانت ص = د(س) فإنَّ أي تغير في قيمة س من $س_{٠}$ إلى $س_{١}$، يتبعه تغير في قيمة ص من $د(س_{٠})$ إلى $د(س_{١})$ وعليه فإنَّ التغير في ص هو:

$$\Delta ص = د(س_{١}) - د(س_{٠})$$

ويكون التغير في ص بالنسبة للتغير في س هو $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ويسمى متوسط معدل التغير.

نستخلص من المعادلة $\Delta س = س_{١} - س_{٠}$ أن $س_{١} = س_{٠} + \Delta س$

وتستخدم بعض المراجع الرمز هـ بدلاً من $\Delta س$ وبذلك تصبح $س_{١} = س_{٠} + هـ$

$$\Delta ص = د(س_{١}) - د(س_{٠}) = د(س_{٠} + هـ) - د(س_{٠})$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{٠} + هـ) - د(س_{٠})}{هـ}$$

أما نحن في هذا الكتاب فسنستخدم كلا الرمزين $\Delta س$ ، هـ مع التأكيد دائماً على أنهما يمثلان نفس القيمة أي أن $\Delta س = هـ = س_{١} - س_{٠}$.

إذا كانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_{٠} + هـ) - د(س_{٠})}{هـ}$ موجودة فتسمى معدل تغير الدالة عند $س_{٠}$

مثال ١

لتكن د(س) = س^{٢} + ٢ احسب

١ Δس ٢ Δص ٣ متوسط معدل التغير

وذلك عندما تتغير س من ١ إلى ٣

الحل

س$_{٠}$ = ١ ، س$_{١}$ = ٣

١ Δس = س$_{١}$ − س$_{٠}$ = ٣ − ١ = ٢

٢ Δص = د(س$_{١}$) − د(س$_{٠}$) = د(٣) − د(١) = (٣^{٢} + ٢) − (١^{٢} + ٢)

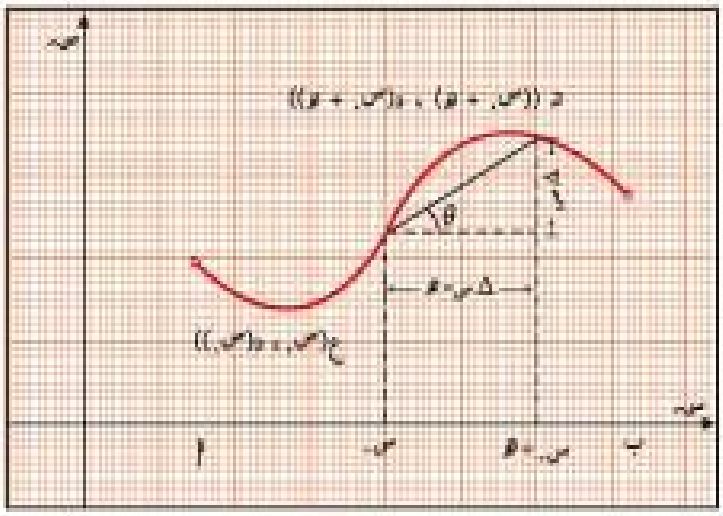
= ١١ − ٣ = ٨

٣ متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

وأيضاً في هذا الفصل نحاول الوصول إلى تعريف المشتقة من خلال دراسة مفهوم التغير في الدالة، ونمهد لذلك بدراسة ميل المماس لمنحنى دالة عند نقطة عليه هندسياً.

ميل المنحنى (ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة عليه) Slope of a curve

تعلم أنه لإيجاد ميل المستقيم نحتاج إلى نقطتين منتميتين إلى هذا المستقيم. ولو فرضنا أننا نريد إيجاد ميل منحنى الدالة د المعرفة على (أ ، ب) عند النقطة ع(س$_{٠}$ ، د(س$_{٠}$)) حيث س$_{٠}$ ∈ (أ ، ب) فإننا نفرض وجود نقطة أخرى قريبة منها على منحنى الدالة ولتكن ه ((س$_{٠}$ + هـ) ، د(س$_{٠}$ + هـ)) حيث (س$_{٠}$ + هـ) ∈ (أ ، ب) ، هـ هي الفرق بين الإحداثيين السينيين للنقطتين ع، ه كما هو في الشكل (٢ − ١).



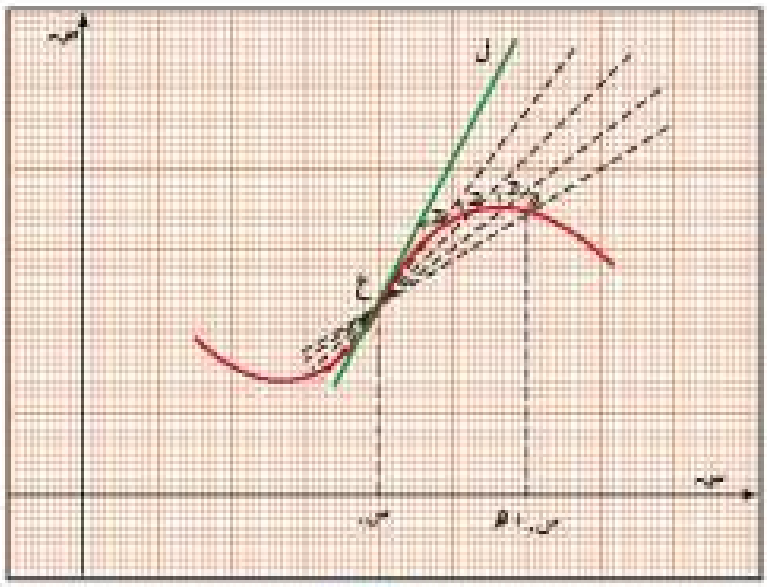
شكل ٢-١

نجد أن ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين ع ، ق هو:

$$م = ظا\theta = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{.} + هـ) - د(س_{.})}{س_{.} + هـ - س_{.}}$$

$$= \frac{د(س_{.} + هـ) - د(س_{.})}{هـ}$$

وإذا تركنا النقطة ع ثابتة وتصورنا أن النقطة ق تقترب تدريجياً على منحنى الدالة من النقطة ع كما في الشكل (٢ - ٢)، فإنَّ الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ق_{١}ع}$ يأخذ تدريجياً الشكل $\overleftrightarrow{ق_{١}ع}$ ، $\overleftrightarrow{ق_{٢}ع}$ ، $\overleftrightarrow{ق_{٣}ع}$ ، . . . حتى يتحول تدريجياً إلى المماس ل للمنحنى عند النقطة ع ويكون ميله ميلاً للمماس عند ع



شكل ٢ - ٢

إذن ميل المماس (أو ميل منحنى الدالة د) عند النقطة ع هو:

تعريف

$$م = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س_{.} + هـ) - د(س_{.})}{هـ}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

أي أن ميل المماس لمنحنى د عند نقطة (س. ، د(س.)) هو معدل تغير الدالة د عند س.

مثال ٢

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = $س^٢$ عند النقطة (٢ ، ٤).

الحل

ميل المماس م = $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ}$ إن وجدت.

نبدأ بوضع $س_٠$ = ٢ حيث د(س) = $س^٢$

إذن د($س_٠$ + هـ) = د(٢ + هـ) = $(٢ + هـ)^٢$

∴ د($س_٠$ + هـ) = ٤ + ٤هـ + $هـ^٢$

وكذلك د($س_٠$) = د(٢) = ٤

$$\frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ} = \frac{(٤ + ٤هـ + هـ^٢) - ٤}{هـ}$$

$$= \frac{٤هـ + هـ^٢}{هـ}$$

$$= \frac{هـ(٤ + هـ)}{هـ}$$

= ٤ + هـ حيث هـ ≠ ٠

∴ م = $\underset{هـ \to ٠}{نهـا}$ (٤ + هـ) = ٤

تعريف المشتقة:

إن النهاية التي حصلنا عليها في إيجاد ميل المنحنى ستتكرر كلما أردنا حساب معدل التغير لأي دالة ص = د(س) وذلك في مختلف العلوم الهندسية والفيزيائية والاقتصادية وغيرها. وهذا ما يعطي تلك النهاية أهميتها ويجعلنا نخصص فصلاً كاملاً لدراستها وفهمها وسنسمي هذه النهاية بمشتقة الدالة.

وبصورة أشمل فإنَّ تعريف المشتقة يكون كالتالي:

إذا كانت الدالة د معرفة في الفترة المفتوحة (أ ، ب) فإنَّ معدل التغير للدالة د عند $س_٠$ ∈ (أ ، ب) يسمى مشتقة الدالة د عند هذه النقطة، ويرمز له بالرمز $د'(س_٠)$ ويعطى بالقانون التالي:

قانون

لتكن الدالة د معرفة في الفترة (أ ، ب) ، $س_{.} \in$ (أ ، ب)

فإنَّ : $د'(س_{.}) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س_{.} + هـ) - د(س_{.})}{هـ}$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

ملاحظات:

١ إذا وجدت مشتقة للدالة عند النقطة $س_{.}$ فإننا نقول إن د قابلة للاشتقاق عند النقطة $س_{.}$ ، وإذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة من نقاط الفترة المفتوحة (أ ، ب) فإننا نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق في هذه الفترة، وكذلك إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة (-∞ ، ∞) فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على ح.

٢ إذا كانت النهاية غير موجودة فإننا نقول إن الدالة ليس لها مشتقة عند النقطة $س_{.}$ ، أو أن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

٣ لأي دالة د تكون د' دالة أخرى يتكون مجالها من قيم س التي يكون للدالة د مشتقة عندها.

٤ نتيجة للحاجة لإيجاد مشتقة الدالة كدالة أخرى في المتغير المستقل س فإننا عادة نستبدل النقطة $س_{.}$ في النهاية بالمتغير س وعليه إذا كانت ص = د(س) وتغيرت س بمقدار Δس وتبع ذلك تغيراً في ص بمقدار Δص ، بالتالي يكون:

متوسط معدل التغير للدالة د = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ حيث Δس ≠ ٠

ومن ذلك نستنتج أن:

$$د'(س) = \underset{\Delta س \to ٠}{نهـا} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$ إن وجدت.

وقد اعتبر العالم الرياضي «ليبنتز» وهو أحد مؤسسي علم التفاضل أن المشتقة هي نهاية قسمة متغيرين واستخدم بدلاً من الرمز د'(س) الرمز $\frac{ء ص}{ء س}$ وتقرأ كالتالي (دال صاد على دال سين):

$$\frac{ء ص}{ء س} = \underset{\Delta س \to ٠}{نهـا} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

٥ نلاحظ من تعريف المشتقة أن د($س_{.}$ + هـ) ، د($س_{.}$) موجودتان وأن هـ تقترب من الصفر من اليمين ومن اليسار، وهذا يعني أن الدالة د يجب أن تكون معرفة عند $س_{.}$ وكذلك على يمين $س_{.}$ ويسارها، أي أن د معرفة على فترة مفتوحة تحوي $س_{.}$.

٦ ميل المماس عند نقطة (س. ، د(س.)) هو د′ (س.) .

٧ لتكن ص = د(س) فمن الرموز المختلفة للمشتقة ما يلي:

ص′ ، د′ (س) ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ص) ، س^{ء} [د(س)].

٨ المشتقة من اليمين يرمز لها بالرمز د′$_{+}$ (س.) وهي:

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د(س. + هـ) − د(س.)}}{\text{هـ}} \quad \text{إن وجدت}$$

والمشتقة من اليسار يرمز لها بالرمز د′$_{-}$ (س.) وهي:

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{د(س. + هـ) − د(س.)}}{\text{هـ}} \quad \text{إن وجدت}$$

مثال ٣

إذا كانت د(س) = س^{٢} + س فأوجد د′ (س) و د′ (٢) .

الحل

باستخدام تعريف المشتقة يكون:

$$\text{د′(س)} = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} \quad \text{إن وجدت}$$

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{[(س + هـ)}^{٢} + \text{(س + هـ)] − (س}^{٢} + \text{س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س هـ} + \text{هـ}^{٢} + \text{س} + \text{هـ} - \text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٢\text{س هـ} + \text{هـ}^{٢} + \text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ(٢س + هـ + ١)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \text{(٢س + هـ + ١)} \quad \text{حيث هـ} \neq ٠$$

$$= ٢\text{س} + ١$$

$$\therefore \text{د′(س)} = ٢\text{س} + ١$$

وبالتالي د′ (٢) = ٢ × ٢ + ١ = ٥

مثال ٤

أوجد د′(س) إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}}$

ثم أوجد مجال د′.

الحل

مجال الدالة د هو [٠ ، ∞)

وهي ليست قابلة للاشتقاق عند س = ٠ لأن

الدالة د ليست معرفة على يسار الصفر.

(انظر ملاحظة (٥))

$$\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}$$ إن وجدت

ولإيجاد هذه النهاية سنضرب البسط والمقام في مرافق البسط وهو المقدار $(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}})$

$$\therefore \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \text{هـ} - \text{س}}{\text{هـ}(\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}})}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س} + \text{هـ}} + \sqrt{\text{س}}} \text{ ، حيث هـ} \neq ٠$$

$$= \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \text{ ، لماذا؟}$$

الدالة: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ، مجالها هو (٠ ، ∞)

صيغة أخرى للمشتقة

إذا كان المطلوب إيجاد مشتقة الدالة د عند النقطة $\text{س}_{\text{ا}}$ فإنه يمكن أحياناً استخدام الصيغة البديلة التالية:

$$\text{د}'(\text{س}_{\text{ا}}) = \underset{\text{س}\to \text{س}_{\text{ا}}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{س}_{\text{ا}})}{\text{س} - \text{س}_{\text{ا}}}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

ويمكن الحصول من هذه الصيغة على الصيغة الأصلية بالتعويض عن س بالمقدار $\text{س}_{\text{ا}} + \text{هـ}$

مثال ٥

بيّن أن الدالة : د(س) = |س| ، ليس لها مشتقة عند س = ٠

الحل

لبيان أن دالة القيمة المطلقة: د(س) = |س| ليس لها مشتقة عند نقطة الأصل س = ٠، فإننا يجب أن نبيّن أن:

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠} \frac{|\text{س}| - |٠|}{\text{س} - ٠} \text{ غير موجودة}$$

وحيث إنّ:

$$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^+} \frac{|\text{س}| - |٠|}{\text{س} - ٠} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^+} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^+} \frac{\text{س}}{\text{س}} \quad \text{حيث س} \neq ٠$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^+} ١ = ١$$

$$\therefore \text{د}'_+(٠) = ١$$

$$\text{كذلك نهـا}_{\text{س}\to ٠^-} \frac{|\text{س}| - |٠|}{\text{س} - ٠} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^-} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^-} \frac{-\text{س}}{\text{س}} \quad \text{حيث س} \neq ٠$$

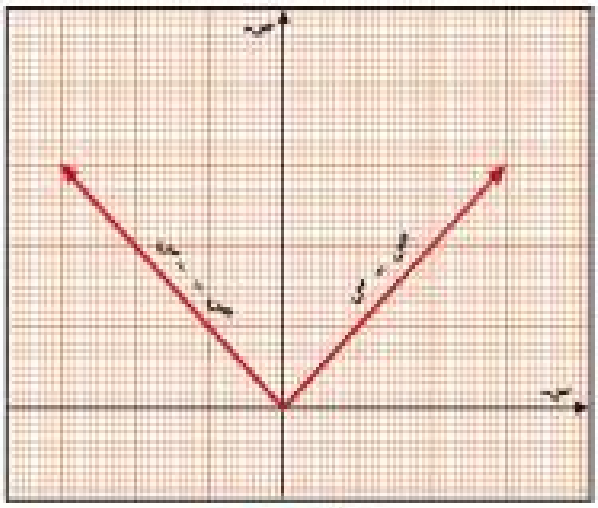
$$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٠^-} (-١) = -١$$

$$\therefore \text{د}'_-(٠) = -١$$

$$\because \text{د}'_+(٠) \neq \text{د}'_-(٠)$$

$$\therefore \text{د}'(٠) \text{ ليست موجودة.}$$

شكل (٢ – ٣) يمثل بيان الدالة د(س) = |س|



شكل ٢-٣

مثال ٦

إذا كانت الدالة د معرفة كالتالي:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & : \quad س \geqslant ١ \\ ٢س & : \quad س < ١ \end{cases}$$

فابحث قيمة مشتقة الدالة د عند س = ١

الحل

الدالة معرفة عند س = ١ ، حيث د(١) = ١ + ١ = ٢

ولذلك فإننا بحاجة إلى اختبار وجود أو عدم وجود المشتقة للدالة عندما س = ١

$$\because \quad د'(س) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} \qquad \text{إن وجدت}$$

$$\therefore \quad د'_+(١) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} \qquad \text{إن وجدت}$$

$$\underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٢(١ + هـ) - (١^٢ + ١)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٢ + ٢هـ - ٢}{هـ} \qquad هـ \neq ٠$$

$$\underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} ٢ = ٢$$

$$د'_+(١) = ٢ \qquad \text{_____} (١)$$

$$، \quad د'_-(١) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} \qquad \text{إن وجدت}$$

$$\underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{(١ + هـ)^٢ + ١ - ٢}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{هـ(٢ + هـ)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} (٢ + هـ) \quad ، \quad هـ \neq ٠$$

$$= ٢$$

$\therefore$ $د'_{-}(١) = ٢$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

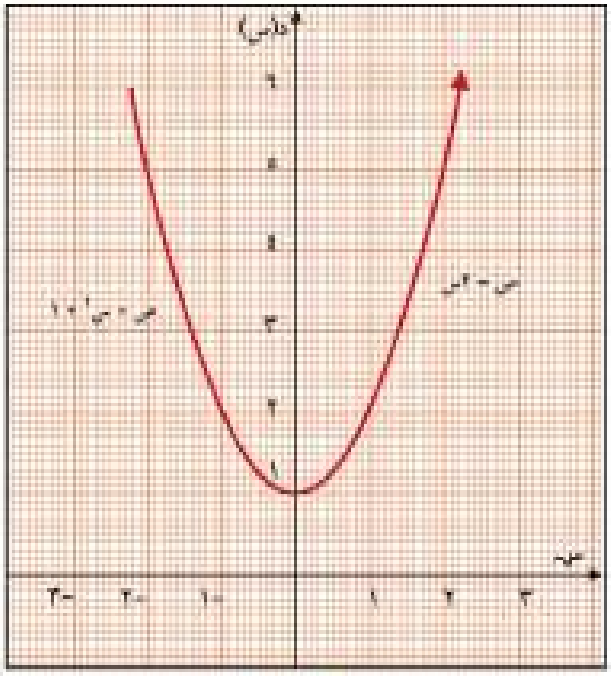
$د'_{+}(١) = د'_{-}(١) = ٢$

$\therefore$ $\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \dfrac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = ٢$

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

وقيمة مشتقتها عند س = ١ هي ٢

انظر شكل (٢ - ٤)



شكل (٢-٤)

مثال ٧

إذا كانت $د(س) = س^{\frac{١}{٢}}$ ، باستخدام تعريف المشتقة أوجد $د'(أ)$ ، حيث $أ \neq ٠$ ثم أوجد مجال الدالة $د'$.

الحل

في هذا المثال المطلوب هو $د'(أ)$ لذلك يُفضل استخدام الصيغة البديلة للمشتقة ومن ثم نجري بعض العمليات الجبرية .

$$د'(أ) = \underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{س - أ} \quad \text{إن وجدت}$$

$$\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{س - أ} = \underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{\left(س^{\frac{١}{٢}}\right)^{٢} - \left(أ^{\frac{١}{٢}}\right)^{٢}}$$

$$= \underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{\left(س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}\right)\left(س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}} أ^{\frac{١}{٢}} + أ^{\frac{١}{٢}}\right)}$$

وبقسمة البسط والمقام على $(\text{س}^{\frac{1}{2}} - \text{أ}^{\frac{1}{2}})$ وأخذ النهاية ينتج أن:

$$\text{د}'(\text{أ}) = \frac{1}{\text{أ}^{\frac{2}{3}} + \text{أ}^{\frac{2}{3}} + \text{أ}^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\,\text{أ}^{\frac{2}{3}}}$$

وحيث إن أ هو أي عدد حقيقي لا يساوي صفراً فإنَّ:

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{1}{3\,\text{س}^{\frac{2}{3}}}$$

لجميع قيم س عدا الصفر

وعليه فإنَّ مجال الدالة د′ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر ■

نظرية ١

الاشتقاق والاتصال The derivative and continuity

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند النقطة س_0 فإنَّ د تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق عند س_0 هذا يعني أن د معرفة على فترة مفتوحة (أ ، ب) تحتوي على س_0 لكل س ∈ (أ ، ب) ، س ≠ س_0 يمكن كتابة د(س) على الشكل التالي:

$$\text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}_0) + \left(\frac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0}\right)(\text{س} - \text{س}_0)$$

وباستخدام نظريات النهايات نجد أن:

$$\underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}}\ \text{د}(\text{س}_0) + \underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}}\ \frac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} \cdot \underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}}\ (\text{س} - \text{س}_0)$$

$$= \text{د}(\text{س}_0) + \text{د}'(\text{س}_0) \cdot (0) \qquad \text{حيث } \text{د}'(\text{س}_0) \text{ موجودة.}$$

$$= \text{د}(\text{س}_0)$$

وهكذا فإنه بناء على تعريف اتصال الدالة تكون د متصلة عند النقطة س_0 .

ويجب التنبيه هنا على أن عكس هذه النظرية ليس صحيحاً، أي أنه إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة ما فلا يتحتم أن تكون قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

ويمكن ملاحظة ذلك من المثال (٥) حيث إن دالة القيمة المطلقة متصلة عند النقطة س = ٠ ولكن ليس لها مشتقة عند تلك النقطة.

نتيجة

إذا كانت الدالة د ليست متصلة عند النقطة $س_{٠}$ فإنَّ $ق'(س_{٠})$ ليست موجودة.

مثال ٨

ابحث وجود مشتقة للدالة د

عند س = ٢ حيث:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & : س < ٢ \\ ٢س + ٢ & : س \geq ٢ \end{cases}$$

الحل

نبحث أولاً الاتصال عند النقطة س = ٢

∴ د(٢) = ٢(٢) + ٢ = ٦

، $\underset{س \to ٢^{-}}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٢^{-}}{نهـا}$ $(س^{٢} + ١)$ = ٤ + ١ = ٥ ..... (١)

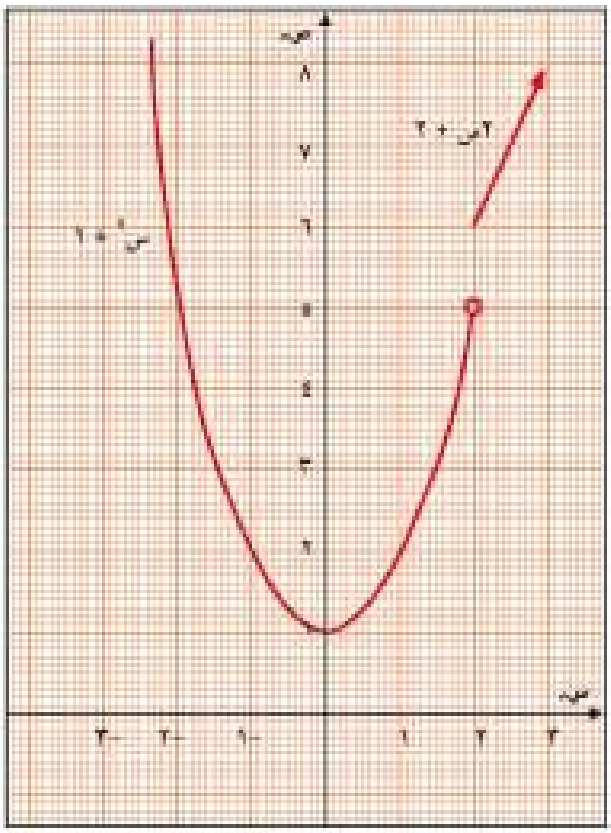
، $\underset{س \to ٢^{+}}{نهـا}$ د(س) = $\underset{س \to ٢^{+}}{نهـا}$ (٢س + ٢) = ٤ + ٢ = ٦ ..... (٢)

∴ $\underset{س \to ٢^{-}}{نهـا}$ د(س) ≠ $\underset{س \to ٢^{+}}{نهـا}$ د(س)

∴ $\underset{س \to ٢}{نهـا}$ د(س) غير موجودة

ومنه نستنتج أن د غير متصلة عند س = ٢، كما في الشكل (٢ - ٥).

وعليه فإنَّ د'(٢) غير موجودة.



شكل ٢-٥

مثال ٩

ابحث مشتقة الدالة د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ عند س = ٠

الحل

للبحث عن مشتقة الدالة عند س = ٠ فإننا نستخدم التعريف:

$$\text{د}'(\text{س}) = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + \text{هـ}} - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{هـ}}$$

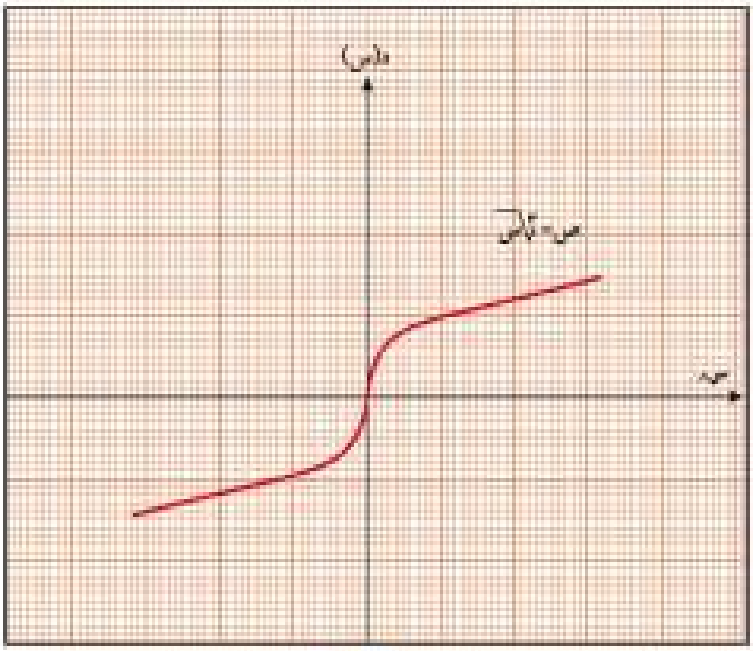
نجد أنه عندما س = ٠ ، فإنَّ المقدار في الطرف الأيسر هو:

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{٠ + \text{هـ}} - \sqrt[٣]{٠}}{\text{هـ}} = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\frac{١}{٣}}}{\text{هـ}} \text{ ، هـ} \neq ٠$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١}{\text{هـ}^{\frac{٢}{٣}}} = \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١}{(\sqrt[٣]{\text{هـ}})^{٢}}$$

ونجد أنه عندما هـ ← ٠ فإنَّ المقدار يؤول إلى ∞

ومن ذلك نستنتج أن النهاية غير موجودة، وأن الدالة ليس لها مشتقة عند النقطة س = ٠، ويبين الشكل (٢ - ٦) أن الدالة د متصلة عند النقطة س = ٠ ، ويتبين وجود مماس رأسي للمنحنى عند هذه النقطة ولكن لا يتعين له ميل.



شكل (٢-٦)

مثال ١٠

ابحث مشتقة الدالة $د(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ عند س = ٠

الحل

لإيجاد مشتقة الدالة عند س = ٠ فإننا نوجد أولاً:

$$د'(س) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{(س + هـ)^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{٢}{٣}}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt[٣]{(س + هـ)^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٢}}}{هـ}$$

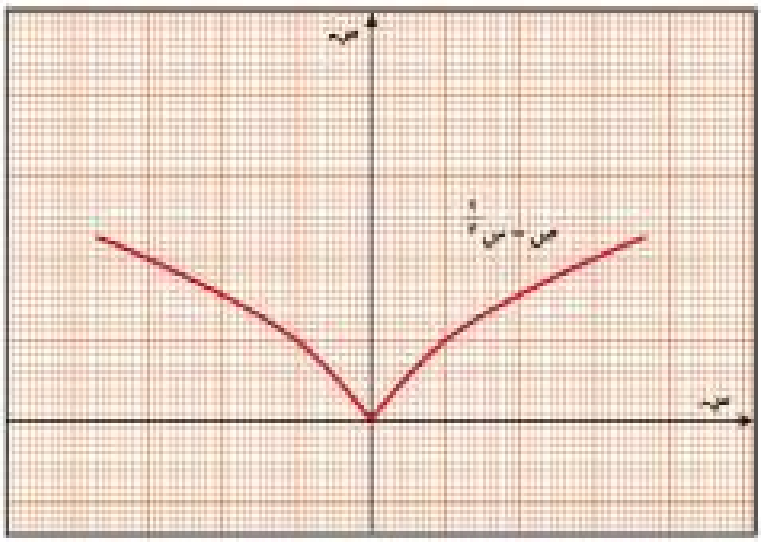
وعندما س = ٠ فإنَّ المقدار في الطرف الأيسر يكون:

$$\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt[٣]{(٠ + هـ)^{٢}} - \sqrt[٣]{٠^{٢}}}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{هـ^{\frac{٢}{٣}}}{هـ} \text{ ، } هـ \neq ٠$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{١}{هـ^{\frac{١}{٣}}} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{١}{\sqrt[٣]{هـ}}$$

وهذه النهاية غير موجودة، حيث إن:

$\underset{هـ \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{١}{\sqrt[٣]{هـ}} = \infty$ بينما $\underset{هـ \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{١}{\sqrt[٣]{هـ}} = -\infty$ ويتبين وجود مماس رأسي عند س = ٠



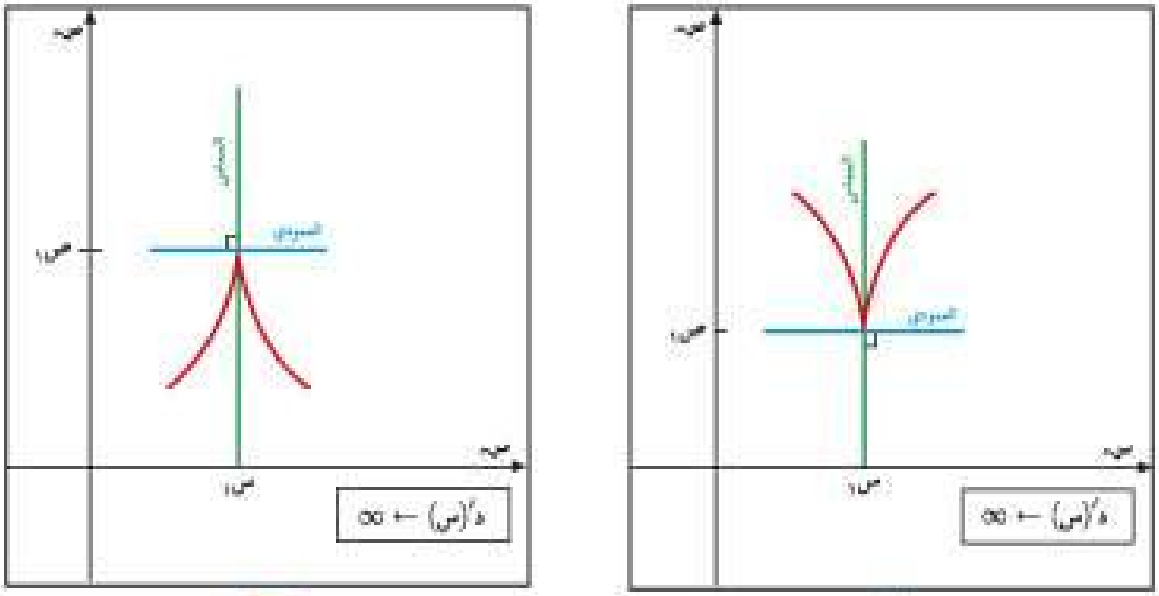
شكل ٢-٧

ويمكن أن نلاحظ من الشكل (٢ - ٧) أن الدالة متصلة عند النقطة س = ٠ ولكن ليس لها مشتقة عند تلك النقطة. ■

تعريف المماس الرأسي:

يكون لمنحنى د مماساً رأسياً عند النقطة (س$_{١}$ ، د(س$_{١}$))

إذا كانت الدالة د متصلة عند النقطة (س$_{١}$ ، د(س$_{١}$)) وكان $\lim\limits_{س \to س_{١}}$ |د′(س)| = ∞

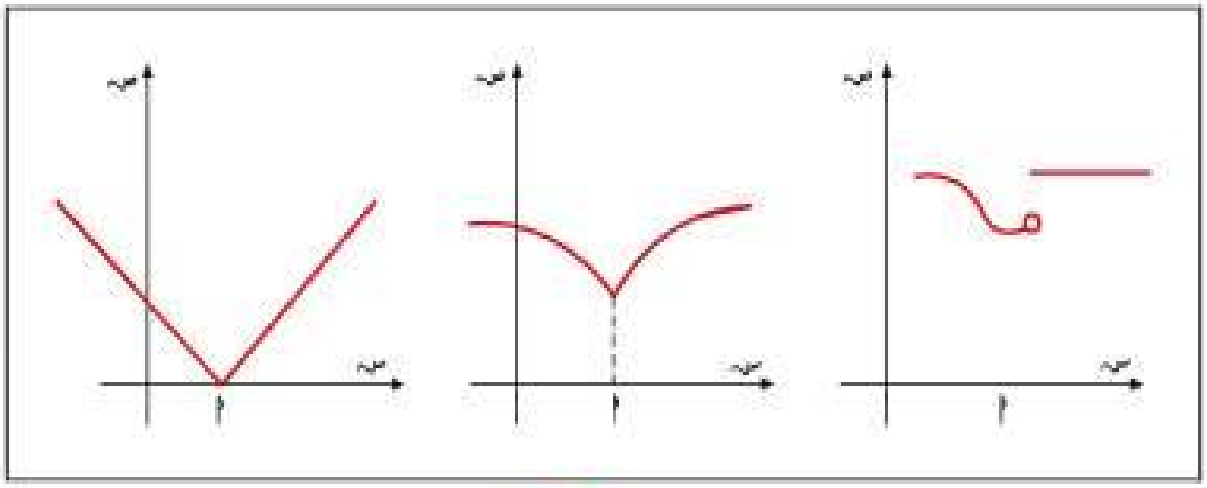


أ ب

شكل (٢-٨)

ملاحظة:

تكون الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا كان هناك عدم اتصال عند أ أو كان هناك نتوء حاد عند أ انظر شكل (٢ - ٩) أو وجود مماس رأسي عند أ بدون نتوء كما في مثال (٩).



شكل (٢-٩)

تمارين

٢ - ١

بنود موضوعية:

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ إذا كان د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}}$ فإنَّ د′(١) موجودة.

٢ إذا كان د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & : \text{س} > ٢ \\ ٢\text{س} + ١ & : \text{س} \leq ١ \end{cases}$ فإنَّ د′(١) ليست موجودة.

٣ إذا كانت ق : ص ← ح ، ق(س) = س^{٢} + ٢ فإنَّ ق′(٢) = ٤

٤ إذا كانت ق′(٣) موجودة فإنَّ ق متصلة عند س = ٣.

٥ إذا كانت ق′(٥) موجودة فإنَّ $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٥).

٦ إذا كانت ق متصلة عند س = ٣ فإنَّ ق′(٣) موجودة.

٧ إذا كان مجال ق هو ح فإنَّ مجال ق′ هو ح.

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كان د(س) = |س - ٢| فإنَّ د′(٢) هي:

(أ) صفراً (ب) ١ (ج) -١ (د) ليس موجودة.

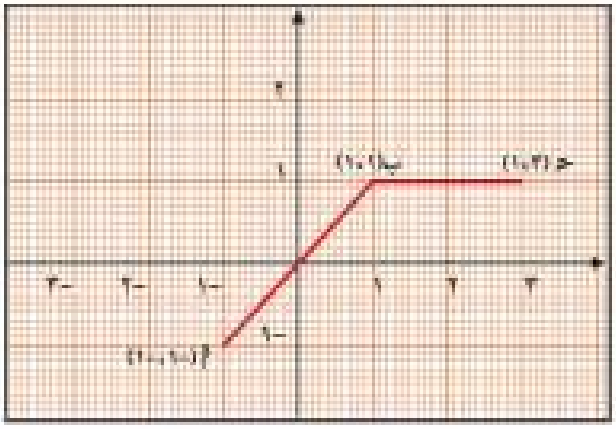
٢ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = ١ فإنَّ د(س) يمكن أن تساوي

(أ) $\sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{س} - ١}}$ (ب) |س - ١|

(ج) $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$ (د) $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}$

• **ثالثاً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة.**

في الشكل إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ ∪ $\overline{\text{ب حـ}}$ توضح منحنى بيان دالة د فإنَّ:



القائمة ١	القائمة ٢
١ د′(٠) هي	أ -١
	ب صفراً
٢ د′(١) هي	حـ ١
	د ٢
٣ د′(٢) هي	هـ ليست موجودة

أسئلة مقالية:

• **أجب عن الأسئلة التالية:**

١ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س عند النقاط س = −٢ ، س = ١ ، س = ٢,٥ .

في التمارين من (٢) إلى (٧) أوجد د′(س) وعين مجال د′.

٢ د(س) = ٣س + ٨

٣ د(س) = ١ − س^{٢}

٤ د(س) = $\frac{١}{\text{س} + ٢}$

٥ د(س) = س^{٣}

٦ د(س) = ٩

٧ د(س) = $\sqrt{٤\text{س} + ١}$

في التمارين من (٨) إلى (١٠) أوجد ص′

٨ $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$

٩ $ص = س^{-٤}$

١٠ $ص = (س + ١)^{٢}$

في التمارين من (١١) إلى (١٤) أوجد د′(أ) باستخدام الصيغة البديلة لتعريف المشتقة:

١١ $د(س) = \frac{١}{س + ٧}$

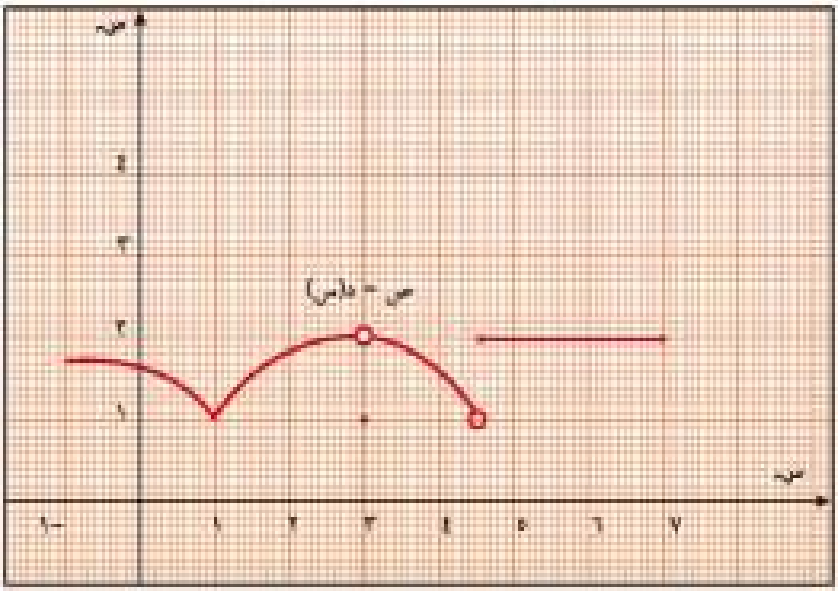
١٢ $د(س) = ١ - س^{٣}$

١٣ $د(س) = س^{٢}$

١٤ $د(س) = \sqrt{٣س}$

١٥ إذا كانت $د(س) = ٢س^{٣}$ فأوجد باستخدام تعريف المشتقة قيمة كل من د′(٣) ، د′(٠)، د′(−٤).

١٦ ادرس الدالة ص = د(س) كما في الشكل التالي ومن ثم أجب عن الأسئلة التالية:



أ قدّر قيم د′(٠).

ب أوجد قيم س في الفترة (−١ ، ٧) التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

جـ أوجد قيم س في الفترة (−١ ، ٧) التي لا يكون عندها للدالة مشتقة.

د أوجد قيم س في الفترة (−١ ، ٧) التي تكون عندها مشتقة الدالة تساوي صفراً.

١٧ ابحث وجود مشتقة للدالة الآتية عند س = ١

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٥ & : \quad س < ١ \\ ٣س^{٢} & : \quad س \geqslant ١ \end{cases}$$

في التمارين من (١٨) إلى (٢١) ابحث قابلية الاشتقاق لكل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:

١٨ $$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & : \quad س \geqslant ٢ \\ ٣س - ٢ & : \quad س < ٢ \end{cases}$$ عند س = ٢

١٩ $$د(س) = \begin{cases} \sqrt{س + ١} & : \quad س > ٠ \\ س^{٢} + ١ & : \quad س \leqslant ٠ \end{cases}$$ عند س = ٠

٢٠ $$د(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س - ٣}$$ عند س = −١

٢١ $$د(س) = \begin{cases} ٢س & : \quad س > ١ \\ س^{٢} + ١ & : \quad س \leqslant ١ \end{cases}$$ عند س = ١

٢-٢ قواعد أساسية لإيجاد المشتقة

Rules of Finding a derivative

لقد لاحظنا من الأمثلة في البند السابق أن إيجاد مشتقة الدالة باستخدام التعريف يحتاج إلى عمليات حسابية مطولة رغم أن الأمثلة كانت لدوال بسيطة. وتزداد العمليات كلما كانت الدالة أكثر تعقيداً مثل د(س) = س^{٧} أو د(س) = ٢س^{٣} + ٧س^{٢} ، . . . وغيرها.

ولذلك فلا بد من استخدام النظريات التالية لتسهيل عملية إيجاد المشتقة.

نظـريـة ٢

مشتقة الدالة الثابتة **The derivative of a Constant Function**

إذا كانت د(س) = حـ ، حيث حـ عدد ثابت

فإنَّ د$'$(س) = صفر $\forall$ س $\in$ ح

البرهان:

د$'$(س) = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}}$ إن وجدت

$\because$ د(س) = حـ $\forall$ س $\in$ ح

$\therefore$ د(س + هـ) = حـ

$\therefore$ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{حـ − حـ}}{\text{هـ}} = ٠$ حيث هـ $\neq$ ٠

$\therefore$ د$'$(س) = صفر لكل س $\in$ ح

أي أن مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً..

ويمكن ملاحظة ذلك هندسياً حيث إن بيان الدالة الثابتة هو مستقيم يوازي محور السينات.

مثال ١

إذا كانت د(س) = ١ فأوجد د′(−١) ، د′(٢)

الحل

د(س) = ١ ⇐ د′(س) = صفر (نظرية)

∴ د′(−١) = صفر

، د′(٢) = صفر

نظـــريـــة ٣

مشتقة الدالة: د(س) = س **derivative of a functions f(x)**

إذا كانت د(س) = س فإنَّ د′(س) = ١

لجميع قيم س الحقيقية.

البرهان:

من تعريف المشتقة نحصل على:

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} \quad \text{إن وجدت}$$

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{س} + \text{هـ} - \text{س}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} = ١ \quad \text{حيث هـ} \neq ٠$$

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ١ \quad \forall \text{ س} \in \text{ح}$$

نظـــريـــة ٤

مشتقة الدالة: د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ (قاعدة القوى) **power rule**

إذا كانت د(س) = $\text{س}^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، ن ≠ ١

فإنَّ د′(س) = ن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

ومثال ذلك:

د(س) = س^{٣} ⇐ د′(س) = ٣س^{٢} ،

د(س) = س^{٩} ⇐ د′(س) = ٩س^{٨} ، . . . . . وهكذا

نظـريـة ٥

مشتقة حاصل ضرب دالة في عدد ثابت **The derivative of a Function Product in constant**

إذا كانت د(س) = حـ · ق(س) ، حيث حـ عدد ثابت وكانت الدالة ق قابلة للاشتقاق عند نقطة ما فإنَّ الدالة د تكون قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

وتكون:

د′(س) = حـ · ق′(س) .

البرهان:

∵ د(س) = حـ · ق(س) _____ (١)

∴ د(س + هـ) = حـ · ق(س + هـ) _____ (٢)

$$\therefore \frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{حـ · ق(س + هـ) − حـ ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{حـ} \cdot \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د(س + هـ) − د(س)}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \text{حـ} \cdot \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \left(\lim_{\text{هـ} \to ٠} \text{حـ}\right) \times \left(\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}}\right)$$

$$= \text{حـ} \cdot \text{ق}'(\text{س})$$

∴ د′(س) = حـ · ق′(س)

∴ الدالة د قابلة للاشتقاق عند النقطة س

مثال ٢

إذا كانت $د(س) = \frac{١}{٦} س^{٣}$

فإنَّ $د'(س) = \frac{١}{٦} \times ٣س^{٢} = \frac{١}{٢} س^{٢}$.

نظـريـة ٦

مشتقة المجموع الجبري لدالتين **The derivative of Summing two functions**

إذا كانت ق ، ك دالتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة ما فإنَّ الدالة:

$ل(س) = ق(س) \pm ك(س)$ قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة. وتكون:

$[ق(س) + ك(س)]' = ق'(س) + ك'(س)$

$[ق(س) - ك(س)]' = ق'(س) - ك'(س)$

وهذا يعني أن مشتقة مجموع دالتين هو مجموع مشتقتي الدالتين، وكذلك مشتقة الفرق بين دالتين هو الفرق بين مشتقتي الدالتين.

البرهان:

سنبرهن مشتقة مجموع الدالتين، ويمكن للطالب أن يكمل الخطوات لبرهان مشتقة الفرق بين الدالتين.

$ل'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ}$ إن وجدت

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{[ق(س + هـ) + ك(س + هـ)] - [ق(س) + ك(س)]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \left[\frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} + \frac{ك(س + هـ) - ك(س)}{هـ}\right]$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ك(س + هـ) - ك(س)}{هـ}$$

$$= ق'(س) + ك'(س)$$

$\therefore ل'(س) = ق'(س) + ك'(س)$

مثال ٣

إذا كانت ق(س) = $س^{٦}$ ، ك(س) = $س^{٤}$

فأوجد د′(س) حيث د(س) = ق(س) + ك(س)

الحل

∵ د(س) = ق(س) + ك(س)

= $س^{٦}$ + $س^{٤}$

∵ د′(س) = ق′(س) + ك′(س) لماذا؟

∴ د′(س) = $٦س^{٥}$ + $٤س^{٣}$

ملاحظة :

يمكن تعميم هذه النظرية لأي عدد من الدوال، ونعبر عن ذلك بقولنا «مشتقة المجموع الجبري لأي عدد من الدوال القابلة للاشتقاق هو المجموع الجبري لمشتقات تلك الدوال».

مثال ٤

أوجد ق′(س) إذا كانت ق(س) = $٣س^{٤}$ − $٢س^{٣}$ + $٤س^{٢}$ + ١

الحل

ق′(س) = $ءس$ ($٣س^{٤}$) + $ءس$ (−$٢س^{٣}$) + $ءس$ ($٤س^{٢}$) + $ءس$(١)

= $١٢س^{٣}$ − $٦س^{٢}$ + ٨س + ٠

= $١٢س^{٣}$ − $٦س^{٢}$ + ٨س

تمارين

٢ - ٢

➤ **بنود موضوعية:**

• **أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي:**

١ ميل مماس منحنى الدالة ق(س) = $\sqrt{٢س}$ عند س = ٢ يساوي $\frac{١}{٢}$

٢ إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & : س \geq ١ \\ ٣س & : س < ١ \end{cases}$ فإنَّ $ق'_+(١) = ٢$

٣ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ١}{س - ١} = ٥$

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت ق(س) = ٣س^٢ − ٢س فإنَّ المماس لمنحنى ق يكون أفقياً عندما س =

(أ) ٠ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٢ إذا كان ميل مماس منحنى الدالة ق عندما س = ١ يساوي ٤ فإنَّ ق(س) يمكن أن تساوي

(أ) س^٢ + ٣ (ب) ٢س^٢ − ١ (ج) ٤س^٢ − ٢ (د) س + ٢

٣ إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٣ & : س \geq ٢ \\ ٨س & : س < ٢ \end{cases}$ فإنَّ ق$'$(٢)

(أ) تساوي ٨ (ب) تساوي ١١ (ج) غير موجودة (د) ليس مما سبق

٤ إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & : س \neq ١ \\ ٥ & : س = ١ \end{cases}$ فإنَّ ق$'$(١) هي

(أ) ٢ (ب) ٥ (ج) غير موجودة (د) ليس مما سبق

٥ إذا كانت ق(س) = |س − ٢| فإنَّ ق′(٠) هي

(أ) ١ (ب) −١ (ج) صفراً (د) غير موجودة

٦ إذا كانت ق(س) = س |س| فإنَّ ق′(٠)

(أ) تساوي صفراً (ب) تساوي ١ (ج) تساوي (−١) (د) غير موجودة.

٧ إذا كانت ق(س) = $\frac{|س - ١|}{س - ١}$ فإنَّ ق′(١)

(أ) تساوي ١ (ب) تساوي (−١) (ج) غير موجودة (د) ليس مما سبق

٨ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س^٣ - ٨}$ هي

(أ) صفر (ب) −٤ (ج) ١٦ (د) غير موجودة.

٩ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - ١}{س^٢ - ١}$ هي

(أ) ٧ (ب) صفر (ج) $\frac{٧}{٢}$ (د) غير موجودة.

أسئلة مقالية:

• **أجب عن الأسئلة التالية:**

أوجد مشتقة كل من الدوال في الأسئلة من (١) إلى (٨).

١ د(س) = س^٢ − س + ٢

٢ د(س) = − $\sqrt{٢}$

٣ د(س) = ٢س^٣ + ٤π

٤ د(س) = ٦^{٢٠} + س

٥ $ق(ن) = ٤ن^٥ + ٢ن - ١$

٦ $ف(س) = س^٢(س + ١)$

٧ $د(س) = (٣س + ١)(س^٢ - ١)$

٨ $د(ن) = \frac{ن^٢ + ٢ن}{ن}$

في الأسئلة من (٩) إلى (١٢) أوجد مشتقة كل دالة عند النقطة $س_٠$.

٩ $د(س) = س^٢ + ٥$ حيث $س_٠ = ٣$

١٠ $د(س) = س^٣ + ٣س$ حيث $س_٠ = ٢$

١١ $د(س) = ٤س^٣$ حيث $س_٠ = -١$

١٢ $د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٥$ حيث $س_٠ =$ صفر.

١٣ إذا كانت $د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٥$ فأوجد قيم س التي تجعل $د'(س) =$ صفر.

١٤ إذا كانت $د(س) = س^٣ + ٣س + ٢$ فأوجد قيم كل مما يأتي:
$د'(-٣)$ ، $د'(٠)$ ، $د'(٢)$.

١٥ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $د(س) = ٣س^٢ + ٦س$ عند النقطة $س = ١$.

٢-٣ قواعد إضافية لإيجاد المشتقة

Some rules to find differentiating

نظـريـة ٧

مشتقة حاصل ضرب دالتين The derivative of the product of two functions

إذا كانت كل من الدالتين ق ، ك قابلة للاشتقاق عند النقطة س وكانت

ل(س) = ق(س) · ك(س) فإنَّ:

ل′(س) = ق′(س) · ك(س) + ق(س) · ك′(س)

ويعبر عن ذلك بالتالي: مشتقة حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة س تساوي مشتقة الدالة الأولى مضروبة في الدالة الثانية مضافة إليه مشتقة الدالة الثانية مضروبة في الدالة الأولى.

البرهان:

إذا كانت ل(س) = ق(س) · ك(س)

فإنَّ ل′(س) = $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ}$ إن وجدت

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(س + هـ) - ل(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{[ق(س + هـ) \cdot ك(س + هـ)] - ق(س) \cdot ك(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ)\, ك(س + هـ) - ق(س + هـ)\, ك(س) + ق(س + هـ)\, ك(س) - ق(س)\, ك(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \left(ق(س + هـ) \frac{ك(س + هـ) - ك(س)}{هـ} + ك(س) \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} \right)$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} ق(س + هـ) \lim_{هـ \to ٠} \frac{ك(س + هـ) - ك(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} ك(س) \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

= ق(س) · ك′(س) + ك(س) · ق′(س).

∴ ل′(س) = ق(س) · ك′(س) + ك(س) · ق′(س)

ويجب ملاحظة أن الإثبات بسيط وسلس وجاء بإضافة وطرح المقدار ق(س + هـ) · ك(س)، وكذلك استخدام حقيقة أن:

$\lim_{هـ \to ٠}$ ق(س + هـ) = ق(س) (لأن الدالة قابلة للاشتقاق وبالتالي تكون متصلة عند س).

مثال ١

إذا كانت د(س) = (س^{٣} + ٢س^{٢} + ١) (٣س^{٢} − ٥س − ٢)

فأوجد د′(س) ثم عيّن د′(٠)

الحل

نستخدم قاعدة حاصل ضرب دالتين ومشتقة كثيرة الحدود فنحصل على:

د′(س) = (س^{٣} + ٢س^{٢} + ١)′ (٣س^{٢} − ٥س − ٢) + (س^{٣} + ٢س^{٢} + ١) (٣س^{٢} − ٥س − ٢)′

∴ د′(س) = (٣س^{٢} + ٤س) (٣س^{٢} − ٥س − ٢) + (س^{٣} + ٢س^{٢} + ١) (٦س − ٥)

= (٩س^{٤} − ٣س^{٣} − ٢٦س^{٢} − ٨س) + (٦س^{٤} + ٧س^{٣} − ١٠س^{٢} + ٦س − ٥)

= ١٥س^{٤} + ٤س^{٣} − ٣٦س^{٢} − ٢س − ٥

∴ د′(٠) = −٥ ■

تدريب:

يمكن للطالب إيجاد المشتقة د′(س) دون استخدام قاعدة مشتقة حاصل الضرب وذلك بضرب الدالتين ثم إيجاد المشتقة.

ملاحظة:

يمكن تعميم النظرية (٧) في حالة ضرب أكثر من دالتين:

إذا كانت كل من الدوال ق ، ك ، ل قابلة للاشتقاق عند س وكانت:

د(س) = ق(س) · ك(س) · ل(س) فإنّ:

د′(س) = ق′(س) [ك(س) · ل(س)] + ك′(س) [ق(س) · ل(س)]

+ ل′(س) [ق(س) · ك(س)]

. . . وهكذا

مثال ٢

إذا كانت د(س) = س^{٣}(س^{٢} + ٢) (س^{٤} − ١) فأوجد د′(١).

الحل

د′(س) = ٣س^{٢}(س^{٢} + ٢)(س^{٤} − ١) + ٢س(س^{٣})(س^{٤} − ١) + ٤س^{٣}(س^{٣})(س^{٢} + ٢)

∴ د′(١) = ٣(١)^{٢} (١^{٢}+٢) (١^{٤}−١) + ٢(١) (١^{٣}) (١^{٤}−١) + ٤(١^{٣}) (١^{٣}) (١^{٢}+٢)

= ٠ + ٠ + ١٢ = ١٢

نظرية ٨

مشتقة خارج قسمة دالتين **The derivative of the quotient of two functions**

إذا كانت و ، ك دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة س وكانت

ل(س) = $\frac{\text{و(س)}}{\text{ك(س)}}$ حيث ك(س) ≠ ٠

فإن: ل′(س) = $\frac{\text{ك(س) و′(س) − و(س) · ك′(س)}}{\text{[ك(س)]}^{٢}}$

ونعبر عن هذه القاعدة بقولنا «مشتقة ناتج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة س تساوي المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه البسط في مشتقة المقام والكل مقسوم على مربع المقام».

مثال ٣

أوجد ص′ إذا كانت ص = $\frac{\text{٣س − ٥}}{\text{س}^{٢} + ٧}$

الحل

باستخدام قاعدة القسمة نجد أن:

ص′ = $\frac{\text{(س}^{٢} + ٧)\ (٣س − ٥)' − (٣س − ٥)\ (س}^{٢} + ٧)'}{\text{(س}^{٢} + ٧)^{٢}}$

= $\frac{\text{(س}^{٢} + ٧)\ (٣) − (٣س − ٥)\ (٢س)}{\text{(س}^{٢} + ٧)^{٢}}$

= $\frac{\text{− ٣س}^{٢} + ١٠س + ٢١}{\text{(س}^{٢} + ٧)^{٢}}$

مثال ٤

إذا كانت $د(س) = \frac{٣س^٢ + ٢}{س + ١}$ فأوجد $د'(س)$

الحل

$$د'(س) = \frac{(س + ١)(٣س^٢ + ٢)' - (٣س^٢ + ٢)(س + ١)'}{(س + ١)^٢}$$

$$= \frac{(س + ١)(٦س) - (٣س^٢ + ٢)(١)}{(س + ١)^٢}$$

$$= \frac{٦س^٢ + ٦س - ٣س^٢ - ٢}{(س + ١)^٢} = \frac{٣س^٢ + ٦س - ٢}{(س + ١)^٢}$$

نتيجة

إذا كانت $د(س) = \frac{أ}{ك(س)}$ حيث أ عدد ثابت، $ك(س) \neq ٠$ حيث ك قابلة للاشتقاق عند س

فإنَّ $د'(س) = \frac{-أ\, ك'(س)}{[ك(س)]^٢}$

البرهان:

$$\because د(س) = \frac{أ}{ك(س)}$$

$$\therefore د'(س) = \frac{ك(س)\,(أ)' - أ \cdot ك'(س)}{[ك(س)]^٢}$$

$$= \frac{ك(س)(صفر) - أ\, ك'(س)}{[ك(س)]^٢} = \frac{-أ\, ك'(س)}{[ك(س)]^٢}$$

مثال ٥

إذا كانت $د(س) = \frac{٥}{س^٢ + ٢}$ فأوجد $د'(س)$.

الحل

$$د'(س) = \frac{-٥ \times (س^٢ + ٢)'}{(س^٢ + ٢)^٢}$$

$$= \frac{-٥ \times ٢س}{(س^٢ + ٢)^٢}$$

$$= \frac{-١٠س}{(س^٢ + ٢)^٢}$$

نظـريـة ٩

إذا كانت $د(س) = س^{-ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، $س \neq ٠$

فإنَّ $د'(س) = -ن\ س^{-ن-١}$

البرهان:

$$\frac{ء}{ءس}(س^{-ن}) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س^ن}\right) \quad ، \quad س \neq ٠$$

$$= \frac{-١ \times ن\ س^{ن-١}}{(س^ن)^٢} = \frac{-ن\ س^{ن-١}}{س^{٢ن}} = -ن س^{ن-١-٢ن}$$

$$= -ن س^{-ن-١}$$

مثال ٦

إذا كانت $د(س) = س^{-٣}$ فأوجد $د'(س)$

الحل

$$د'(س) = -٣\ س^{-٣-١}$$

$$= -٣\ س^{-٤}$$

$$= \frac{-٣}{س^٤}$$

ملاحظة:

يمكن تعميم النظريتين (٤) ، (٩) للحالة التي تكون فيها القوى أعداداً نسبية لذلك فإنّ:

نظـريـة ١٠

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{س}^{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}}\right) = \frac{\text{م}}{\text{جـ}}\,\text{س}^{\frac{\text{ب}}{\text{جـ}}-١}$$

حيث م ، جـ $\in$ ص ، جـ $\neq$ ٠ لجميع قيم س التي تكون المشتقة عندها موجودة

مثال ٧

إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ فأوجد د′(٤).

الحل

د(س) = $\sqrt{\text{س}}$

د(س) = $\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

د′(س) = $\frac{١}{٢}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore$ د′(٤) = $\frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$

مثال ٨

أوجد ص′ إذا كانت ص = (س + ١) × $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

الحل

ص = (س + ١) × $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

$\therefore$ ص = (س + ١) $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$

ص′ = ١ × $\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ + (س + ١) × $\frac{٢}{٣}\,\text{س}^{-\frac{١}{٣}}$ لماذا؟

ص′ = $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \frac{٢(\text{س} + ١)}{٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}}$

ص′ = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + \frac{٢(\text{س} + ١)}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$

ملاحظة :

إذا كان تعريف الدالة د على يمين نقطة س. يختلف عنه على يسارها، فلا بد من استخدام تعريف المشتقة لحساب د′ (س.) ولإيجاد مشتقة هذه الدالة يجب بحث :

١ الاشتقاق في الفترات المفتوحة.

٢ الاشتقاق عند النقاط التي يتغير عندها التعريف.

مثال ٩

أوجد مشتقة الدالة د : د(س) = س |س|

الحل

نعلم أن |س| = $\begin{cases} \text{س} & : \text{س} > ٠ \\ ٠ & : \text{س} = ٠ \\ -\text{س} & : \text{س} < ٠ \end{cases}$

∴ س|س| = $\begin{cases} \text{س}^٢ & : \text{س} > ٠ \\ ٠ & : \text{س} = ٠ \\ -\text{س}^٢ & : \text{س} < ٠ \end{cases}$

∵ الدالة د: د(س) = س |س| متصلة على ح لأنها حاصل ضرب دالتين كل منهما متصل على ح.

∴ د متصلة عند س = ٠

د′(٠) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$ إن وجدت

$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٠ + \text{هـ})^٢ - (٠)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^٢}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}}$ هـ = ٠ حيث هـ ≠ ٠

∴ د′(٠) = ٠

$$د'_-(٠) = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$$ إن وجدت

$$\underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{-(٠ + هـ)^٢ - (٠)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{-هـ^٢}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} (-هـ) = ٠$$ حيث هـ ≠ ٠

$$\therefore د'_-(٠) = ٠$$

$$\therefore د'_-(٠) = د'_+(٠) = ٠$$

$$\therefore د'(٠) = ٠$$

$$\therefore د'(س) = \begin{cases} ٢س & : س > ٠ \\ ٠ & : س = ٠ \\ -٢س & : س < ٠ \end{cases}$$

مثال ١٠

ابحث مشتقة الدالة:

$$د(س) = \begin{cases} س + ٣ & : س < ٠ \\ س^٢ & : س \geq ٠ \end{cases}$$

ثم أوجد د'(١) ، د'(−٣) ، د'(٠) إن أمكن.

الحل

أولاً – في الفترة (−∞ ، ٠)

$\because د(س) = س + ٣$

$\therefore د'(س) = ١.$

ثانياً – في الفترة (٠ ، ∞)

$\because د(س) = س^٢$

$\therefore د'(س) = ٢س.$

ثالثاً – عند س = ٠

د(٠) = ٠

، $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}$ (س + ٣) = ٣

، $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}$ (س^٢) = ٠

∴ $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}$ د(س) ≠ $\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}$ د(س)

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٠

ولذا فليس لها مشتقة عند س = ٠

∴ د′(س) = { ١ : س < ٠ ، ٢س : س > ٠ }

وبالتالي يكون:

د′(١) = ٢(١) = ٢ ، د′(−٣) = ١ ، د′(٠) غير موجودة.

مثال ١١

ابحث مشتقة الدالة

د(س) = { س^٣ : س ≥ ١ ، ٢س − ١ : س < ١ }

عند س = ١

الحل

نبحث اتصال الدالة عند س = ١

د(١) = (١)^٣ = ١ _____ (١)

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}$ (س^٣) = (١)^٣ = ١ _____ (٢)

$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}$ د(س) = $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}$ (٢س − ١) = (٢ × ١ − ١) = ١ _____ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∴ د متصلة عند س = ١

نبحث اشتقاق الدالة عند س = ١

أولاً – نبحث المشتقة عند س = ١ من اليمين

$$د'_{+}(١) = \underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} \quad \text{إن وجدت}$$

$$\underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١ + ٣هـ + ٣هـ^{٢} + هـ^{٣} - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{هـ(٣ + ٣هـ + هـ^{٢})}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} (٣ + ٣هـ + هـ^{٢}) = ٣ \quad \text{حيث هـ} \neq ٠$$

$$\therefore د'_{+}(١) = ٣$$

ثانياً – نبحث المشتقة عند س = ١ من اليسار

$$د'_{-}(١) = \underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} \quad \text{إن وجدت}$$

$$\underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢هـ + ١ - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢هـ}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} ٢ \quad \text{حيث هـ} \neq ٠$$

$$= ٢$$

$$\therefore د'_{-}(١) = ٢$$

$$\because د'_{+}(١) \neq د'_{-}(١)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ١ ■

تمارين

٢ - ٣

بنود موضوعية:

- في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة.

- إذا كانت ق(س) = ٢س^{٢} ، هـ(س) = س^{٤} فإنَّ:

القائمة ١	القائمة ٢
١ ق′(١) × هـ(١) + ق(١) × هـ′(١) =	أ -٢
٢ $\frac{\text{ق′(١) × هـ(١) - ق(١) × هـ′(١)}}{(\text{هـ(١)})^{٢}}$ =	ب $-\frac{١}{٢}$
٣ $\frac{\text{ق(١) × هـ′(١) - ق′(١) × هـ(١)}}{(\text{هـ(١)})^{٢}}$ =	جـ ٢
	د ٧
	هـ ١٤

- إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & \text{س} \geq ١ \\ ٦ - ٢\text{س} & \text{س} < ١ \end{cases}$

فإنَّ:

القائمة ١	القائمة ٢
٤ ق′$_{+}$(١) هي	أ -٢
٥ ق′$_{-}$(١) هي	ب -١
٦ ق′(١) هي	جـ ٢
٧ ق(١) هي	د ٤
	هـ غير موجودة

● $ق(س) = \begin{cases} \frac{٢}{س} & س > ١ \\ ٣ - س^٢ & س \leq ١ \end{cases}$

فإنّ :

القائمة ١		القائمة ٢
٨ $ق'(١)$	هي	أ ٢
		ب -٢
٩ $ق'(٢)$	هي	جـ $-\frac{١}{٢}$
		د صفر
١٠ $ق'(٠)$	هي	هـ غير موجودة

➤ أسئلة مقالية :

● **أجب عن الأسئلة التالية :**

أوجد مشتقة كل من الدوال في التمارين من (١) إلى (١٤)

١ $د(س) = (س + ١)(٥س - ٢)$

٢ $د(س) = س(س^٢ + ١)$

٣ $د(س) = (٢س + ١)^٢$

٤ $د(س) = س^٤(٢س^٢ + ٧)$

٥ $د(س) = (س^٢ + ١٧)(س^٢ - ٣س + ١)$

٦ $د(س) = \frac{١}{٢س^٢ + ٥}$

٧ $د(س) = \frac{٥}{٥س^٢ - ١}$

٨ $د(س) = \frac{س - ١}{س + ١}$

٩ $د(س) = \frac{٢س^٢ - ٣س + ١}{٢س + ١}$

١٠ $د(س) = \frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س^٤} + ٥س^٣ + ٧$

١١ $د(س) = (٣س)^{-٤}$

١٢ $د(س) = (٣س)^٤$

١٣ $د(س) = -١٠ س^{-\frac{٣}{٥}}$

١٤ $د(س) = (٥س - ٤)^٢$

١٥ إذا كانت $ص = \frac{٣س + ١}{س^٢}$ فأوجد $ص'$ بطريقتين:

أ باستخدام قاعدة الضرب.

ب باستخدام قاعدة القسمة.

١٦ إذا كانت $ص = (١٢س - ١٧)(٥س + ٣)$ فأوجد $ص'$ بطريقتين:

أ باستخدام قاعدة الضرب.

ب بضرب العاملين أولاً.

١٧ إذا كانت $د(س) = \frac{|س|}{س}$ ، $س \neq ٠$ فأوجد $د'(٢)$.

١٨ أوجد مشتقة الدالة:

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & : \quad س < ١ \\ س + ١ & : \quad س \geq ١ \end{cases}$$

١٩ أوجد مشتقة الدالة:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & : \quad س \leq ٢ \\ ٩ - ٣س & : \quad س > ٢ \end{cases}$$

ثم أوجد إن أمكن كل مما يلي:

$ق'(-١)$ ، $ق'(٣)$ ، $ق'(٢)$

٢٠ أوجد مشتقة الدالة:

$$ح(س) = \begin{cases} \sqrt{س} & : \quad ٠ \leq س < ٤ \\ \frac{١٦}{س + |س|} & : \quad س \geq ٤ \end{cases}$$

ثم أوجد إن أمكن كلًّا مما يلي:

$ح'(٤)$ ، $ح'(٠)$ ، $ح'(٨)$.

٢ – ٤ قاعدة التسلسل وتعميم قاعدة القوى

The Chain Rule and The General Power Rule

تمهيد:

درسنا في البنود السابقة طرق اشتقاق بعض الدوال البسيطة والتي منها حاصل ضرب دالتين كما في المثال التالي:

مثال ١

إذا كانت الدالة: د(س) = (٢س^{٢} + ٣س + ١)^{٢} فأوجد د$'$(س)

الحل

يمكن إيجاد المشتقة بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى: باستخدام قاعدة الضرب:

∵ د(س) = (٢س^{٢} + ٣س + ١)(٢س^{٢} + ٣س + ١)

∴ د$'$(س) = (٤س + ٣)(٢س^{٢} + ٣س + ١) + (٤س + ٣)(٢س^{٢} + ٣س + ١)

= ٢(٤س + ٣)(٢س^{٢} + ٣س + ١)

= ١٦س^{٣} + ٣٦س^{٢} + ٢٦س + ٦

الطريقة الثانية: بضرب العاملين أولاً:

د(س) = (٢س^{٢} + ٣س + ١) (٢س^{٢} + ٣س + ١)

= ٤س^{٤} + ١٢س^{٣} + ١٣س^{٢} + ٦س + ١

∴ د$'$(س) = ١٦س^{٣} + ٣٦س^{٢} + ٢٦س + ٦ ■

نلاحظ أن كلًّا من الطريقتين احتاجت إلى عمليات حسابية مطولة. وبالطبع فإنَّ العمليات تكون أكثر تعقيداً وطولاً لو أن قوة المقدار كانت أكبر من ٢، كأن توجد مشتقة الدالة:

د(س) = (٢س^{٢} − ٤س + ١)^{٧} مثلاً،

فإننا بحاجة هنا إلى ضرب المقدار ٢س^{٢} − ٤س + ١ في نفسه سبع مرات ومن ثم إيجاد مشتقة كثيرة الحدود الناتجة التي درجتها ١٤.

يتضح مما سبق أن أيًا من الطريقتين غير عملية لإيجاد مشتقة بعض الدوال، ويكثر فيها احتمال

الخطأ وتزداد تعقيداً كلما كبرت القوة. وكذلك فإنَّ أيًا من القواعد السابقة لا تساعدنا على إيجاد مشتقة دالة مثل: $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ ، . . . وغيرها.

ولذلك فلا بد إذن من البحث عن طرق أخرى وحل أبسط وأفضل لمثل هذه الدوال، وهذا ما توفره لنا النظرية التالية والتي تسمى بقاعدة التسلسل والتي تعتمد أساساً على فكرة تركيب دالتين.

فلو فرضنا أن ق ، ك دالتان حيث ك لها مشتقة عند س ، ق لها مشتقة عند ك(س) فإنَّ الدالة المركبة ق(ك(س)) تكون لها مشتقة عند س وتكون مشتقتها كالتالي:

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\text{ق}(\text{ك}(\text{س}))\right] = \text{ق}'(\text{ك}(\text{س})) \cdot \text{ك}'(\text{س}).$$

نظرية ١١

قاعدة التسلسل Chain Rule

إذا كانت الدالتان ق ، ك قابلتين للتركيب وكانت الدالة ك قابلة للاشتقاق عند النقطة س وكانت الدالة ق قابلة للاشتقاق عند ك(س) فإنَّ الدالة المركبة ق ∘ ك تكون قابلة للاشتقاق عند س ويكون:

$$(\text{ق} \circ \text{ك})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{ك}(\text{س})) \cdot \text{ك}'(\text{س})$$

فلو فرضنا أن الدالة ل(س) = ق(ك(س)) فإنَّ المشتقة ل′(س) يمكن إيجادها، أولاً بإيجاد مشتقة الدالة ق ومن ثم التعويض عن كل س في المشتقة ق′(س) بالدالة ك(س) وضرب الناتج في ك′(س).

مثال ٢

إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س − ١ ، ك(س) = س^{٢} + ٥

فأوجد (ق ∘ ك)′(س) ثم احسب (ق ∘ ك)′(١)

الحل

(ق ∘ ك)′(س) = ق′(ك(س)) · ك′(س)

ق′(س) = ٦س + ٢ ، ك′ = ٢س

ق′(ك(س)) = ق′(س^{٢} + ٥) = ٦(س^{٢} + ٥) + ٢

= ٦س^{٢} + ٣٢

$\therefore$ $(\text{ق} \circ \text{ك})'(\text{س}) = (٦\text{س}^{٢} + ٣٢) \times ٢\text{س}$

$= ١٢\text{س}^{٣} + ٦٤\text{س}$

وبالتعويض عن س = ١

$\therefore$ $(\text{ق} \circ \text{ك})'(١) = ١٢(١)^{٣} + ٦٤(١)$

$= ٧٦$

مثال ٣

إذا كانت $\text{ل}(\text{س}) = (٢\text{س} + ٣)^{٢٠}$ فأوجد $\text{ل}'(\text{س})$.

الحل

نفرض أن $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{ك}(\text{س}))$

حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢٠}$ ، $\text{ك}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٣$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢٠\,\text{س}^{١٩}$

، $\text{ك}'(\text{س}) = ٢$

وباستخدام قاعدة التسلسل ينتج أن:

$\text{ل}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{ك}(\text{س})) \cdot \text{ك}'(\text{س})$

$= ٢٠\,(٢\text{س} + ٣)^{١٩}\,(٢)$

$= ٤٠\,(٢\text{س} + ٣)^{١٩}$

مثال ٤

إذا كانت $\text{ل}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ فأوجد $\text{ل}'(\text{س})$.

الحل

$\because$ $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{ك}(\text{س})) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$

حيث $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ك}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ، $\text{ك}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

وباستخدام قاعدة التسلسل ينتج أن:

$$\text{ل}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{ك}(\text{س})) \cdot \text{ك}'(\text{س})$$

$$= \text{ق}'(\text{س}^{٢} + ١) \cdot \text{ك}'(\text{س})$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}} \cdot (٢\text{س})$$

$$= \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$$

صورة أخرى لقاعدة التسلسل:

إذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{ع})$ ، $\text{ع} = \text{ك}(\text{س})$

فإنَّ $\text{ص} = \text{ق}(\text{ك}(\text{س}))$

ولإيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فإنَّ المسألة هنا تؤول إلى تركيب دالتين

$\therefore \text{ص} = \text{ق}(\text{ك}(\text{س}))$

، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{ك}(\text{س})) \cdot \text{ك}'(\text{س})$

ولكن $\text{ع} = \text{ك}(\text{س}) \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{ك}'(\text{س})$

، $\text{ص} = \text{ق}(\text{ع}) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \text{ق}'(\text{ع})$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{ع}) \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

إذن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

وهذه الصورة أكثر استخداماً وشيوعاً.

مثال ٥

إذا علمت أن $\text{ص} = ٥\text{ع}^{٢} + ٣$ ، $\text{ع} = \frac{٢}{\text{س}}$ فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$$\text{ص} = ٥\text{ع}^{٢} + ٣ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = ١٠\text{ع}$$

$$\text{ع} = \frac{٢}{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = -\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٠\text{ع} \times \frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$$

$$= ١٠ \left(\frac{٢}{\text{س}}\right) \left(-\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)$$

$$= -\frac{٤٠}{\text{س}^{٣}}$$

مثال ٦

إذا كانت $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)^{١٠٠}$ فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

نفرض أن $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ١$

ولذلك فإنَّ $\text{ص} = \text{ع}^{١٠٠}$

وباستخدام الصيغة $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ ينتج أن:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٠٠\text{ع}^{٩٩} (٢\text{س})$$

$$= ١٠٠(\text{س}^{٢} + ١)^{٩٩} (٢\text{س})$$

$$= ٢٠٠\text{س} (\text{س}^{٢} + ١)^{٩٩}$$

تعميم قاعدة القوى generalization power rule

في كثير من الأحيان نحتاج لإيجاد مشتقة دالة ما على الشكل $[ك(س)]^{ر}$ ، حيث ر عدد نسبي كما ورد في المثال (٣)، ولذلك فسوف نوجد قاعدة عامة لمشتقة الدالة من هذا النوع.

نفرض أن $ص = [ك(س)]^{ر}$ ..... (١)

وأن $ع = ك(س)$ ..... (٢)

إذن $ص = ع^{ر}$ ..... (٣)

وباستخدام قاعدة التسلسل فإنَّ:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس}[ك(س)]^{ر} = \frac{دص}{دع} \cdot \frac{دع}{دس}$$ ..... (٤)

، $\frac{دص}{دع} = \frac{د}{دع}[ع^{ر}] = ر ع^{ر-١}$

$= ر[ك(س)]^{ر-١}$ ..... (٥)

، $\frac{دع}{دس} = ك'(س)$ ..... (٦)

وبالتعويض من (٥) ، (٦) في (٤) نجد أن:

$$\frac{دص}{دس} = ر[ك(س)]^{ر-١} \cdot ك'(س)$$

وهي القاعدة العامة المطلوبة.

قاعدة

إذا كانت ك(س) قابلة للاشتقاق وكان ر عدد نسبي فإنَّ:

$$\frac{د}{دس}[ك(س)]^{ر} = ر[ك(س)]^{ر-١} \cdot ك'(س)$$ ..... (٧)

بشرط أن تكون المشتقة موجودة.

ويمكن إعادة كتابة ذلك بصيغة أخرى كالتالي:

$$\frac{د}{دس}[ع^{ر}] = ر ع^{ر-١} \frac{دع}{دس}$$

مثال ٧

أوجد مشتقة الدالة ل(س) = $\sqrt{٢س^٣ + ٤س}$ ، باستخدام القاعدة العامة .

الحل

$$ل'(س) = \left(\sqrt{٢س^٣ + ٤س}\right)' = \left[(٢س^٣ + ٤س)^{\frac{١}{٢}}\right]'$$

$$= \frac{١}{٢}(٢س^٣ + ٤س)^{-\frac{١}{٢}}(٢س^٣ + ٤س)'$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٢س^٣ + ٤س}} \cdot (٦س^٢ + ٤)$$

$$= \frac{(٣س^٢ + ٢)}{\sqrt{٢س^٣ + ٤س}}$$

مثال ٨

إذا كانت ص = $(س^٢ + ١)^٤(س^٣ - ٢)^٥$ فأوجد ص'

الحل

باستخدام قاعدة الضرب:

$$ص' = (س^٢ + ١)^٤[(س^٣ - ٢)^٥]' + [(س^٢ + ١)^٤]'(س^٣ - ٢)^٥$$

وباستخدام قاعدة التسلسل فإنَّ:

$$[(س^٣ - ٢)^٥]' = ٥(س^٣ - ٢)^٤(س^٣ - ٢)'$$

$$= ٥(س^٣ - ٢)^٤(٣س^٢)$$

$$= ١٥س^٢(س^٣ - ٢)^٤$$

وبالمثل فإنَّ:

$$[(س^٢ + ١)^٤]' = ٤(س^٢ + ١)^٣(س^٢ + ١)'$$

$$= ٤(س^٢ + ١)^٣(٢س)$$

$$= ٨س(س^٢ + ١)^٣$$

وعليه فإنَّ:

$$ص' = (س^٢ + ١)^٤ \times ١٥س^٢(س^٣ - ٢)^٤ + (س^٣ - ٢)^٥ \times ٨س(س^٢ + ١)^٣$$

$$= (س^٣ - ٢)^٤(س^٢ + ١)^٣[(س^٢ + ١)(١٥س^٢) + (س^٣ - ٢)(٨س)]$$

$$= (س^٣ - ٢)^٤(س^٢ + ١)^٣(١٥س^٤ + ١٥س^٢ + ٨س^٤ - ١٦س)$$

$$= (س^٣ - ٢)^٤(س^٢ + ١)^٣(٢٣س^٤ + ١٥س^٢ - ١٦س)$$

مثال ٩

إذا كانت $ص = \left(\frac{س}{س - ٢}\right)^{\frac{١}{٣}}$ فأوجد $\frac{وص}{وس}$ عند $س = ١$

الحل

$$\frac{وص}{وس} = \left[\left(\frac{س}{س - ٢}\right)^{\frac{١}{٣}}\right]'$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{س}{س - ٢}\right)^{-\frac{٢}{٣}}\left(\frac{س}{س - ٢}\right)'$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{س}{س - ٢}\right)^{-\frac{٢}{٣}}\left(\frac{(١)(س - ٢) - س(١)}{(س - ٢)^٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\frac{س}{س - ٢}\right)^{-\frac{٢}{٣}}\left(\frac{-٢}{(س - ٢)^٢}\right)$$

عند $س = ١$

$$\frac{وص}{وس} = \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{١ - ٢}\right)^{-\frac{٢}{٣}}\left(\frac{-٢}{(١ - ٢)^٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٣}(١)(-٢)$$

$$= \frac{-٢}{٣}$$

تمارين

٢ - ٤

في التمارين من (١) حتى (١٤) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

١ $\text{ص} = (\text{٢س}^{٢} + ٣)^{١٠}$

٢ $\text{ص} = (\text{س}^{٣} + ١)^{٢٠}$

٣ $\text{ص} = \sqrt{١ - \text{س}}$

٤ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٢س} + ١}$

٥ $\text{ص} = (٤ - \text{س}^{٢})^{-٨}$

٦ $\text{ص} = \text{س}^{٢}\sqrt{\text{٥س} + ١}$

٧ $\text{ص} = (٤ - \text{س})^{١٠}(\text{٥س} + ١)^{٦}$

٨ $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)^{٨}(\text{٢س}^{٣})^{٢}$

٩ $\text{ص} = \frac{١}{(\text{٢س}^{٣} + ٤)^{\frac{١}{٢}}}$

١٠ $\text{ص} = \text{س}^{٢}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}$

١١ $\text{ص} = \left(\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}\right)^{٥}$

١٢ $\text{ص} = \sqrt[٣]{\frac{\text{س}^{٢} - ٥}{\text{س} + ٢}}$

١٣ $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{٤س} - ٢}}$

١٤ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٥}}(\text{٢س}^{٢} + ٣)^{٢}$

١٥ إذا كانت $\text{ص} = (١ - \text{٣س}^{٢})^{٢}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{س} = ١$.

١٦ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $\text{د(س)} = (\text{٢س}^{٣} + \text{س})^{-٣}$ عند $\text{س} = ١$.

١٧ إذا كانت $\text{ص} = \text{٥ع}^{٣} + ١$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{س} - ١}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{ع} = ١$.

١٨ إذا كانت $\text{ق(س)} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{٢س} + ٣}$ أوجد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(-١)$.

٢ – ٥ الاشتقاق الضمني

Implicit differentiation

درسنا في البنود السابقة إيجاد مشتقة الدالة التي تعطى على الصورة ص = د(س)، فمثلاً مشتقة الدالة ص = س^{٢} + ٥س هي $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ = ٢س + ٥، وكذلك لو درسنا المعادلة س ص – ص = ٦ للاحظنا أنه بالإمكان إعادة كتابة هذه المعادلة لتكون ص = $\frac{٦}{\text{س} - ١}$ أي على الصورة ص = د(س).

إن هذه الصورة للمعادلة تعرف المتغير ص بدلالة المتغير س صراحة ولذلك يمكن إيجاد المشتقة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بإحدى القواعد السابقة، ولكن كيف نوجد $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ في الحالات التي يصعب فيها أو ربما من الاستحالة حل المعادلة لإيجاد قيمة ص صراحة بدلالة س، فمثلاً في المعادلة:

س ص^{٥} + ص^{٣} – س ص + ٥ = صفر.

نلاحظ أنه من الصعب إيجاد قيمة ص كدالة صريحة في المتغير س، وهناك الكثير من الحالات التي نحتاج فيها إلى إيجاد مشتقة دوال لا يمكن كتابتها إلا في صورة دوال غير صريحة وتسمى بالدوال الضمنية. وتسمى الطريقة التي نوجد بها المشتقة دون إعادة كتابة الدالة كدالة صريحة في المتغير س بالاشتقاق الضمني.

مثال ١

أوجد $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ حيث ص^{٣} + ٢ص^{٢} – س^{٢} + ١ = صفر

الحل

إننا في هذه الحالة نعامل المتغير ص كدالة غير معروفة بالنسبة للمتغير س ولتكن ص = د(س)، وبالتعويض عن ذلك في المعادلة المعطاة نجد أن:

[د(س)]^{٣} + ٢ [د(س)]^{٢} – س^{٢} + ١ = ٠

وبإجراء عملية اشتقاق طرفي المعادلة، مع استخدام قاعدة التسلسل نجد أن:

٣ [د(س)]^{٢} · د′(س) + ٤ [د(س)] د′(س) – ٣س^{٢} = ٠

ويمكن إعادة كتابة ذلك كالتالي:

٣ص^{٢}ص′ + ٤ ص ص′ – ٣س^{٢} = ٠

وبالإمكان حل تلك المعادلة للحصول على قيمة ص'

$\therefore$ (٣ص^{٢} + ٤ص) ص' = ٣س^{٢}

$\therefore$ ص' = $\frac{٣س^{٢}}{٣ص^{٢} + ٤ص}$

مثال ٢

إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} = ١ فأوجد ص'.

الحل

كما في المثال (١) نوجد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير س كالآتي:

$\frac{د}{دس}$ (س^{٢}) + $\frac{د}{دس}$ (ص^{٢}) = $\frac{د}{دس}$ (١) _____ (١)

٢س + ٢ص ص' = ٠ = ٠ $\Leftarrow$ ص ص' = −س

وعليه فإنَّ ص' = $\frac{-س}{ص}$ ، حيث ص $\neq$ ٠

مثال ٣

إذا كانت ٢ص^{٢} − ٥س ص = ٣س^{٢} فأوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

بالاشتقاق الضمني:

$\frac{د}{دس}$ (٢ص^{٢}) − $\frac{د}{دس}$ (٥س ص) = $\frac{د}{دس}$ (٣س^{٢})

٤ص $\frac{دص}{دس}$ − ٥ $\left(١ \cdot ص + س \frac{دص}{دس}\right)$ = ٦س

(٤ص − ٥س) $\frac{دص}{دس}$ = ٦س + ٥ص

$\therefore$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٥ص + ٦س}{٤ص - ٥س}$

مثال ٤

أوجد ميل المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = س ص + ١$ عند النقطة (١ ، ١).

الحل

بالاشتقاق الضمني:

$٢س + ٢ص\ ص' = س\ ص' + ص \times ١$

$(٢ص - س)\ ص' = ص - ٢س$

$$ص' = \frac{ص - ٢س}{٢ص - س}$$

$\therefore$ ميل المماس عند النقطة (١ ، ١) هو $ص' = \frac{١ - ٢}{١ - ٢} = -١$

تمارين

٢ - ٥

في التمارين من ١ إلى ١٠ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

١ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{س} + \text{ص}$

٢ $\text{س}^{٢}\text{ص} = ٤\text{س} + ١$

٣ $٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}\text{ص} = ١ - \text{ص}^{٣}$

٤ $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ١٠٠$

٥ $(\text{ص} + ١)^{٥} = ٣\text{س} + ٣$

٦ $\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}} = ٢$

٧ $\text{س}^{٢} + \sqrt{\text{س}\text{ص}} = ٧$

٨ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

٩ $\text{ص} = \sqrt{٣\text{س}^{٢} - ٥}$

١٠ $\text{ص} = \sqrt[٣]{٤\text{س} + ٢}$

١١ أوجد ميل المماس للمنحنى $\text{س}^{٢}\text{ص} = ٣$ عند النقطة (١ ، ٣).

١٢ أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س} - ٤\text{ص} = ٥$ عند النقطة (٢ ، -١).

٢-٦ المشتقات ذات الرتب العليا

High order Derivatives

إن مشتقة أي دالة د تعطي دالة أخرى د′، فإذا كان للدالة د′ مشتقة فنرمز لها بالرمز د″ وتسمى المشتقة الثانية للدالة د، وهكذا فإنَّ:

$$د''(س) = \frac{ء}{ءس}[د'(س)] = \frac{ء}{ءس}\left[\frac{ء}{ءس}(د(س))\right]$$

ويمكن أن نرمز لذلك بالرمز $\frac{ء^٢}{ءس^٢}$ ويقرأ «دال اثنين على دال سين تربيع»، وبنفس الطريقة فإنَّ المشتقة الثالثة د‴ هي مشتقة المشتقة الثانية، وبالتحديد فإنَّ:

$$د'''(س) = \frac{ء}{ءس}[د''(س)] = \frac{ء}{ءس}\left[\frac{ء^٢}{ءس^٢}(د(س))\right]$$

ويمكن أن يرمز لذلك بالرمز $\frac{ء^٣}{ءس^٣}$ ويقرأ «دال ثلاثة على دال سين تكعيب» وهكذا. . .

وعلى وجه العموم إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإنَّ $د^{(ن)}$ ترمز للمشتقة النونية للدالة د ويمكن إيجاد ذلك باشتقاق د عدد ن من المرات.

وباستعمال رمز الاشتقاق فإنَّ:

$$د^{(ن)}(س) = \frac{ء^ن}{ءس^ن}(د(س))$$

ويسمى العدد الصحيح ن رتبة المشتقة.

وتوجد صيغاً مختلفة تستخدم للمشتقات ذات الرتب العليا للدالة: ص = د(س) وهي ما يلي:

١ $د'(س)$ ، $د''(س)$ ، $د'''(س)$ ، $د^{(٤)}(س)$ ، . . . ، $د^{(ن)}(س)$

٢ $ص'$ ، $ص''$ ، $ص'''$ ، $ص^{(٤)}$ ، . . . $ص^{(ن)}$

٣ $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ ، $\frac{ء^٤ص}{ءس^٤}$ ، . . . ، $\frac{ء^ن ص}{ءس^ن}$

مثال ١

إذا كانت ص = $س^٣$ + ٢$س^٢$ − ٨س + ٧ فأوجد المشتقة الثالثة لهذه الدالة بالنسبة للمتغير س .

الحل

لإيجاد المشتقة الثالثة للدالة فإنه لا بد لنا من إيجاد كل من المشتقة الأولى والمشتقة الثانية .

∵ ص = $س^٣$ + ٢$س^٢$ − ٨س + ٧

∴ ص′ = ٣$س^٢$ + ٤س − ٨

، ص″ = ٦س + ٤

ص‴ = ٦

مثال ٢

إذا كانت د(س) = $س^٢$ − $\frac{١}{س}$ + ٨ فأوجد مشتقاتها الأربع الأولى .

الحل

∵ د(س) = $س^٢$ − $\frac{١}{س}$ + ٨

∴ د′(س) = ٢س + $\frac{١}{س^٢}$

، د″(س) = ٢ − $\frac{٢}{س^٣}$

، د‴(س) = $\frac{٦}{س^٤}$

، $د^{(٤)}$(س) = $\frac{-٢٤}{س^٥}$

مثال ٣

إذا كانت $ص^{٢} + ٢ص - س^{٢} = س + ١$ فأوجد $ص''$

الحل

باستخدام الاشتقاق الضمني نجد أن:

$$٢ص\, ص' + ٢ص' - ٢س = ١$$

$$(٢ص + ٢)\, ص' = ١ + ٢س$$

$$\therefore\ ص' = \frac{١ + ٢س}{٢ + ٢ص} = \frac{١ + ٢س}{٢(١ + ص)}$$

ولإيجاد $ص''$ نستخدم قاعدة مشتقة قسمة دالتين.

$$\therefore\ ص'' = \frac{٢(ص + ١)(٢) - (٢س + ١)٢ص'}{٤(ص + ١)^{٢}}$$

وبالتعويض عن $ص'$ ينتج أن:

$$ص'' = \frac{٤(ص + ١) - ٢(٢س + ١)\dfrac{٢س + ١}{٢(ص + ١)}}{٤(ص + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٤(ص + ١)^{٢} - (٢س + ١)^{٢}}{٤(ص + ١)^{٣}}$$

وهنالك الكثير من التطبيقات الرياضية والفيزيائية للمشتقات ذات الرتب العليا وسنناقش بعضها في الفصل القادم.

تمارين

٢ - ٦

في التمارين من ١ - ١٠ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

١ $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٣} + \text{س} - ٢$

٢ $\text{ص} = (٣\text{س} - ١)(٣\text{س} + ١)$

٣ $\text{ص} = \frac{٢}{\text{س} + ١}$

٤ $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

٥ $\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} + ١}$

٦ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١$

٧ $\sqrt{\text{س}\text{ص}} - \text{ص} + \text{س} = ٠$

٨ $\text{ص} + ٢\sqrt{\text{ص}} = \text{س}$

٩ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = ١$

١٠ $\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = ١$

أوجد المشتقات الثلاث الأولى في التمارين ١١ - ١٦

١١ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

١٢ $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{١ + \text{س}}$

١٣ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٥}{٢}}$

١٤ $\text{د}(\text{س}) = (١ + \sqrt{\text{س}})^{٢}$

١٥ $\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$

١٦ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}$

١٧ إذا كانت $\text{ص} = \sqrt{١ - ٢\text{س}}$ فأثبت أن $\text{ص ص}'' + \text{ص}'^{٢} = ٠$

١٨ إذا كانت $\text{ص} = \sqrt[٣]{٢\text{س} + ١}$ فأوجد $\text{ص}'$ عندما $\text{س} = ٠$

١٩ إذا كانت $\text{س ص}^{٢} = \text{س}^{٣} - ٦$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة (٢ ، ١)

٢ - ٧ ملخص وتمارين عامة

١ ميل المماس (أو ميل منحنى الدالة) = $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

٢ لتكن الدالة د معرفة في (أ ، ب) ، $س_٠ \in$ (أ ، ب) فإنَّ:

$د'(س_٠) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ}$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

٣ المشتقة من اليمين يرمز لها بالرمز $د'_{+}(س_٠)$ وهي:

$$\underset{هـ \to ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ}$$

والمشتقة من اليسار يرمز لها بالرمز $د'_{-}(س_٠)$ وهي:

$$\underset{هـ \to ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{د(س_٠ + هـ) - د(س_٠)}{هـ}$$

٤ $د'(س) = \underset{\Delta س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

٥ $د'(س_٠) = \underset{س \to س_٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س) - د(س_٠)}{س - س_٠}$ بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

٦ إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند النقطة $س_٠$ فإنَّ د تكون متصلة عند هذه النقطة.

٧ إذا كانت الدالة د ليست متصلة عند $س_٠$ فإنَّ $د'(س_٠)$ ليست موجودة.

٨
* إذا كانت د(س) = حـ حيث حـ عدد ثابت فإنَّ $د'(س) = ٠ \quad \forall س \in ح$.
* إذا كان د(س) = س فإنَّ $د'(س) = ١$
* إذا كانت $د(س) = س^{ن}$ حيث $ن \in ك$ (مجموعة الأعداد النسبية) فإنَّ $د'(س) = ن س^{ن-١}$.

* إذا كانت د(س) = حـ · ق(س) حيث حـ ∈ ح وكانت ق قابلة للاشتقاق فإنَّ د′(س) = حـ · ق′(س).

* إذا كانت ق ، ك دالتين قابلتين للاشتقاق عند النقطة س فإنَّ:

أ الدالة ل(س) = ق(س) + ك(س) قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

ويكون (ق(س) + ك(س))′ = ق′(س) + ك′(س).

ب الدالة ل(س) = ق(س) − ك(س) قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة

ويكون (ق(س) − ك(س))′ = ق′(س) − ك′(س).

جـ الدالة ل(س) = ق(س) · ك(س) قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.

ويكون ل′(س) = ق′(س) · ك(س) + ق(س) · ك′(س).

د الدالة ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ك(س)}}$ (حيث ك(س) ≠ ٠)

يكون ل′(س) = $\frac{\text{ك(س) ق′(س) − ق(س) ك′(س)}}{(\text{ك(س)})^{٢}}$

* إذا كانت د(س): $\frac{\text{أ}}{\text{ك(س)}}$ حيث أ عدد ثابت، ك(س) ≠ ٠ ، ك′(س) موجودة.

فإنَّ د′(س) = $\frac{\text{− أ ك′(س)}}{(\text{ك(س)})^{٢}}$

٩ إذا كانت الدالتان ق ، ك قابلتين للتركيب وكانت الدالة ك قابلة للاشتقاق عند النقطة س وكانت الدالة ق قابلة للاشتقاق عند ك(س) فإنَّ الدالة المركبة ق ∘ ك تكون قابلة للاشتقاق عند س ويكون:

(ق ∘ ك)′(س) = ق′(ك(س)) · ك′(س).

١٠ إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = ك(س) فإنَّ:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

١١ إذا كانت ع قابلة للاشتقاق وكان ر عدداً نسبياً فإنَّ :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\text{ع}^{\text{ر}}\right] = \text{ر}\ \text{ع}^{\text{ر}-١}\ \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

١٢ من الصيغ المختلفة التي تستخدم للمشتقات ذات الرتب العليا للدالة ص = د(س) .

د′(س) ، د″(س) ، د‴(س) ، د(٤)(س) ، . . . . ، د(ن)(س) .

ص′ ، ص″ ، ص‴ ، ص(٤) ، . . . . ، ص(ن)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \text{ ، } \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} \text{ ، } \frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} \text{ ، . . . . ، } \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}}$$

تمارين عامة

٢ - ٧

بنود موضوعية:

• **أولاً:** ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة في كل مما يلي:

١ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س ص}^{٢}) = \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{س ص ص}'$.

٢ إذا كان $\text{س}^{٣}\,\text{ص} = ٣$ فإنَّ ميل مماس المنحنى عند س = ١ يساوي −٩

٣ إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

٤ إذا كان $\sqrt{\text{س ص}} = \text{س}$ فإنَّ $\text{ص}' = \frac{١}{٢\text{ص}}$.

٥ إذا كان $\sqrt{\text{ص}} = \text{س}$ فإنَّ $\text{ص}'' = ٤\text{ص}$.

٦ إذا كان $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = ٥$ فإنَّ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٣ ، ٤) يساوي $\frac{٣}{٤}$

٧ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\sqrt{١ - ٤\text{س}^{٢}}\right) = \frac{-٤\text{س}}{\sqrt{١ - ٤\text{س}^{٢}}}$

• **ثانياً:** لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = (٣\text{س}^{٢} - ١)^{٢}$ فإنَّ $\text{ق}''(١)$:

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (ج) ٤٨ (د) ٩٦

٢ إذا كان $\text{ص}^{٢} = ٣\text{س}^{٢} - ٥$ فإنَّ $\text{ص}' =$

(أ) $\frac{٣\text{س}}{\text{ص}}$ (ب) $\frac{\text{ص}}{٣\text{س}}$ (ج) ٦س (د) $\frac{-٣\text{س}}{\text{ص}}$.

٣ إذا كان $\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢} = ١$ فإنَّ ميل المماس للمنحنى عندما ص = ١ يساوي

(أ) ١ (ب) −١ (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) $-\frac{٣}{٢}$

٤ إذا كان ص = $(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٤}$ فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$

(أ) $٤(٢\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٣}$ (ب) $٨(\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٣}$

(ج) $٦(\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٣}$ (د) $٤(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٣}$

٥ إذا كانت ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ فإنَّ ق′(١) =

(أ) ١ (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) -١

٦ إذا كان ص = $\frac{٢}{\text{ع} + ١}$ ، س = ع + ١ فإنَّ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$

(أ) $\frac{٢}{\text{س}}$ (ب) $\frac{-٢}{\text{س}}$ (ج) $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ (د) -٢س

٧ إذا كانت ق(س) = $-\text{س}^{٢}$ ، هـ(٢) = ١ ، هـ′(٢) = $\frac{١}{٢}$

فإنَّ (ق ○ هـ)′(٢) =

(أ) ١ (ب) -١ (ج) -٢ (د) $-\frac{١}{٢}$

٨ إذا كانت ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، هـ(س) = $\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ فإنَّ:

(ق ○ هـ)′(٢) هي

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (ج) صفر (د) غير موجودة.

٩ إذا كانت ص = $\frac{١}{\text{س}}$ فإنَّ ص ص″ − ٢ (ص′)^{٢} =

(أ) صفراً (ب) ١ (ج) -١ (د) ٢

١٠ إذا كانت هـ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ فإنَّ (هـ ○ هـ′)′(س) =

(أ) ٢س (ب) -٢س (ج) $-\text{س}^{٢}$ (د) $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$

• **ثالثاً:** في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة:

القائمة ١	القائمة ٢
١ إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ٢$ فإنّ $ص' =$	أ $-\left(\frac{س}{ص}\right)^٢$
	ب $\frac{ص}{س}$
٢ إذا كان $س^٢ ص^٢ = ٢$ فإنّ $ص' =$	جـ $-\frac{س}{ص}$
٣ إذا كان $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$ فإنّ $ص' =$	د $-\left(\frac{ص}{س}\right)^٢$
	هـ $\frac{-ص}{س}$
٤ إذا كان $ص = \sqrt{\frac{١}{س - ١}}$ فإنّ $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ٢$ يساوي	أ $-\frac{١}{٢}$
	ب -١
٥ إذا كان $ص = \sqrt{س + \frac{١}{س}}$ فإنّ $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$ يساوي	جـ صفر
	د $\frac{١}{٢}$
٦ إذا كان $ص = ٢\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$ فإنّ $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$ يساوي	هـ ١

أسئلة مقالية:

- **أجب عن الأسئلة التالية**

* باستخدام تعريف المشتقة فقط أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل دالة في التمارين ١ - ٤ .

١ $\text{ص} = ٦\text{س} - ٢$

٢ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} + ١}$

٣ $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٢}$

٤ $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{\text{س} + ١}}$

* في التمارين ٥ - ١٦ أوجد مشتقة كل من الدوال المعطاة.

٥ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{٢\text{س} - ٧}$

٦ $\text{ص} = \frac{\sqrt{\text{س}}}{١ + \sqrt{\text{س}}}$

٧ $\text{ص} = \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س}^٣ + ١}$

٨ $\text{د}(\text{ن}) = \left(\text{ن} + \frac{١}{\text{ن}}\right)^٥$

٩ $\text{ق}(\text{ن}) = (\text{ن}^{-٢} - \text{ن}^{-٣})^{-١}$

١٠ $\text{د}(\text{ن}) = (\text{ن}^٢ - \text{ن}^{-٢})^{-٢}$

١١ $\text{ص} = \sqrt[٥]{(٣\text{س} + ١)^٤}$

١٢ $\text{د}(\text{س}) = ٦\text{س}^٢ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٢}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$

١٣ $\text{ق}(\text{ن}) = \sqrt{\text{ن}^٢ + \text{ن}}\ \sqrt[٣]{٤\text{ن} - ٩}$

١٤ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\frac{٥\text{س} + ٢}{٧\text{س} - ٦}}$

١٥ $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^٣}(\text{س}^{-٣} - ٢\text{س}^{-١} + ٢)^٢$

١٦ $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ + \text{أ}^٢}$ ، أ (ثابت)

* في التمارين ١٧ - ٢٠ ، أوجد ص′ ، ص″ ، ص‴

١٧ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س} + ١}$

١٨ $\text{ص} = \sqrt{١ + ٢\text{س}}$

١٩ $\text{ص} = ٢\text{س}^٣ + ٤\sqrt{\text{س}}$

٢٠ $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^٢}$

* في التمارين ٢١ – ٢٣ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة ع

٢١ $\text{٢س}^{٣} + \text{٤س ص} + \text{س}^{٢} = ٧$ ، ع (١ ، ١)

٢٢ $\text{س}^{٢} + \frac{\text{٢س ص}}{\pi} = ٣$ ، ع (١ ، π)

٢٣ $\text{س}^{٣}\text{ص} + \text{ص}^{٤} = ٢$ ، ع (١ ، ١)

* **٢٤** إذا كانت د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ فأوجد الصيغة العامة للمشتقة $\text{د}^{(\text{ن})}$(س) ، حيث ن عدد صحيح موجب. ما قيمة $\text{د}^{(\text{ن})}$(١)؟

* **٢٥** إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ فأوجد الصيغة العامة للمشتقة $\text{د}^{(\text{ن})}$(س) ، حيث ن عدد صحيح موجب.

تطبيقات هندسية ورياضية على الاشتقاق

الفصل الثالث

٣ - ١ المماسات والأعمدة.

٣ - ٢ المعدلات الزمنية المرتبطة (معدلات التغير المترابطة)

٣ - ٣ أ القيم الصغرى والقيم العظمى.

٣ - ٣ ب القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية.

٣ - ٤ التقعر ونقط الانعطاف.

٣ - ٥ رسم بيان الدالة الحدودية.

٣ - ٦ تطبيقات عملية للقيم العظمى أو الصغرى.

٣ - ٧ ملخص وتمارين عامة.

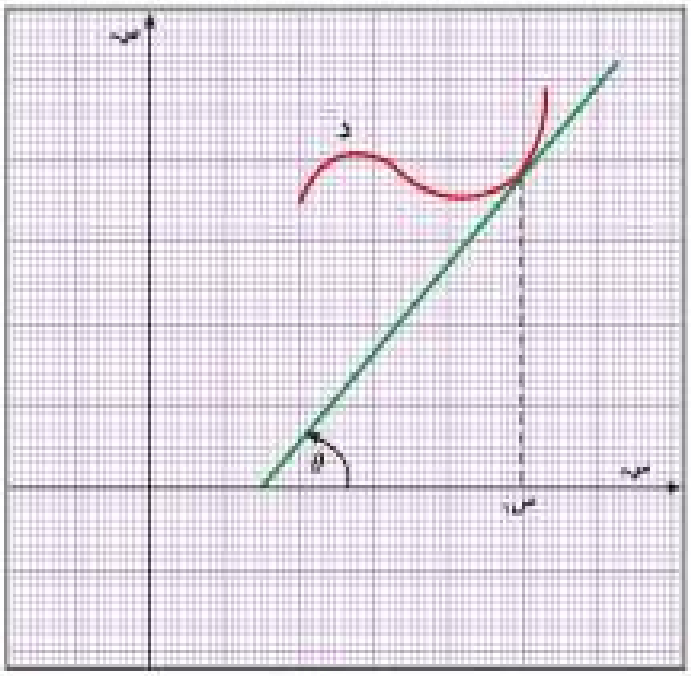
٣-١ المماسات والأعمدة

The tangents lines and the normals lines

تعلم أن ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة س$_{١}$ يساوي مشتقة الدالة عند هذه النقطة. فإذا رمزنا لميل المماس بالرمز م فإنَّ م = د′(س$_{١}$) وإذا أخذنا محاور متعامدة ذات تدريج موحد فإنَّ ميل المماس يساوي ظل الزاوية التي قياسها θ والتي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

انظر شكل (٣ - ١)

أي أن م = د′(س$_{١}$) = ظاθ



شكل ٣-١

ملاحظات:

١ إذا كانت د′(س) = ٠ عند نقطة معينة على منحنى الدالة فإنَّ ظاθ = ٠ عند هذه النقطة ويكون المماس للمنحنى عندها موازياً لمحور السينات والعكس أيضاً صحيح.

٢ إذا كان |د′(س)| ← ∞ عند نقطة ما على منحنى الدالة فإنَّ قياس الزاوية θ = ٩٠°، ويكون المماس عند هذه النقطة موازياً لمحور الصادات (رأسياً) حيث د متصلة عند هذه النقطة.

٣ إذا كانت د′(س) > ٠ عند نقطة ما على منحنى الدالة فإنَّ ظاθ يكون موجباً عند هذه النقطة، وهذا يعني أن المماس للمنحنى عند تلك النقطة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والعكس صحيح.

٤ إذا كانت د′(س) < ٠ عند نقطة ما على منحنى الدالة فإنَّ ظاθ يكون سالباً عند هذه النقطة وهذا يعني أن المماس للمنحنى عند تلك النقطة يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والعكس صحيح.

معادلة المماس عند نقطة على منحنى الدالة

Equation of the tangent line to curve of function

تعلم أن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$) والذي ميله م هي:

ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)

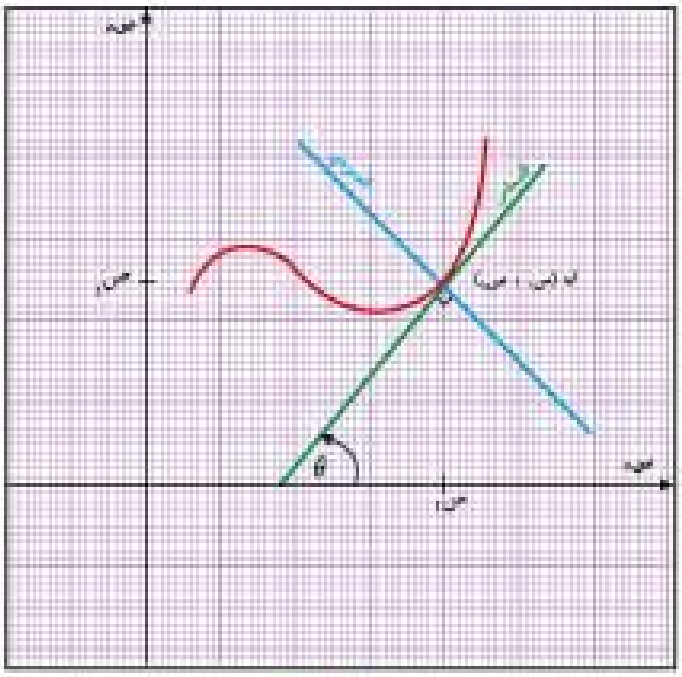
فإذا كان لدينا المنحنى ص = د(س) وكانت ن(س$_1$ ، ص$_1$) هي نقطة عليه فإنَّ ميل المماس إن وجد عند هذه النقطة يساوي د′(س$_1$) وعلى ذلك تكون معادلته عند هذه النقطة هي:

معادلة

ص − ص$_1$ = د′(س$_1$) (س − س$_1$) ..... (١)

معادلة العمودي عند نقطة على منحنى الدالة:

إن العمود على منحنى الدالة عند نقطة ما على المنحنى هو الخط المستقيم العمودي على المماس عند تلك النقطة كما في الشكل (٣ − ٢).



شكل (٣-٢)

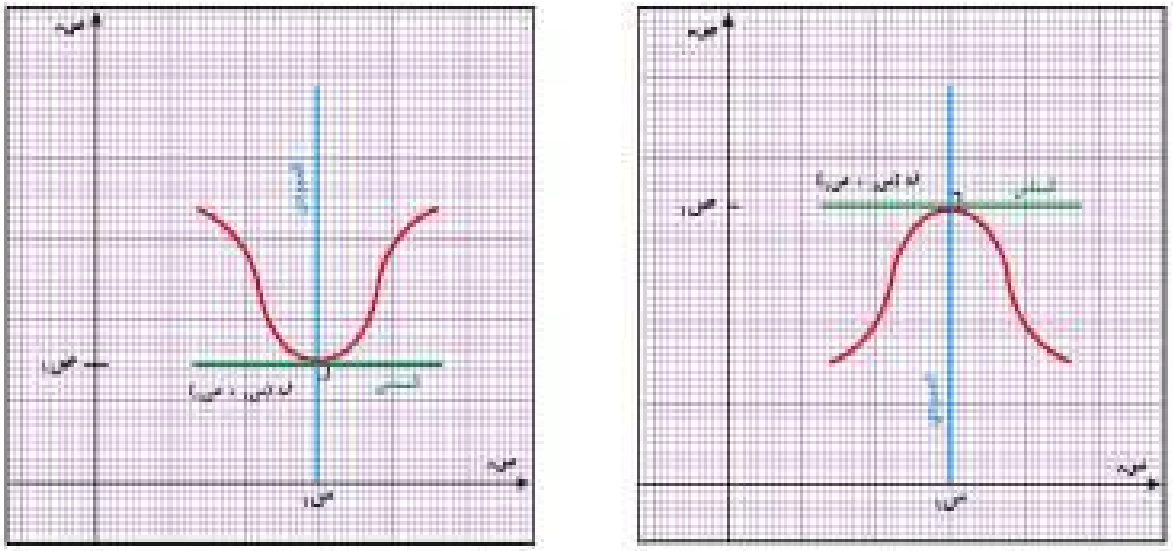
وحيث إن ناتج ضرب ميلي المماس والعمودي عليه يساوي −١ ، فإنَّ ميل العمودي عند النقطة ن يساوي − $\frac{١}{د'(س_1)}$ بشرط ألا يكون أحدهما رأسياً.

وبذلك تكون معادلة العمودي على المماس عند النقطة ن(س$_{١}$ ، ص$_{١}$) باستخدام صيغة النقطة والميل هي:

معادلة

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \frac{١}{\text{د}'(\text{س}_{١})} (\text{س} - \text{س}_{١}) \quad \text{.....} \quad (٢)$$

وإذا كانت د$'$(س$_{١}$) = ٠ فإنَّ المماس يكون أفقياً ومعادلته تكون ص = ص$_{١}$، ويكون العمودي رأسياً، ومعادلته تكون: س = س$_{١}$ كما في الشكل (٣ - ٣).



(أ) (ب)

شكل (٣-٣)

مثال ١

إذا كانت ص = س^{٣} + ٢س + ١ فأوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الدالة عند س = ٠.

الحل

∵ ص = س^{٣} + ٢س + ١

∴ ص$'$ = ٣س^{٢} + ٢

، ص$'$(٠) = ٢

وعليه فإنَّ ميل المماس عند النقطة س = ٠ يساوي ٢

وبالتعويض في المعادلة المعطاة عندما س = ٠ ، نحصل على ص = ١

∴ معادلة المماس عند النقطة (٠ ، ١) هي:

ص − ١ = ٢(س − ٠)

ص = ٢س + ١

أو ص − ٢س − ١ = ٠

، وميل العمودي عند النقطة س = ٠ هو $-\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودي عند النقطة (٠ ، ١) هي

ص − ١ = $-\frac{١}{٢}$(س − ٠)

∴ ص = $-\frac{١}{٢}$ س + ١

أو ص + $\frac{١}{٢}$ س − ١ = ٠ ⇐ ٢ص + س − ٢ = ٠ ■

مثال ٢

أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنى الدالة:

د(س) = س^{٢} − ٢س + ٧ عند النقطة (١ ، ٦)

الحل

∵ د(س) = س^{٢} − ٢س + ٧

∴ د′(س) = ٢س − ٢

، د′(١) = ٢ − ٢ = ٠

وحيث إن ميل المماس يساوي صفراً فإنَّ المماس يكون أفقياً وتكون معادلته هي: ص = ٦

وتكون معادلة العمودي هي: س = ١ ■

مثال ٣

أوجد نقاط المنحنى ص = س^{٣} − ٣س + ١ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته ٣س + ص = ٢ .

الحل

∵ ص = س^{٣} − ٣س + ١

∴ ص$'$ = ٣س^{٢} − ٣ ..... (١)

∴ ميل المماس عند أي نقطة هو ٣س^{٢} − ٣

وحيث إن ميل المماس يساوي ميل المستقيم ٣س + ص = ٢

∴ ص = −٣س + ٢

∴ ص$'$ = −٣ ..... (٢)

وبتساوي (١) ، (٢) ينتج أن:

٣س^{٢} − ٣ = −٣

∴ ٣س^{٢} = ٠ ⟸ س = ٠

وبالتعويض في معادلة المنحنى عند س = ٠ نحصل على ص = ١

∴ يوجد نقطة واحدة على المنحنى يكون المماس عندها يوازي المستقيم ٣س + ص = ٢

وهذه النقطة هي (٠ ، ١)

تمارين

٣ - ١

في التمارين ١ - ٥ أوجد معادلتي المماس والعمودي لمنحنيات الدوال المعطاة عند النقطة المذكورة.

١ د(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ١ عند (٠ ، ١)

٢ د(س) = س^{٤} + س^{٢} + ١ عند (-١ ، ٣)

٣ د(س) = $\frac{٢}{س}$ عند (١ ، ٢)

٤ د(س) = (س - ٨)$^{\frac{٢}{٣}}$ + ١ عند (٨ ، ١)

٥ د(س) = ٢س - $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند (٤ ، ٦)

٦ إذا كان المستقيم ص = س + ٢ مماساً لمنحنى معادلته ص = س^{٢} + ب س + حـ عند النقطة (٠ ، ٢) فأوجد قيمة كل من الثابتين ب ، حـ.

٧ أوجد معادلات الأعمدة على منحنى الدالة: ص = س^{٣} إذا كانت هذه الأعمدة توازي المستقيم ٣س + ١٦ ص + ١٧ = ٠.

٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = س^{٢} + ٤س - ١ إذا كان المماس عمودياً على المستقيم ٢ص + س - ١ = ٠

٩ أوجد النقاط التي يكون عندها المماس رأسياً لمنحنى الدالة: د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٥}$.

١٠ أوجد معادلة المماس للدائرة (س + ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤ عند النقطة (-١ ، ٣ + $\sqrt{٣}$).

١١ برهن على أن المماس عند أي نقطة على منحنى الدائرة يكون عمودياً على نصف قطر الدائرة المار بتلك النقطة.

٣-٢ المعدلات الزمنية المرتبطة (معدلات التغير المترابطة)

Related Rates

إن مسائل المعدلات الزمنية تعد من المسائل الحيوية في تطبيقات الاشتقاق. ففي هذا النوع من المسائل يتم استخدام معادلة تربط متغيرين (أو أكثر) لإيجاد معدل تغير أحدهما معتمداً على معدل تغير الآخر. فلو عبرنا عن المتغير ص كدالة في المتغير س بالمعادلة ص = د(س) ، وتغير المتغير س بالنسبة لمتغير آخر وليكن الزمن ن، وكان معدل التغير $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ معلوماً فإنه بالإمكان إيجاد معدل التغير $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ، ويتم ذلك عادة باستخدام قاعدة التسلسل:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$$

فعلى سبيل المثال لو فرضنا أن بالوناً كروياً ينفخ بالغاز فإنَّ كلا من طول نصف القطر نق ، والحجم ح يكون دالة بالنسبة للزمن، وحتى لو لم نتمكن من تحديد صيغة كل من الدالتين بالنسبة للزمن، فإننا نعرف أن نق ، ح ترتبطان بالعلاقة:

$$\text{ح} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^{٣} \qquad (١)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ن تحصل على:

$$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءح}}{\text{ءنق}} \cdot \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^{٢}\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} \qquad (٢)$$

ويكون المعدل $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ مرتبطاً بالمعدل $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ وفق المعادلة (٢).

ولذلك نقول إن $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ مرتبطان زمنياً.

فإذا علمنا على سبيل المثال قيمة كل من نق ، $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ في أي لحظة ن. ، فإننا نستخدم المعادلة (٢) لإيجاد قيمة $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ عند ن. والعكس صحيح.

مثال ١

يزداد حجم بالون كروي نتيجة النفخ بمعدل ١٠ وحدات مكعبة في الدقيقة. فما هو معدل ازدياد طول نصف القطر عندما يكون طول نصف القطر يساوي ٥ وحدات طول؟

الحل

المطلوب في البداية معرفة العلاقة التي تربط المتغيرين المعلوم والمجهول، وهما في هذا المثال حجم البالون ح وطول نصف القطر س على التوالي. ولذلك فإنَّ العلاقة بينهما هي:

$$ح = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣} \qquad (١)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ن ينتج أن:

$$\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣} \pi (٣) س^{٢} \frac{دس}{دن} = ٤\pi س^{٢} \frac{دس}{دن} \qquad (٢)$$

وحيث إنَّ معدل ازدياد حجم البالون معلوم لنا وهو ١٠ وحدات مكعبة في الدقيقة، فإنَّ:

$$\frac{دح}{دن} = ١٠ .$$

والمطلوب هو إيجاد معدل ازدياد طول نصف القطر عندما س = ٥

وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن:

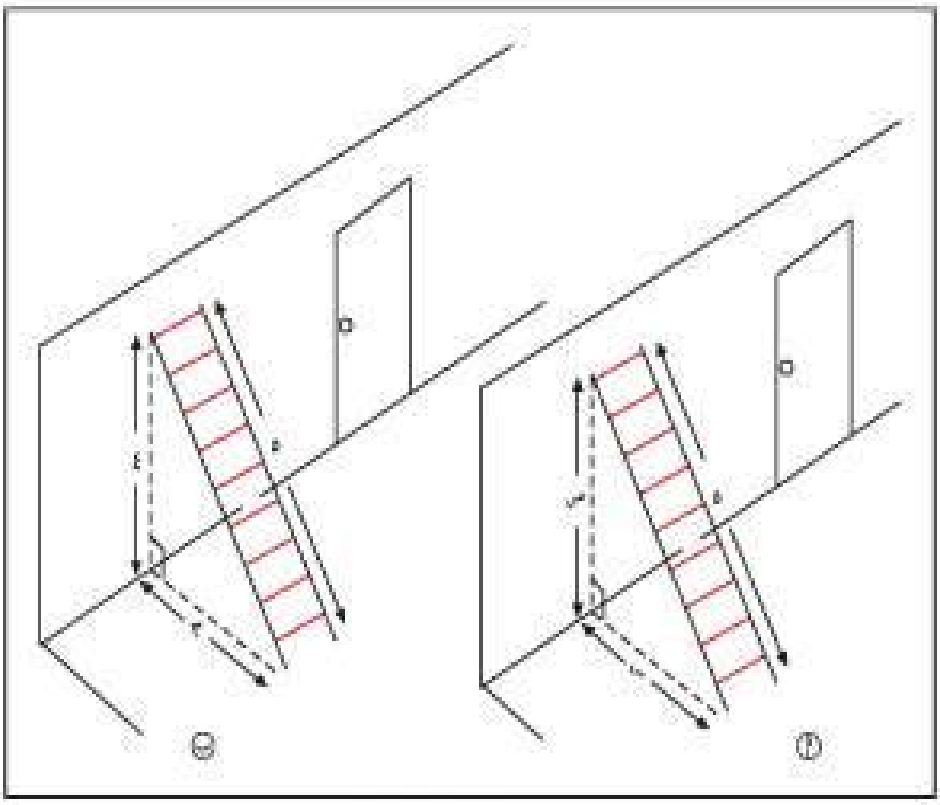
$$١٠ = ٤\pi(٥)^{٢} \frac{دس}{دن}$$

ولذلك فإنَّ $\frac{دس}{دن} = \frac{١٠}{١٠٠\pi} = \frac{١}{١٠\pi}$

وعليه فإنَّ معدل ازدياد طول نصف القطر عندما س = ٥ هو $\frac{١}{١٠\pi}$ وحدة طول في الدقيقة.

مثال ٢

يرتكز سلم طوله ٥ أمتار على حائط رأسي. فإذا انزلق طرفه السفلي مبتعداً عن الحائط على أرض أفقية بسرعة مترين في الثانية كما في الشكل (٣ - ٤)، فكم تكون سرعة هبوط الطرف الآخر إلى أسفل الحائط عندما تكون قاعدة السلم تبعد مسافة ٣ أمتار عن الحائط؟



شكل ٣-٤

الحل

نفرض أن ص هي المسافة بين مستوى الأرض وقمة السلم في أي لحظة، وأن س هي المسافة بين الحائط وقاعدة السلم كما في الشكل (٣-٤). ولذلك فإنَّ المطلوب أولاً هو إيجاد العلاقة بين س، ص.

باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$س^٢ + ص^٢ = ٢٥ \qquad (١)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن ن، نحصل على

$$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} \qquad (٢)$$

وحيث إن معدل ابتعاد قاعدة السلم عن الحائط معلومة وهي مترين في الثانية فإنَّ:

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢ \qquad (٣)$$

وعندما تكون قيمة س = ٣ فإننا نستنتج أن:

$$\text{ص}^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦$$

$$\therefore \text{ص} = ٤ \qquad (٤)$$

وبالتعويض من (٣) ، (٤) في المعادلة (٢) ينتج أن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\frac{٣}{٤}(٢) = -\frac{٣}{٢}$$ متر في الثانية.

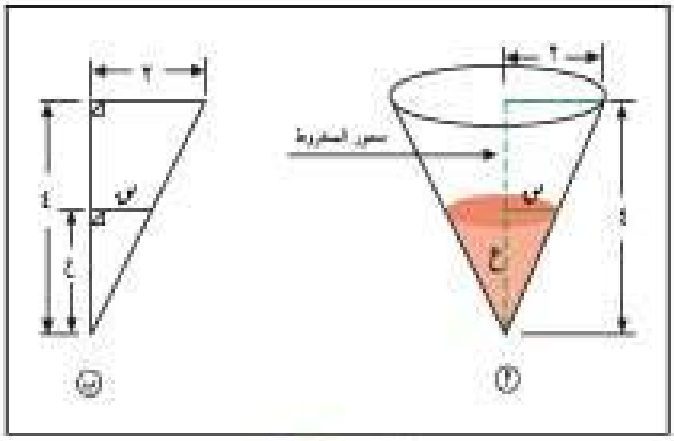
ويلاحظ هنا أن الإشارة سالبة، وهذا يعني أن المسافة ص بين رأس السلم وسطح الأرض تتناقص مما يعني أن رأس السلم ينزلق إلى الأسفل بمعدل $\frac{٣}{٢}$ متر في الثانية.

مثال ٣

يصب دواء سائل في قمع على شكل مخروط دائري قائم موضوع بحيث يكون محوره رأسياً وطول نصف قطر قاعدته ٢سم وارتفاعه ٤سم كما في الشكل (٣ - ٥أ). فإذا كان معدل انسياب الدواء في القمع هو ٣سم^{٣} في الثانية، فما هو معدل ارتفاع مستوى الدواء في القمع عندما يكون:

أ ارتفاع الدواء سنتيمتراً واحداً؟

ب ارتفاع الدواء سنتيمترين اثنين؟



شكل ٣-٥

الحل

المتغيرات المطلوبة لحل المسألة هي:

ن = الزمن بالثواني.

ع = ارتفاع السائل في القمع بالسنتيمترات عند أي زمن ن

س = طول نصف قطر سطح السائل الدائري بالسنتيمترات عند أي زمن ن

ح = حجم السائل في القمع بالسنتيمترات المكعبة عند أي ن

ولذلك فإنَّ العلاقة المطلوبة هي:

$$ح = \frac{١}{٣}\pi س^{٢} ع \qquad (١)$$

والمطلوب إيجاده هو $\frac{دع}{دن}$ عندما ع = ١ ، ع = ٢

نحاول إيجاد العلاقة بين ع ، س لتجعل المعادلة (١) في متغيرين فقط، وذلك من خلال تشابه المثلثات كما في الشكل (٣ - ٥ب).

$$\therefore \frac{س}{٢} = \frac{ع}{٤} \Leftarrow س = \frac{١}{٢} ع \qquad (٢)$$

وبالتعويض من (٢) في (١) ينتج أن:

$$ح = \frac{١}{٣}\pi \left(\frac{١}{٢} ع\right)^{٢} ع = \frac{\pi}{١٢} ع^{٣} \qquad (٣)$$

وباشتقاق طرفي المعادلة (٣) بالنسبة للزمن ن نجد أن:

$$\frac{دح}{دن} = \frac{\pi}{١٢} (٣) ع^{٢} \frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{٤} ع^{٢} \frac{دع}{دن} \qquad (٤)$$

وحيث إن معدل انسياب الدواء في القمع هو ٣ سنتيمتر مكعب في الثانية فإنَّ:

$$\frac{دح}{دن} = ٣ \qquad (٥)$$

وبالتعويض من (٥) في المعادلة (٤) ينتج أن:

$$\frac{دع}{دن} = ٣ \left(\frac{٤}{\pi ع^{٢}}\right) = \frac{١٢}{\pi ع^{٢}} \qquad (٦)$$

أ عندما ع = ١ سم فإنَّ:

$$\frac{دع}{دن} = \frac{١٢}{\pi} \Leftarrow \frac{دع}{دن} \approx ٣,٨٢ \text{ سم/ثانية}$$

ب عندما ع = ٢ سم فإنَّ:

$$\frac{دع}{دن} = \frac{١٢}{٤\pi} \Leftarrow \frac{دع}{دن} \approx ٠,٩٥ \text{ سم/ثانية}$$

ملاحظة:

لحل مسائل من هذا النوع يقترح اتباع الخطوات التالية:

١ تحديد جميع المتغيرات وتسمية رموزها.

٢ رسم المسألة وتعيين الأبعاد عليها إن أمكن.

٣ تحديد المتغيرات المطلوب معرفة معدل تغيرها وتلك المعلوم معدل تغيرها.

٤ إيجاد معادلة رياضية أو أكثر تعبر عن العلاقة بين المتغيرات.

٥ اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن لايجاد المعدل المطلوب، وعادة يتم استخدام قاعدة التسلسل.

٦ التعويض عن القيم المعلومة لإيجاد المجهول.

تمارين

٣ - ٢

١ قرص دائري يتمدد بالحرارة بحيث يزداد طول نصف قطره بمعدل ٠,٢ سم في الثانية، أوجد:

أ معدل ازدياد محيط القرص عندما يكون س = ٦سم.

ب معدل ازدياد مساحة القرص عندما يكون س = ٦سم.

٢ إذا كان معدل ازدياد طول نصف قطر كرة هو ٠,٢ سم في الثانية، فأوجد معدل الزيادة في:

أ حجم الكرة عندما يكون س = ١٠سم.

ب مساحة سطح الكرة عندما يكون س = ١٠سم.

٣ إذا كان معدل ازدياد طول كل ضلع من أضلاع مكعب هو ٠,٢سم في الثانية فأوجد معدل الزيادة في:

أ حجم المكعب عندما يكون طول كل ضلع من أضلاعه ٢٠ سم.

ب مساحة سطح المكعب عندما يكون طول كل من أضلاعه ٢٠سم.

٤ خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل ومحوره رأسي طول نصف قطر قاعدته ٥٠سم وارتفاعه متر واحد. فإذا صب فيه ماء بمعدل ٢٠ سم مكعب في الثانية فكم تكون سرعة ازدياد ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاع الماء في الخزان ٢٠سم؟

٥ يتسرب غاز من بالون كروي بمعدل ٥سم^{٣}/ثانية. أوجد معدل النقصان في طول نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها س = ١٠سم، ثم أوجد معدل نقصان مساحة السطح الخارجي للبالون في نفس اللحظة.

٦ ولد طوله ١,٦ متر يتحرك بعيداً عن عمود كهرباء ارتفاعه ١٠ أمتار. فإذا كانت سرعة الولد ١,٢ متر في الثانية، فكم تكون سرعة ازدياد طول ظله؟

٧ قطعة من الثلج على شكل كرة تذوب بمعدل ٤π سم مكعب في الدقيقة بحيث تحافظ على شكلها الكروي. فكم يكون معدل تناقص طول قطرها عندما يكون طول قطرها ١٢سم؟

٨ نقطة تتحرك على الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ١٦. فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني هو ١٠ وحدات في الثانية عندما تقع على النقطة (٢ ، ٢√٣) فما سرعة تغير إحداثيها الصادي عند تلك اللحظة؟

٩ يتسرب ماء من قمع مخروطي قاعدته أفقية ورأسه إلى الأسفل بمعدل ٥سم^{٣}/ثانية. فإذا كان طول نصف قطر قاعدة القمع يساوي ١٠سم وارتفاعه ٢٠سم، فأوجد معدل تغير ارتفاع الماء في المخروط عندما يكون ارتفاع الماء في القمع ١٥سم.

١٠ خزان للنفط على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٣٠ متراً، يراد تفريغ الخزان من النفط بمعدل ٢ متر مكعب في الدقيقة، فما هو معدل تغير ارتفاع النفط في الخزان؟

٣ - ٣م القيم الصغرى والقيم العظمى

Maximum values and Minimum values

لقد تناولنا في البندين السابقين بعض التطبيقات باستخدام الاشتقاق، وفي هذا البند سنتناول استخدام المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم الصغرى للدوال.

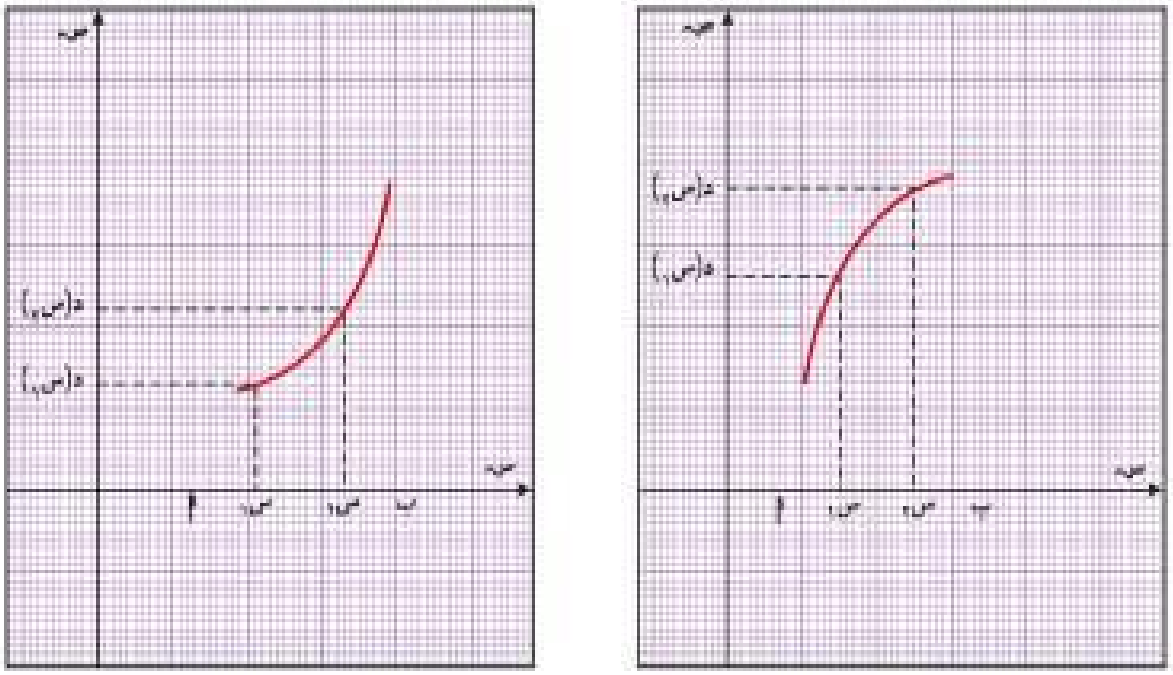
أولاً - الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة

تعريف

الدالة المتزايدة **Increasing of a function**

يقال للدالة د إنها متزايدة في الفترة ف إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ف : $س_١$ < $س_٢$ فإن د($س_١$) < د($س_٢$).

أي أنه كلما تزايدت س فإنَّ د(س) تتزايد كما في شكل (٣ - ٦ م)



شكل (٣-٦م)

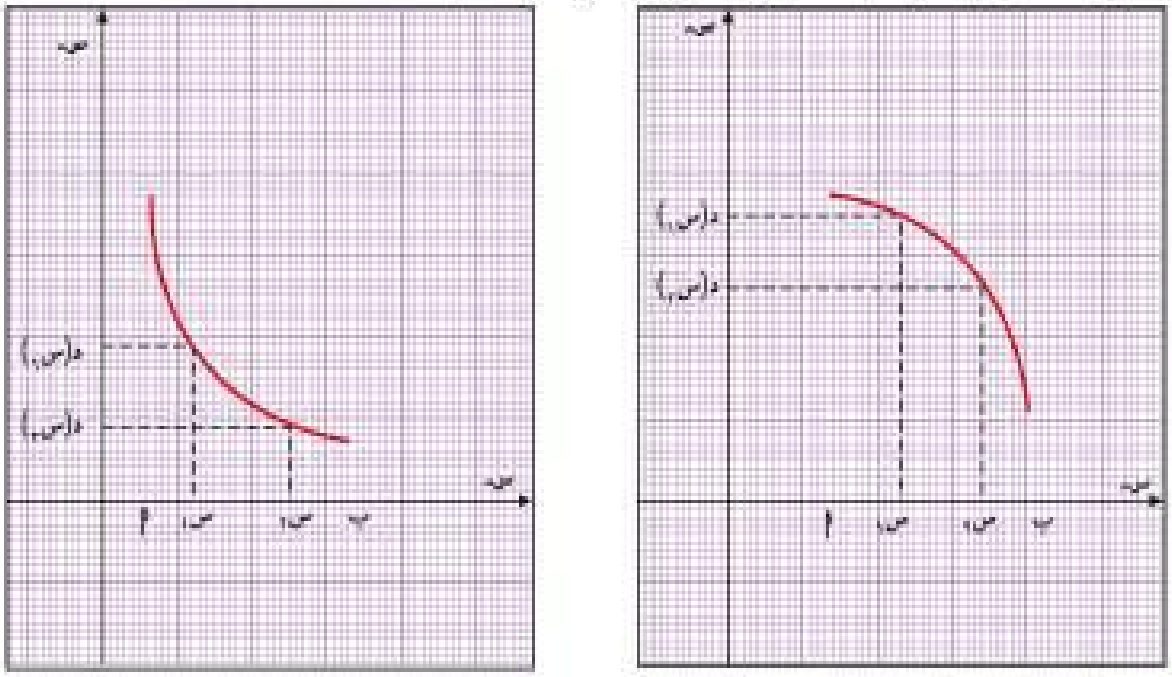
تعريف

الدالة المتناقصة **Decreasing of a function**

يقال للدالة د إنها متناقصة في الفترة ف إذا كان لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ف : $س_١$ < $س_٢$ فإن د($س_١$) > د($س_٢$).

أي أنه:

كلما تزايدت س فإنَّ د(س) تتناقص كما في الشكل (٣ - ٦ب)



شكل ٣-٦ب

يتضح مما سبق أنه بالإمكان معرفة ما إذا كانت دالة ما في تزايد أو تناقص باختبار بيانها، ولكن يمكن أيضاً الحصول على هذه المعلومات بطريقة أبسط وذلك باختبار إشارة مشتقتها الأولى. وإذا كانت الدالة تمثل خطاً مستقيماً (ليس أفقياً) أي معادلته من الدرجة الأولى، فإنَّ الدالة د في تزايد إذا كان الميل موجباً، وفي تناقص إذا كان الميل سالباً. وبالإمكان إثبات نتائج مناظرة لذلك في حال كون الدالة لا تمثل خطاً مستقيماً بل منحنى، كما في النظرية التالية:

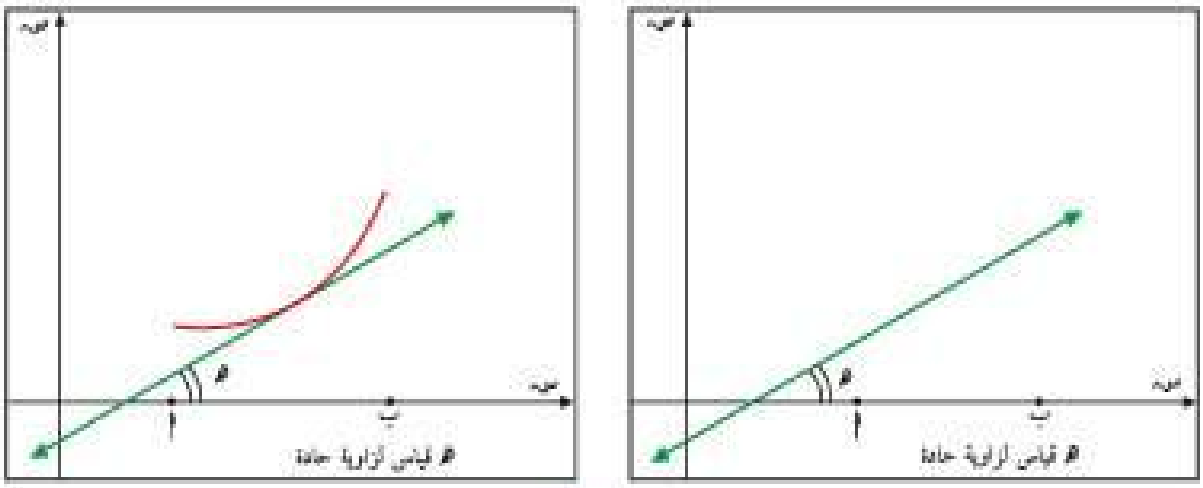
نظرية ١

لتكن الدالة د متصلة على [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق في (أ ، ب):

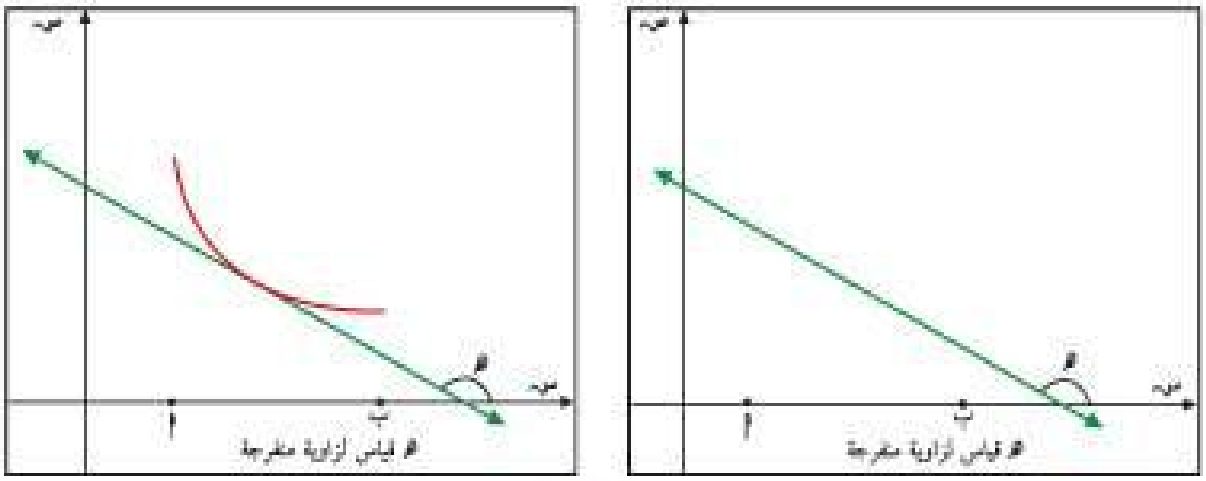
١ إذا كانت د′(س) > ٠ لكل قيم س ∈ (أ ، ب) فإن د تكون دالة متزايدة في [أ ، ب]

٢ إذا كانت د′(س) < ٠ لكل قيم س ∈ (أ ، ب) فإن د تكون دالة متناقصة في [أ ، ب]

انظر كل شكل في (٣ - ٧أ) فهو يبين دالة متزايدة في الفترة [أ ، ب] لأن د′(س) وهو ميل المماس عند النقطة (س ، د(س)) موجب لكل قيم س ∈ (أ ، ب). وبالمثل فإنَّ كل شكل في (٣ - ٧ب) يبين دالة متناقصة في الفترة [أ ، ب] حيث ميل المماس عند النقطة (س ، د(س)) يكون سالباً لكل قيم س ∈ (أ ، ب).



شكل (٣-٧أ)



شكل (٣-٧ب)

ولعل بالإمكان اختصار النظرية السابقة لمعرفة سلوك د(س) في الفترة (أ ، ب) في الجدول التالي:

إشارة د′ (س)	بيان الدالة د(س)
+	د متزايدة، وبيان الدالة في تصاعد
−	د متناقصة، وبيان الدالة في هبوط

ملاحظات:

١ يجب ملاحظة أن الزاوية التي يصنعها المماس عند أي نقطة على بيان دالة متزايدة يعمل زاوية حادة مع الاتجاه الموجب للمحور السيني. وتكون الزاوية منفرجة إذا كانت الدالة متناقصة.

٢ إذا كانت د′ (س) = ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب) فإنَّ الدالة د هي دالة ثابتة في الفترة (أ ، ب).
وإذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] فإنها تكون ثابتة في [أ ، ب].

مثال ١

ابحث تزايد وتناقص الدالة د(س) = س^{٢} + ٣

الحل

الدالة: د(س) = س^{٢} + ٣ متصلة وقابلة للاشتقاق في ح

د′(س) = ٢س

لبحث إشارة د′(س) نضع د′(س) = ٠

٢س = ٠ ⇐ س = ٠

س	−∞	٠	+∞
إشارة د′(س)	− − −		+ + +
د(س)	↘		↗
	متناقصة		متزايدة

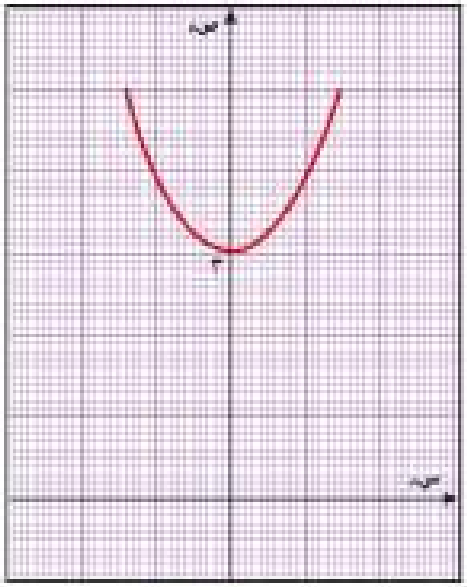
∵ د′(س) > ٠ ∀ س ∈ (٠ ، ∞)

∴ الدالة د متزايدة في [٠ ، ∞)

∵ د′(س) < ٠ ∀ س ∈ (−∞ ، ٠)

∴ الدالة: د متناقصة في (−∞ ، ٠]

انظر شكل (٣-٨)



شكل ٣-٨

مثال ٢

ابحث تزايد وتناقص الدالة : د(س) = س^{٣} − ٣س + ٢

الحل

الدالة د متصلة ∀ س ∈ ح . وقابلة للاشتقاق على ح

د′(س) = ٣س^{٢} − ٣

لدراسة إشارة د′(س) نضع د′(س) = ٠

٣س^{٢} − ٣ = ٠

٣(س^{٢} − ١) = ٠

٣(س − ١)(س + ١) = ٠

س = ١ أو س = −١

س	−∞	−١	١	+∞
إشارة د′(س)	+ + +	− − −	+ + +
د(س)	↗	↘	↗
	متزايدة	متناقصة	متزايدة

نلاحظ أن د′(س) > ٠

عندما س < −١

وكذلك عندما س > ١

∴ الدالة د متزايدة في كل من:

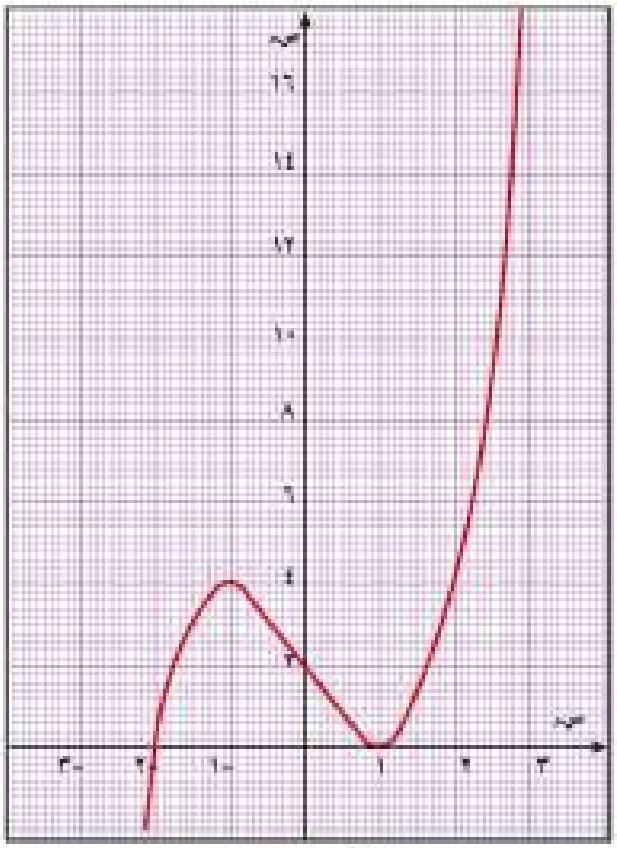
(−∞ ، −١] ، [١ ، ∞)

وكذلك د′(س) < ٠

∀ س ∈ (−١ ، ١)

∴ الدالة د متناقصة في [−١ ، ١].

انظر شكل (٣ − ٩)



شكل ٣-٩

مثال ٣

لتكن الدالة د:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & : \text{س} \leqslant ٠ \\ ١ & : ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ٣ & : \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$$

ادرس تزايد وتناقص الدالة د علماً بأن د دالة متصلة.

الحل

د متصلة على ح

$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & : \text{س} < ٠ \\ ٠ & : ٠ < \text{س} < ٢ \\ ؟ & : \text{س} \in \{٠ ، ٢\} \\ ٢ & : \text{س} > ٢ \end{cases}$$

$\because$ $\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س} < ٠$ $\forall$ س $\in (-\infty ، ٠)$

فإنَّ الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty ، ٠]$

$\because$ $\text{د}'(\text{س}) = ٠$ $\forall$ س $\in (٠ ، ٢)$

فإنَّ الدالة ثابتة في الفترة $[٠ ، ٢]$ فهي دالة ليست متزايدة وليست متناقصة

$\because$ $\text{د}'(\text{س}) = ٢ > ٠$ في الفترة $(٢ ، \infty)$

فإنَّ الدالة متزايدة في الفترة $[٢ ، \infty)$ ويمكن ملاحظة ذلك من الجدول التالي:

س	$-\infty$	٠	٢	$+\infty$
إشارة د′(س)	− − −	صفر	+ + +	
د(س)	↘	→	↗	
	متناقصة	ثابتة	متزايدة	

يجب ملاحظة أننا أهملنا بحث الاشتقاق عند النقاط س = ٠ ، س = ٢، حيث إن دراسة تزايد أو تناقص الدالة تستلزم الاشتقاق على الفترة المفتوحة فقط.

ثانياً – النقاط الحرجة Critical point

إذا كانت الدالة د متصلة عند س = حـ وكانت د′(حـ) = ٠ أو د′(حـ) غير موجودة فإنَّ النقطة (حـ ، د(حـ)) تسمى نقطة حرجة للدالة د.

مثال ٤

أوجد النقاط الحرجة للدالة: د(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ .

الحل

د(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ هي دالة حدودية مجالها ح فهي دالة متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د′(س) = ٦س^{٢} − ٦س = ٦س (س − ١).

النقاط الحرجة تتواجد عندما تكون د′(س) = ٠

ولذلك فإنه يوجد نقاط حرجة عندما تكون ٦س (س − ١) = ٠

⇐ س = ٠ أو س = ١

وبالتعويض عن القيمتين في الدالة نحصل على النقاط الحرجة للدالة وهي: (٠ ، ٥) ، (١ ، ٤)

ملاحظة:

نلاحظ من الدراسة السابقة أن النقطة (٠ ، ٠) على منحنى الدالة: د(س) = |س| هي نقطة حرجة لأن د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠ أي أن المشتقة غير موجودة.

مثال ٥

أوجد النقاط الحرجة (إن وجدت) للدالة د حيث: د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\text{س} + ١}$

الحل

يجب أن نلاحظ هنا أن الدالة معرفة عند جميع القيم ما عدا س = −١ ، ولذلك فإنَّ مجال الدالة هو جميع قيم س الحقيقية ما عدا −١

$$، \quad \text{د}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ١)(٢\text{س} - ٣) - (\text{س}^{٢} - ٣\text{س})(١)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{(\text{س} + ١)^{٢}} = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)}{(\text{س} + ١)^{٢}}$$

، د′(س) = ٠ ⇐ (س + ٣)(س − ١) = ٠ ⇐ س = −٣ أو س = ١

ويجب ملاحظة أن د′(س) غير موجودة عندما س = −١ ، ولكن هذه القيمة ليست في مجال الدالة وعليه فلا تمثل نقطة حرجة.

ولذلك فإنَّ النقاط الحرجة هي (−٣ ، −٩) ، (١ ، −١).

ثالثاً - القيم العظمى والقيم الصغرى:

تعريف

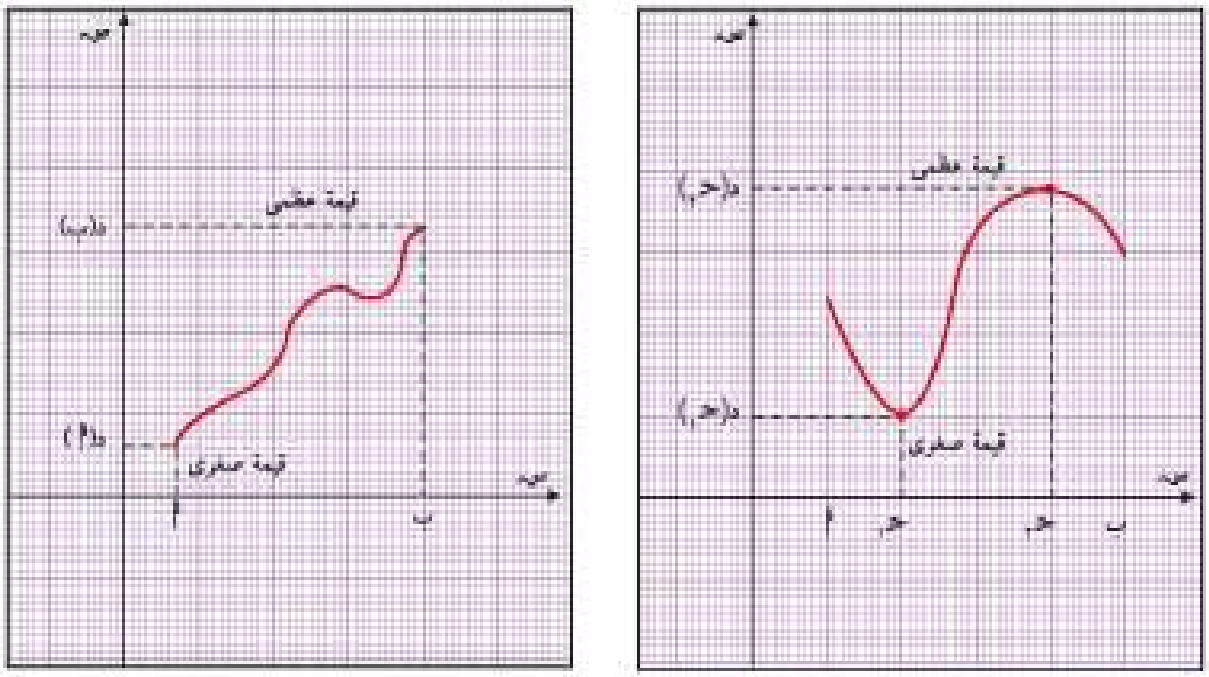
لتكن د دالة أوسع مجال لها هو مر

إذا كانت ف ⊆ مر وكانت حـ ∈ ف بحيث:

١ د(حـ) ≥ د(س) ∀ س ∈ ف فإننا نقول إن د(حـ) هي قيمة عظمى للدالة د في ف.

٢ د(حـ) ≤ د(س) ∀ س ∈ ف فإننا نقول إنَّ د(حـ) هي قيمة صغرى للدالة د في ف.

انظر شكل (٣ - ١٠).



(ب) (أ)

شكل ٣-١٠

تعريف

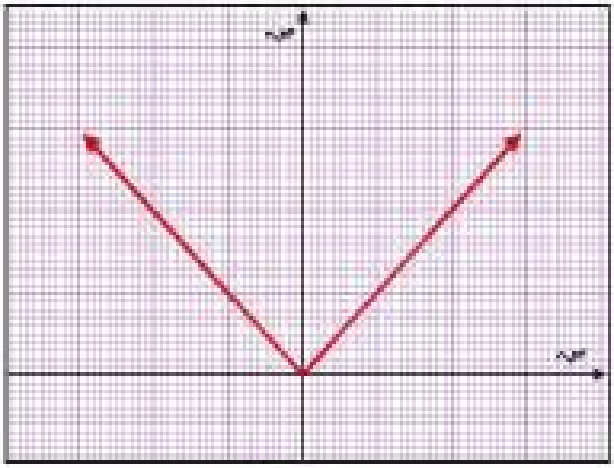
لتكن د دالة أوسع مجال لها هو مر

١ إذا كانت د(حـ) قيمة عظمى في مر ، نقول إن د(حـ) قيمة عظمى مطلقة.

٢ إذا كانت د(حـ) قيمة صغرى في مر ، نقول إن د(حـ) قيمة صغرى مطلقة.

في شكل (٣ - ١١أ)

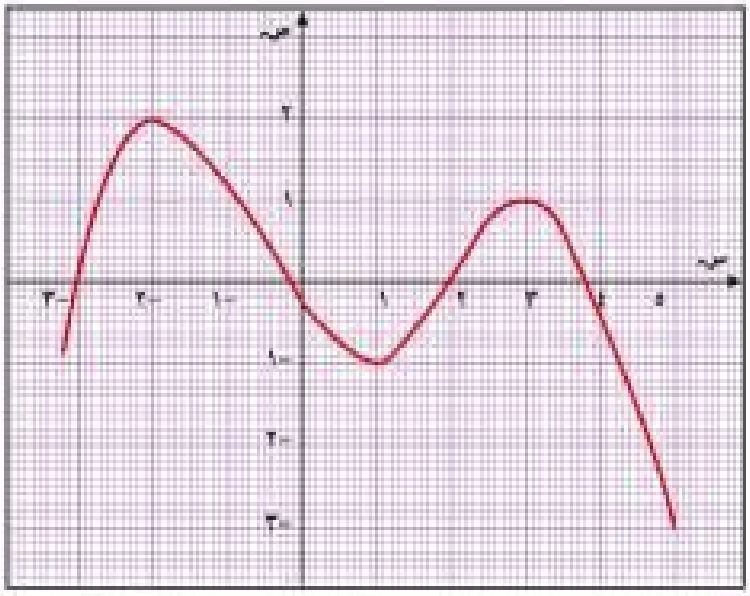
د(٠) قيمة صغرى مطلقة والدالة د ليس لها قيمة عظمى مطلقة.



شكل ٣-١١أ

في شكل (٣ - ١١ب):

ق(-٢) قيمة عظمى مطلقة للدالة ق ، ق(٣) قيمة عظمى للدالة في الفترة [١ ، ٥].



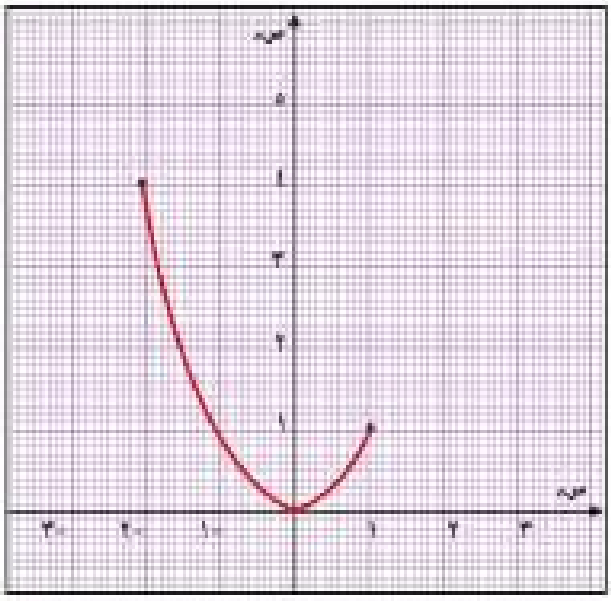
شكل ٣-١١ب

نظرية ٢

إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى وقيمة صغرى في هذه الفترة.

مثال ٦

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د(س) = س^{٢} حيث س ∈ [-٢ ، ١] والموضح بيانها في شكل (٣ - ١٢)



شكل ٣-١٢

الحل

القيمة العظمى للدالة د هي

د(-٢) = ٤ ،

القيمة الصغرى للدالة د هي

د(٠) = ٠

والآن سنتعرف على طريقة إيجاد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لدالة متصلة على [أ ، ب] حيث إنها تكون:

١ إمّا عند أحد الطرفين أ أو ب.

٢ أو عند حـ ∈ (أ ، ب) حيث (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة.

مثال ٧

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة ق:

ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$ في الفترة [١ ، ٨].

الحل

الدالة ق متصلة على [١ ، ٨]

∴ الدالة ق قيمة عظمى وقيمة صغرى في هذه الفترة

أولاً - نحسب ق(١) ، ق(٨)

ق(١) = ١ + $\frac{٤}{١}$ = ٥،

ق(٨) = ٨ + $\frac{٤}{٨}$ = ٨$\frac{١}{٢}$،

ثانياً - نبحث عن النقط الحرجة إن وجدت

$$ق'(س) = ١ - \frac{٤}{س^٢}$$

نضع $ق'(س) = ٠$

$$١ - \frac{٤}{س^٢} = ٠$$

$$١ = \frac{٤}{س^٢}$$

$$س^٢ = ٤$$

$$س = \pm ٢$$

$-٢ \notin (١ ، ٨)$ لكن $٢ \in (١ ، ٨)$

$\therefore$ عند $س = ٢$ توجد نقطة حرجة.

$$ق(٢) = ٢ + \frac{٤}{٢} = ٤$$

س	١	٢	٨
ق(س)	٥	٤	$٨\frac{١}{٢}$

من الجدول تكون:

القيمة العظمى هي $٨\frac{١}{٢}$

والقيمة الصغرى هي ٤

مثال ٨

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د:

د(س) = س − ٣ س$^{\frac{١}{٢}}$ في الفترة [−١ ، ٨].

الحل

الدالة د متصلة على الفترة [−١ ، ٨]

∴ للدالة د قيمة عظمى وقيمة صغرى في هذه الفترة

د(−١) = −١ − ٣ (−١)$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ ،

د(٨) = ٨ − ٣ (٨)$^{\frac{١}{٢}}$ = ٨ − ٦ = ٢

لإيجاد النقاط الحرجة:

د(س) = س − ٣س$^{\frac{١}{٢}}$

د′(س) = ١ − س$^{-\frac{١}{٢}}$

= س$^{-\frac{١}{٢}}$ (س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١)

= $\frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$

توجد نقاط حرجة عندما د′(س) = ٠

أو تكون د′(س) غير موجودة.

i عندما د′(س) = ٠ ⇐ س$^{\frac{١}{٢}}$ − ١ = ٠

⇐ س^{٢} = ١

∴ س = ١ (حيث −١ نقطة طرفية).

∴ توجد نقطة حرجة عند س = ١

ii توجد نقطة حرجة عند س = ٠

حيث د′(٠) غير موجودة.

س	−١	٠	١	٨
د(س)	٢	٠	−٢	٢

نلاحظ من الجدول أن:

القيمة العظمى = د(−١) = د(٨) = ٢

القيمة الصغرى = د(١) = −٢

مثال ٩

إذا كانت الدالة د: $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & : \quad -١ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ (\text{س} - ٣)^{٢} - ٢ & : \quad ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$

متصلة على مجالها فأوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة د.

الحل

مجال د هو [−١ ، ٤]

∴ د متصلة على [−١ ، ٤]

∴ للدالة د قيمة عظمى وقيمة صغرى في هذه الفترة

$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & : \quad -١ < \text{س} < ١ \\ ؟ & : \quad \text{س} = ١ \\ ٢(\text{س} - ٣) & : \quad ١ < \text{س} < ٤ \end{cases}$

نضع د′(س) = ٠

عندما س ∈ (−١ ، ١)

٢س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ (−١ ، ١) ،

عندما س ∈ (١ ، ٤)

٢(س − ٣) = ٠ ⇐ س = ٣ ∈ (١ ، ٤)

∴ للدالة د نقاط حرجة عند س = ٠ ، س = ٣

س	−١	٠	١	٣	٤
د(س)	٢	١	٢	−٢	−١

نلاحظ من الجدول أن:

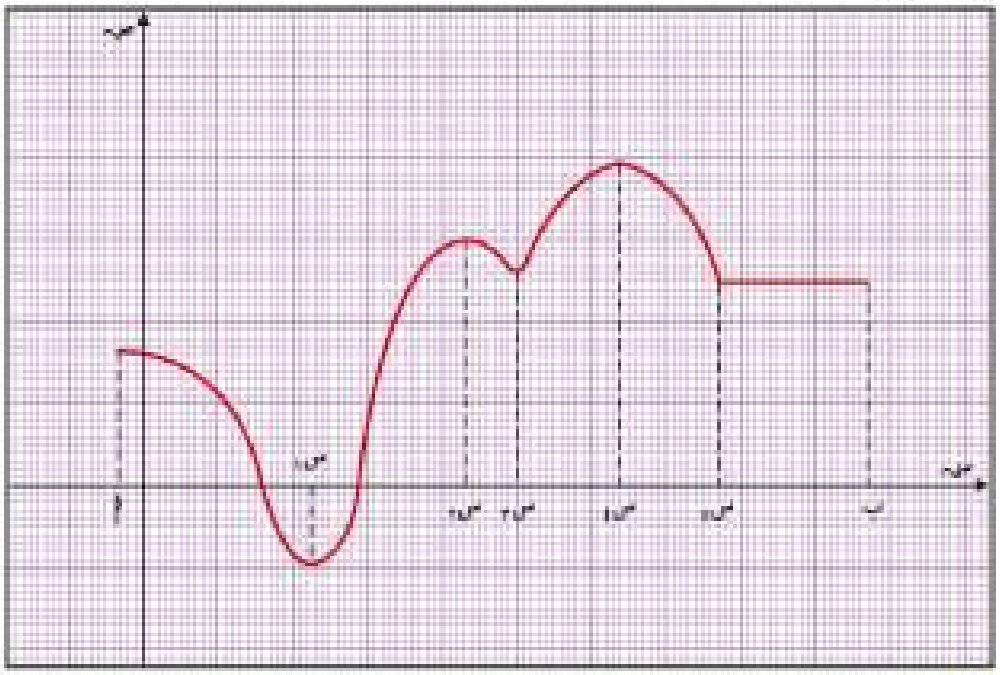
القيمة العظمى المطلقة = ٢

والقيمة الصغرى المطلقة = −٢

تمارين

٣ - ٣ م

١ في الشكل بيان للدالة د:



أ عين كل الفترات التي تكون فيها الدالة د متزايدة.

ب عين كل الفترات التي تكون فيها الدالة د متناقصة.

حـ عين كل الفترات التي تكون فيها الدالة د ثابتة.

في التمارين ٢ - ٩ أوجد الفترات التي تكون فيها الدوال المعطاة متزايدة أو متناقصة، وبين قيم س التي يكون عندها للدوال مماس أفقي.

٢ د(س) = ٢س - ١

٣ د(س) = س^{٢} + ٢س

٤ د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - س

٥ د(س) = $\frac{١}{س}$

٦ د(س) = س^{٢} - ٣س^{٢} + ٣س + ٣

٧ د(س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٢} + ١}$

٨ د(س) = $\frac{س - ١}{س + ١}$

٩ د(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$

في التمارين ١٠ – ١٣ حدد النقاط الحرجة للدوال المعطاة.

١٠ $د(س) = س^٢ + ٢س + ١$

١١ $د(س) = -س + ٤$

١٢ $د(س) = س^٣ + ٣س^٢ - ٩س + ٥$

١٣ $د(س) = \sqrt[٣]{س}$

١٤ أوجد معادلة منحنى حدودية من الدرجة الثانية الذي يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، -١٢) وله نقطة حرجة عند س = ٢.

١٥ إذا كانت الدالة د: $د(س) = \begin{cases} س^٣ - ٣س & : س < ٠ \\ س^٢ - ٤س & : س \geq ٠ \end{cases}$

متصلة على [-٢ ، ٣] ، فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د في [-٢، ٣].

١٦ لتكن $د(س) = س^٢ + |٢س + ٤|$ فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة د في [-٣ ، ٣].

١٧ إذا كانت الدالة ق: $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س + ٢ & : -٢ < س < ١ \\ س^٢ + ٤ & : ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

متصلة على مجالها فأوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة ق.

١٨ إذا كانت الدالة د: [-٣ ، ٢] ← ح ، $د(س) = س^٣ - ٢س^٢ - ٤س + أ$ حيث أ ثابت، وكانت القيمة الصغرى المطلقة للدالة د تساوي -٤ فأوجد قيمة أ والقيمة العظمى المطلقة للدالة د.

٣-٣ب القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية

علمنا أنه إذا كانت الدالة د متصلة على [أ ، ب] فإنَّ د تأخذ قيمة عظمى د(هـ) وقيمة صغرى د(و) عند نقطتين هـ ، و في [أ ، ب]. والقيمة العظمى د(هـ) هي أكبر قيمة للدالة في [أ ، ب]. وبالمثل القيمة الصغرى د(و) هي أصغر قيمة للدالة في الفترة [أ ، ب].

تعريف

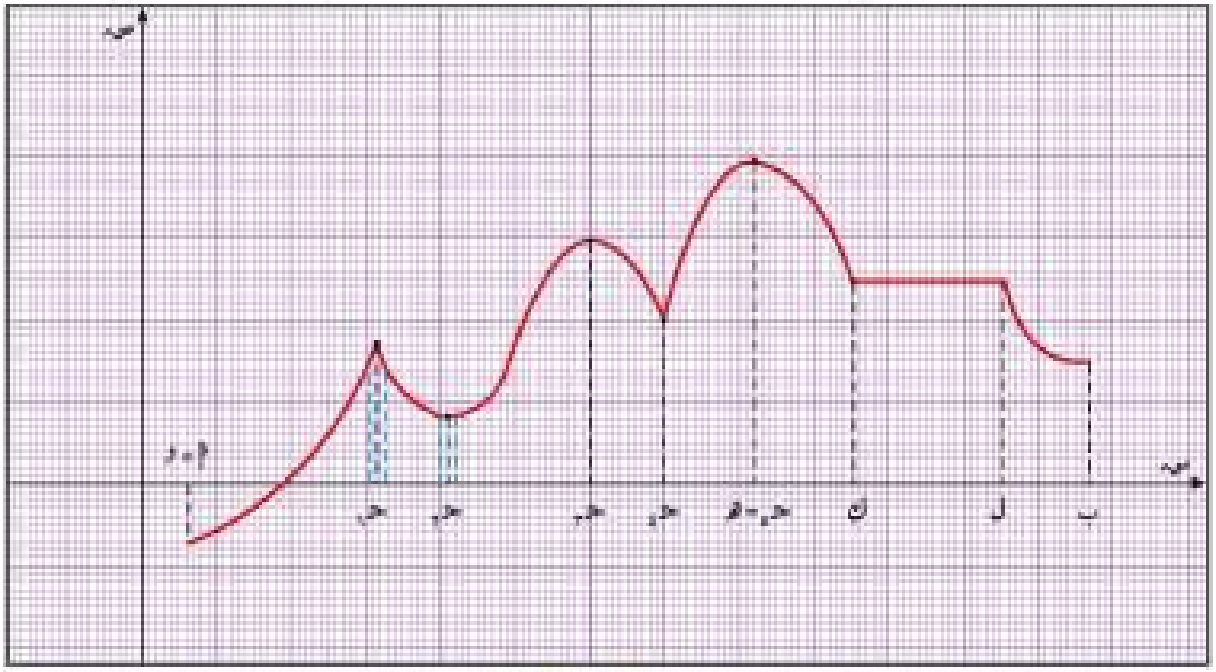
لتكن د دالة مجالها مج ، حـ ∈ مج.

١ نقول إن د(حـ) قيمة عظمى محلية للدالة د
إذا كان هناك فترة مفتوحة ف تحتوي على حـ بحيث تكون د(حـ) قيمة عظمى في ف.

٢ نقول إن د(حـ) قيمة صغرى محلية للدالة د
إذا كان هناك فترة مفتوحة ف تحتوي على حـ بحيث تكون د(حـ) قيمة صغرى في ف.

فمثلاً من شكل (٣ - ١٣) نجد أن د(حـ١) ، د(حـ٣) ، د(حـ٥) ، تمثل قيماً عظمى محلية، بينما د(حـ٢) ، د(حـ٤) ، تمثل قيماً صغرى محلية.

أما القيمة العظمى للدالة في الفترة [أ ، ب] فهي د(هـ) والقيمة الصغرى في نفس الفترة فهي د(و).



شكل ٣-١٣

وتسمى هذه القيم «محلية» لأننا نحصرها في فترة مفتوحة صغيرة بما فيه الكفاية تحوي $حـ_1$ وقد تكون قيماً صغرى محلية أكبر من قيم عظمى محلية، مثل د($حـ_2$) فهي أكبر من د($حـ_1$).

ونلاحظ أن قيمة الدالة عند جميع نقاط الفترة المفتوحة (ك ، ل) هي قيمة عظمى محلية وصغرى محلية في آن واحد (لماذا؟). كذلك يلاحظ أن القيم العظمى أو الصغرى المحلية قد لا تشمل القيم العظمى أو الصغرى للدالة د، فمثلاً في الشكل (٣ - ١٣) نجد أن د(أ) هي القيمة الصغرى للدالة في [أ ، ب] ولكنها ليست قيمة صغرى محلية حيث لا توجد فترة مفتوحة تحوي أ في [أ ، ب] وتكون د(أ) هي القيمة الصغرى فيها.

أما د($حـ_5$) فهي قيمة عظمى ولكنها محلية في نفس الوقت. ويلاحظ أن القيم التي يكون عندها للدالة قيمٌ عظمى أو صغرى محلية كما في الشكل يكون عندها المماس أفقياً أو رأسياً أو لا يكون هناك مماس، وهذا يحدث عندما تكون المشتقة تساوي صفراً أو ليس لها وجود.

تدريب:

إذا كان الشكل يمثل بيان الدالة ق فأكمل ما يلي:

١ ق(-٥) تمثل قيمة .....

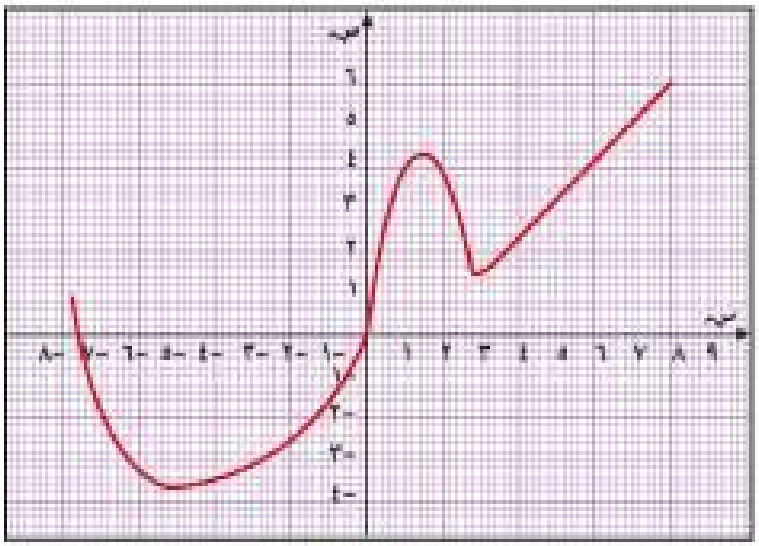
٢ ليس للدالة ق قيمة ..... مطلقة.

٣ ..... قيمة عظمى محلية.

٤ ق(٣) تمثل قيمة .....

٥ ..... قيمة صغرى للدالة في الفترة [٠ ، ٥].

٦ ق(٥) ..... في الفترة [٠ ، ٥].



شكل (٣-١٤)

نظـريـة ٣

إذا كان للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة حـ ∈ (أ ، ب) التي تكون الدالة متصلة عندها، فإنه إما أن يكون د′(حـ) = ٠ أو تكون د′(حـ) غير موجودة.

نظـريـة ٤

اختبار المشتقة الأولى First Derivative test

لتكن د دالة متصلة في (أ ، ب) تحتوي على حـ

ولتكن (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د.

١ إذا كانت د′(س) ⩾ ٠ عند كل س ∈ (أ ، حـ)

وكانت د′(س) ⩽ ٠ عند كل س ∈ (حـ ، ب)

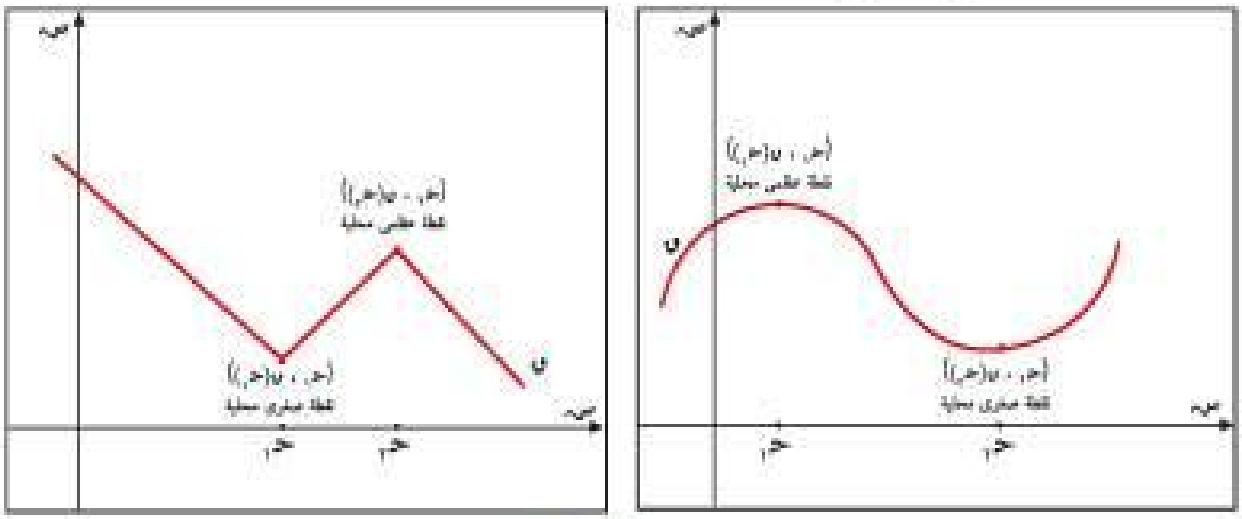
فإنَّ د(حـ) قيمة عظمى محلية. وتسمى (حـ ، د(حـ)) نقطة عظمى محلية.

٢ إذا كانت د′(س) ⩽ ٠ عند كل س ∈ (أ ، حـ)

وكانت د′(س) ⩾ ٠ عند كل س ∈ (حـ ، ب)

فإنَّ د(حـ) قيمة صغرى محلية. وتسمى (حـ ، د(حـ)) نقطة صغرى محلية.

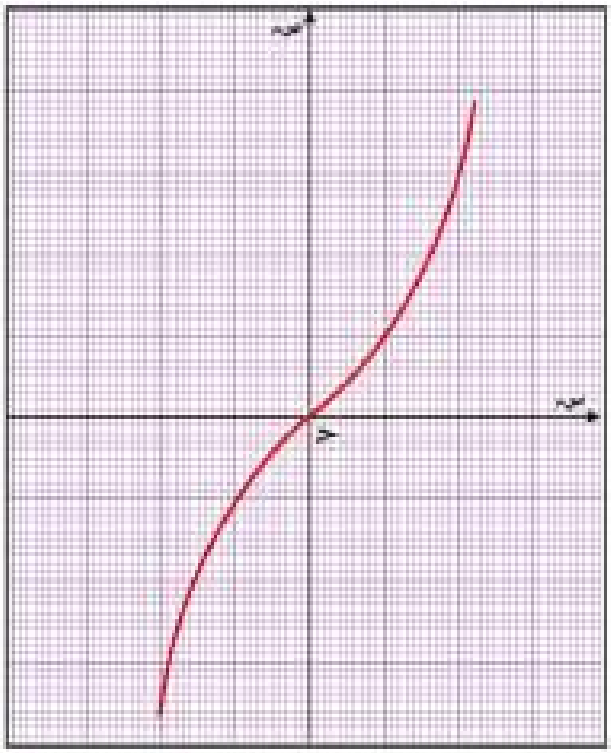
والأشكال التالية توضح موضع النقاط العظمى والصغرى المحلية:



شكل (٣-١٥)

ملاحظة :

قد يكون د′(حـ) = ٠ ومع ذلك فإنَّ د(حـ) لا تكون قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية، وهذا يعني أن النقطة الحرجة لا تكون بالضرورة عندها قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية وهذا يحدث عندما لا تتغير إشارة د′(س) في جوار للنقطة حـ. ويمكن ملاحظة ذلك في شكل (٣ - ١٦).



شكل ٣-١٦

مثال ١

أوجد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة :

د(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س

الحل

الدالة د متصلة وقابلة للاشتقاق لكل قيم س في ح

∴ د′(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤

، د′(س) = ٠ ⇐ ٣(س^{٢} - ٦س + ٨) = ٠ ⇐ (س - ٢)(س - ٤) = ٠ ⇐

س = ٢ أو س = ٤

د(٢) = ٨ - ٩(٤) + ٢٤(٢) = ٢٠

د(٤) = ٦٤ - ٩(١٦) + ٢٤(٤) = ١٦

∴ كل من النقطتين (٢ ، ٢٠) ، (٤ ، ١٦) تمثل نقطة حرجة.

ومن دراسة إشارة د′(س) عن يمين ويسار كل من س = ٢، س = ٤ كما في الجدول التالي، نجد أنه: عند س = ٢ توجد قيمة عظمى محلية هي د(٢) = ٢٠، بينما عند س = ٤ توجد قيمة صغرى محلية وهي: د(٤) = ١٦

	-∞	٢	٤	+∞
إشارة د′(س)	+ + +	- - -	+ + +
د(س)	↗	↘	↗
	متزايدة	متناقصة	متزايدة

لاحظنا فيما سبق كيفية استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية، ويمكن بدلاً من ذلك استخدام النظرية التالية معتمدين على إشارة ق″(حـ). حيث حـ عندها نقطة حرجة ، د′(حـ) = ٠

نظـريـة ٥

اختبار المشتقة الثانية **Second Derivative test**

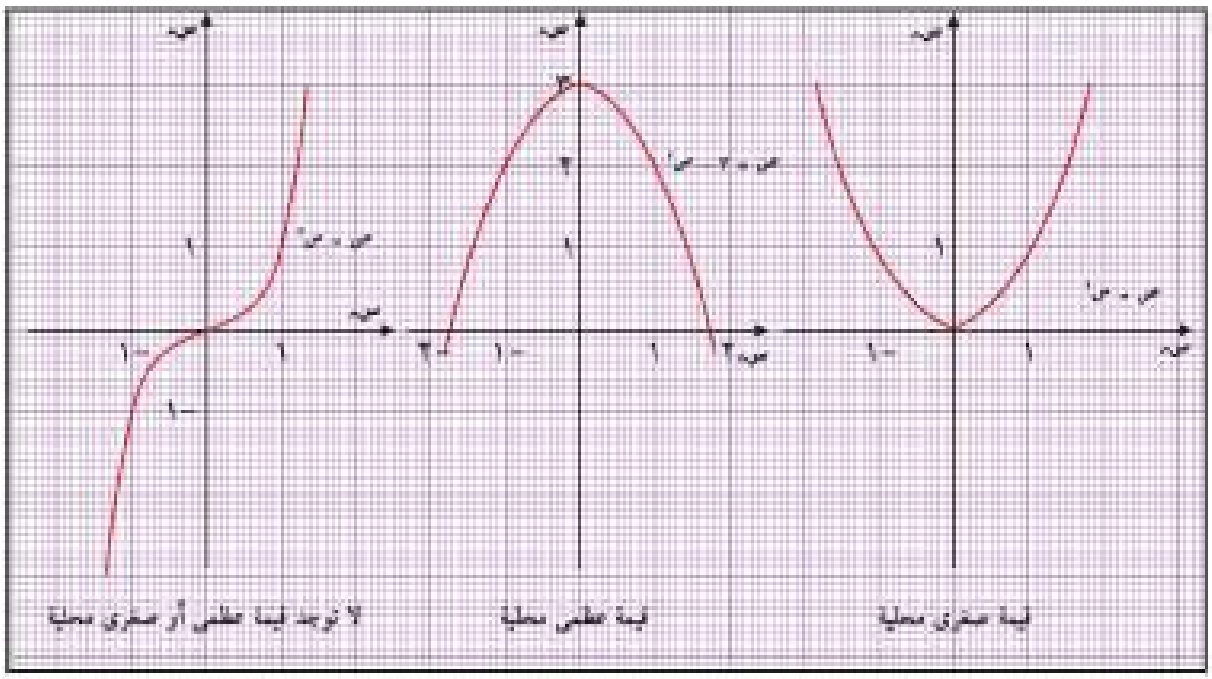
لتكن (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د حيث د′(حـ) = ٠

أ إذا كانت د″(حـ) > ٠ فإنَّ للدالة د قيمة صغرى محلية عند حـ.

ب إذا كانت د″(حـ) < ٠ فإنَّ للدالة د قيمة عظمى محلية عند حـ.

ملاحظة:

النظرية السابقة لا تشمل الحالة التي يكون عندها د″(حـ) = ٠، حيث إنه في هذه الحالة لا يمكن استخدام إشارة المشتقة الثانية ولذلك فلا بد هنا من العودة واستخدام اختبار المشتقة الأولى قبل النقطة الحرجة وبعدها لمعرفة ما إذا كان هناك قيمة عظمى أو صغرى محلية. ويبين الشكل (٣ - ١٧) ثلاث حالات تمثل الاحتمالات الثلاثة:



شكل (٣-١٧)

مثال ٢

استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة:

$د(س) = -س^٣ + ٦س^٢ + ٥$

الحل

$د'(س) = ١٢ س - ٣س^٢$

، $د'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س(٤ - س) = ٠$

∴ النقاط الحرجة عند س = ٠ ، س = ٤ فيحتمل وجود قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية عندهما

، $د''(س) = ١٢ - ٦س$

١ عند س = ٠ فإنَّ $د''(٠) = ١٢ - ٠ = ١٢ > ٠$

∴ د(٠) = ٥ هي قيمة صغرى محلية.

٢ عند س = ٤ فإنَّ $د''(٤) = ١٢ - ٢٤ = -١٢ < ٠$

∴ د(٤) = ٣٧ هي قيمة عظمى محلية.

مثال ٣

عيّن القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة $د(س) = س^٤$

الحل

$د'(س) = ٤س^٣$

، $د'(س) = ٠ \Leftarrow ٤س^٣ = ٠ \Leftarrow س = ٠$

∴ عند س = ٠ نقطة حرجة.

∴ عند س = ٠ هناك احتمال أن يكون للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية.

$د''(س) = ١٢س^٢$

وعند س = ٠ فإنَّ $د''(٠) = ٠$

وعليه فإنَّ استخدام المشتقة الثانية غير مفيد في هذه الحالة، ولا بد من العودة إلى الطريقة العامة باستخدام إشارة المشتقة الأولى:

س	$-\infty$	٠	∞
إشارة د′(س)	− − −		+ + +
د(س)	↘		↗
	متناقصة		متزايدة

وحيث إن إشارة المشتقة الأولى تتغير من سالبة إلى موجبة فإنه يوجد قيمة صغرى محلية عند النقطة س = ٠

∴ د(٠) = ٠ هي قيمة صغرى محلية. ■

تمارين

٣ - ٣ب

➤ بنود موضوعية:

• أولاً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ النقطة (-١ ، ٠) محلية عظمى للدالة: د(س) =

(أ) $(س + ١)^{٢}$ (ب) $-|س + ١|$ (جـ) $س^{٢}$ (د) $-(س + ١)^{٢}$

٢ تكون (حـ ، ق(حـ)) نقطة محلية عظمى لبيان الدالة ق إذا كان:

(أ) ق′(حـ) = ٠ ، ق″(حـ) > ٠ (ب) ق″(حـ) < ٠

(جـ) ق′(حـ) = ٠ ، ق″(حـ) < ٠ (د) ق(حـ) > ٠ ، ق″(حـ) < ٠

٣ الدالة التي لها قيمة صغرى محلية فيما يلي هي:

(أ) ق(س) = ٢س - ١ (ب) ت(س) = $-س^{٢}$

(جـ) د(س) = $س^{٢}$ + ١ (د) هـ(س) = $س^{٣}$

٤ توجد للدالة: د(س) = |س| + س + ٣ نقطة حرجة عند س =

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

٥ توجد قيمة صغرى مطلقة للدالة هـ: هـ(س) = |س + ١| + ٣ عند س =

(أ) -٣ (ب) ٠ (جـ) ١ (د) -١

٦ الدالة المتناقصة على (-∞ ، ١) فيما يلي هي د(س) =

(أ) $\frac{س - ١}{س + ١}$ (ب) $\frac{س + ١}{س - ١}$ (جـ) $\frac{١}{س}$ (د) |س|

٧ لتكن د: [-٢ ، ٤] ← ح ، د(س) = $س^{٢}$ فإنَّ عدد النقاط الحرجة للدالة د هي.

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٨ القيمة العظمى المطلقة للدالة ق: ق(س) = ٤ - $\sqrt{س}$ هي

(أ) ٠ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) غير موجودة.

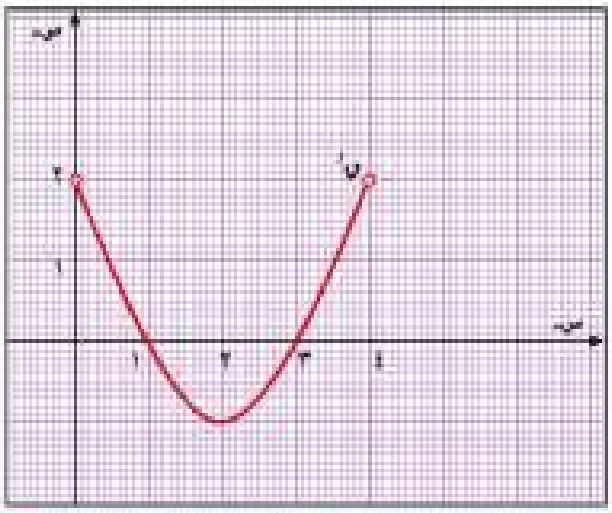
• ثانياً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة.

* إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + 1 & : -2 \leqslant \text{س} \leqslant 0 \\ (\text{س} - 1)^2 & : 0 \leqslant \text{س} \leqslant 2 \end{cases}$

دالة متصلة على [−٢ ، ٢] فإنَّ:

القائمة ١	القائمة ٢
١ القيمة الصغرى المحلية للدالة د عند س تساوي	أ صفر
	ب ١
٢ القيمة العظمى للدالة د في [−٢ ، ٢] تساوي	ج ٢
	د ٥
٣ القيمة الصغرى للدالة د في [−٢ ، ٢] تساوي	هـ −٢

* إذا كانت ق دالة متصلة على [٠ ، ٤]
وقابلة للاشتقاق على (٠ ، ٤)
والشكل المرسوم يمثل بيان ق′ فإنَّ:



القائمة ١	القائمة ٢
٤ إحدى الفترات التي تكون فيها الدالة ق متزايدة هي	أ (٢ ، ٤)
	ب (١ ، ٣)
٥ إحدى الفترات التي تكون فيها الدالة ق متناقصة هي	ج (٠ ، ١)
	د (٠ ، ٢)
٦ منحنى ق له نقطة عظمى محلية عند س ∈	هـ (١ ، ٤)

أسئلة مقالية:

• **أولاً: أجب عن الأسئلة التالية:**

في التمارين ١ - ٦ حدد النقاط الحرجة للدوال المعطاة واختبر كلًا منها إذا كان عندها قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

١ $د(س) = س^{٢} + ٢$

٢ $د(س) = \sqrt{س}$

٣ $د(س) = \frac{١}{س^{٢}}$

٤ $د(س) = س^{٤} - ٤س^{٢}$

٥ $د(س) = \frac{س}{س + ١}$

٦ $د(س) = (س - ١)^{\frac{٢}{٣}}$

في التمارين ٧ - ١٦ أوجد القيم العظمى المحلية أو القيم الصغرى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى أو اختبار المشتقة الثانية:

٧ $د(س) = س^{٢} - ٣س + ٢$

٨ $د(س) = ٢س - س^{٢}$

٩ $د(س) = س^{٣} - س$

١٠ $د(س) = \frac{س^{٣}}{٩} - ٣س + ٤$

١١ $د(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}$

١٢ $د(س) = (س - ٢)^{٢}$

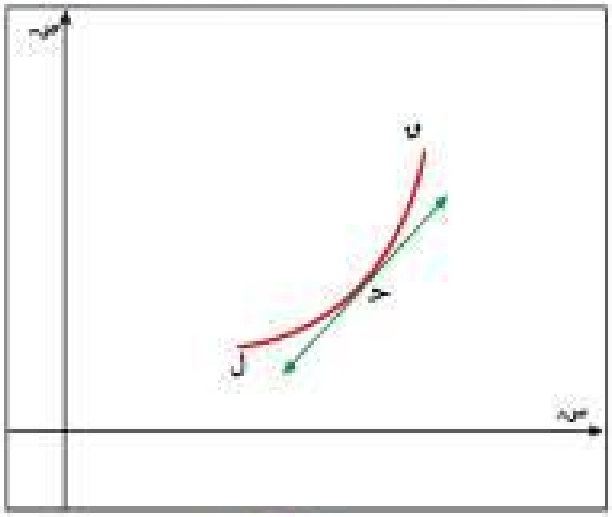
١٣ $د(س) = \frac{١}{س^{٢} + ١}$

١٤ $د(س) = (س - ١)^{\frac{٢}{٣}}$

١٥ $د(س) = س + \frac{١}{س}$

١٦ $د(س) = \frac{١}{س - ١}$

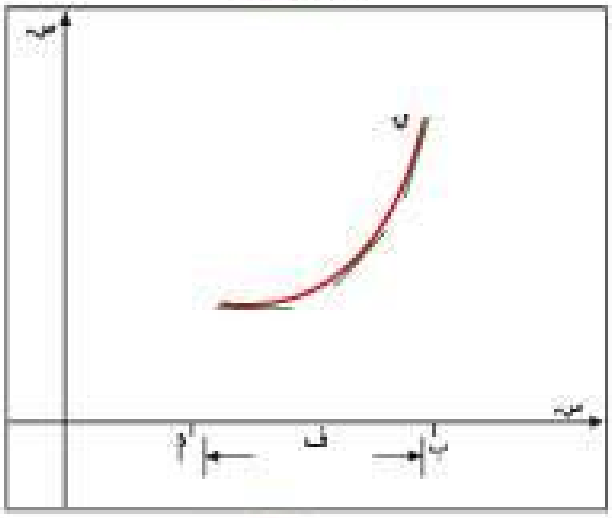
Concavity and InFlection Point



شكل ٣-١٨

في شكل (٣ - ١٨)

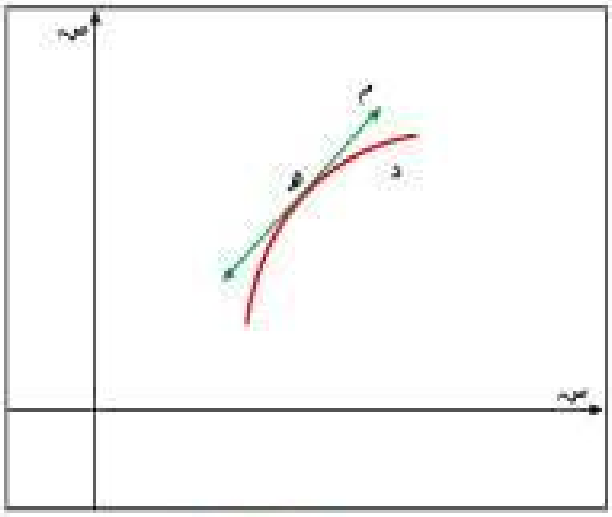
نلاحظ أن جميع نقاط منحنى الدالة ق في جوار للنقطة حـ عدا النقطة حـ تقع فوق المماس ل ويقال في هذه الحالة إن منحنى الدالة مقعر للأعلى عند النقطة حـ.



شكل ٣-١٩

في شكل (٣ - ١٩)

نقول إن منحنى الدالة ق مقعر للأعلى في الفترة ف إذا كان مقعراً للأعلى عند كل نقطة من نقاط ف.



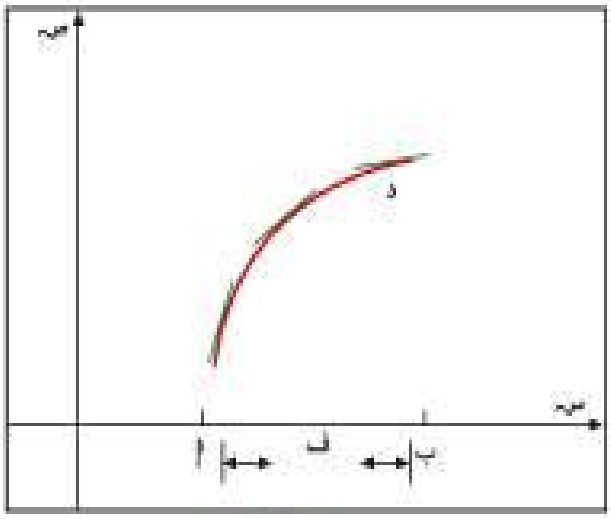
شكل ٣-٢٠

في شكل (٣ - ٢٠)

نلاحظ أن جميع نقاط منحنى الدالة د في جوار للنقطة هـ عدا النقطة هـ تقع تحت المماس م ويقال في هذه الحالة أن منحنى الدالة مقعر للأسفل عند النقطة هـ.

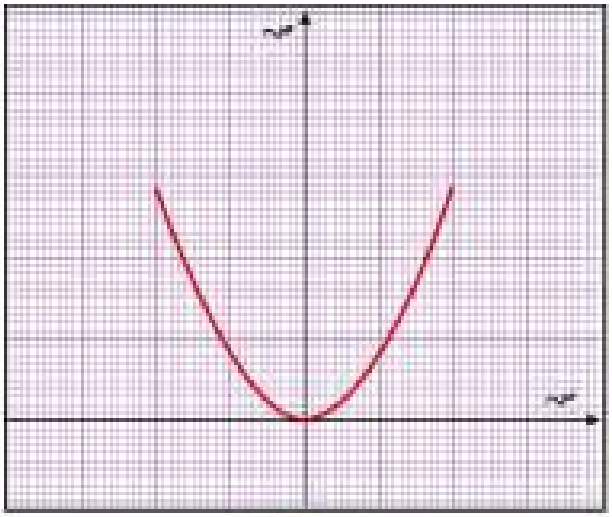
في شكل (٣ - ٢١)

نقول إن منحنى الدالة د مقعر للأسفل في الفترة ف إذا كان مقعراً للأسفل عند كل نقطة من نقاط ف.

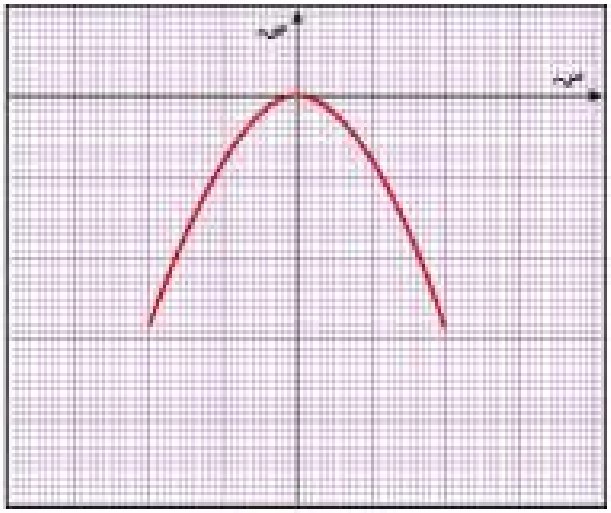


شكل ٣-٢١

التقعر وإشارة المشتقة الثانية:



شكل ٣-٢٢



شكل ٣-٢٣

لاحظ أن بيان الدالة: هـ(س) = س^{٢} تقعره للأعلى انظر شكل (٣ - ٢٢) وأن هـ″(س) = ٢ > ٠

وكذلك بيان الدالة: ت(س) = -س^{٢} تقعره للأسفل انظر شكل (٣ - ٢٣) وأن هـ″(س) = -٢ < ٠

وبشكل عام نورد التعميم التالي:

تعميم

إن تقعر منحنى الدالة ق في (أ ، ب) يكون

١ للأعلى إذا كانت ق″(س) > ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب)

٢ للأسفل إذا كانت ق″(س) < ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب)

ملاحظة: يمكن أن يشمل التعميم السابق الفترات غير المحددة مثل: (أ ، ∞) ، (-∞ ، أ).

مثال ١

ابحث تقعر منحنى الدالة: ق(س) = ٢س^{٣} + ٦س

الحل

الدالة ق متصلة على ح وقابلة للاشتقاق على ح.

ق′(س) = ٦ س^{٢} + ٦

ق″(س) = ١٢ س

نضع ق″(س) = ٠

∴ ١٢س = ٠ ⇐ س = ٠

س	−∞	٠	∞
إشارة ق″(س)	− − −	صفر	+ + +
التقعر	∩		∪

بيان ق مقعر للأعلى في (٠ ، ∞)

بيان ق مقعر للأسفل في (−∞ ، ٠) ■

ملاحظة:

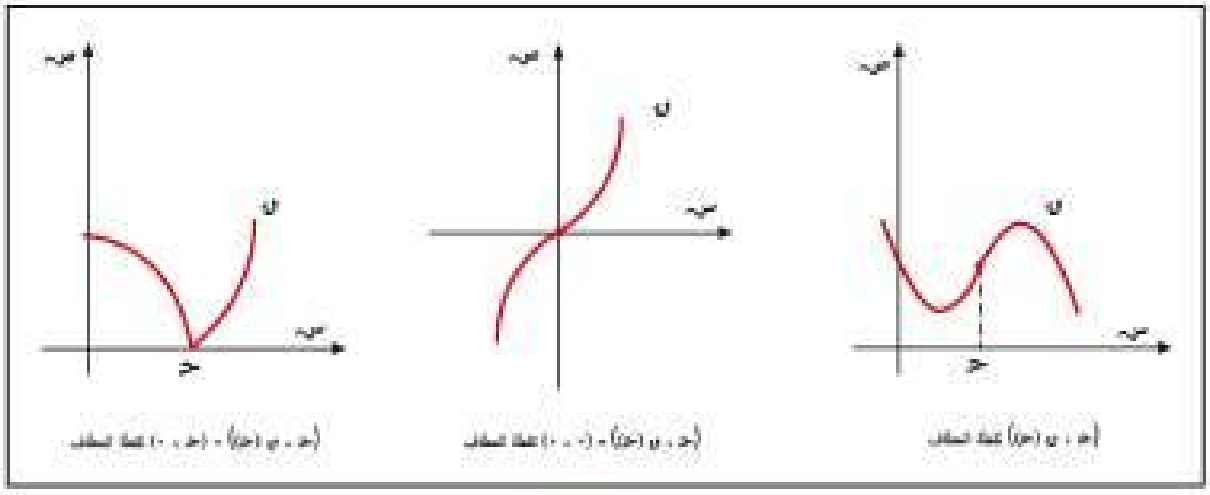
من الجدول السابق نلاحظ أن تقعر منحنى الدالة يتغير عند المرور بالصفر دعنا نتعرف النقطة التي يغير فيها منحنى الدالة تقعره.

تعريف

نقطة الانعطاف Inflexion Point

لتكن ق دالة متصلة عند حـ تسمى النقطة (حـ، ق (حـ)) نقطة انعطاف لمنحنى ق إذا غير منحنى الدالة تقعره عندها.

لاحظ الأشكال التالية :



شكل (٣-٢٤)

لاحظ أنه عند نقطة الانعطاف تكون ن″(حـ) = ٠ أو غير موجودة.

مثال ٢

أوجد نقط الانعطاف للدالة : ن(س) = ٢س^{٤} − ٨س^{٣}

الحل

ن دالة متصلة على ح وقابلة للاشتقاق على ح

ن′(س) = ٨س^{٣} − ٢٤س^{٢}

ن″(س) = ٢٤س^{٢} − ٤٨س

نضع ن″(س) = ٠

٢٤س^{٢} − ٤٨س = ٠

٢٤س(س − ٢) = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ٢

س	−∞		٠		٢		∞
إشارة ن″(س)		+ + +	صفر	− − −	صفر	+ + +	
التقعر		∪		∩		∪	

نلاحظ من الجدول أن

(٢ ، ن(٢)) ، (٠ ، ن(٠)) نقط انعطاف.

س = ٢ ، ∴ ص = ٣٢ − ٦٤ = −٣٢ ، ∴ (٢ ، −٣٢) نقطة انعطاف

س = ٠ ، ∴ ص = ٠ − ٠ = ٠ ، ∴ (٠ ، ٠) نقطة انعطاف

تمارين

٣ - ٤

➤ بنود موضوعية:

• أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة في كل مما يلي:

١ إذا كانت (أ ، ق(أ)) نقطة انعطاف للدالة ق فإنَّ ق''(أ) = ٠

٢ النقطة (٠ ، ٠) نقطة انعطاف للدالة: ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^٢}$

٣ منحنى الدالة: ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ مقعر للأعلى في ح.

٤ منحنى الدالة ق: [١ ، ٤] ← ح ، ق(س) = س^٣ - ٣س مقعر للأعلى في (١ ، ∞)

٥ للدالة: ق(س) = س^٣ - ٣س نقطة انعطاف.

• ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ لتكن ق(س) = س^٣ - ٣س - ١ فإن نقطة الانعطاف لبيان ق هي:

(أ) (٠ ، -١) (ب) (١ ، -٣) (ج) (-١ ، ١) (د) (٠ ، ١)

٢ الدالة التي تقعر منحناها إلى أسفل في ح فيما يلي هي:

(أ) د(س) = ٣ + س^٤ (ب) د(س) = ٣ - س^٢

(ج) د(س) = ٣ - س^٣ (د) د(س) = |س|

٣ توجد نقطة انعطاف لبيان الدالة: ق(س) = |٤ - س^٣| عند:

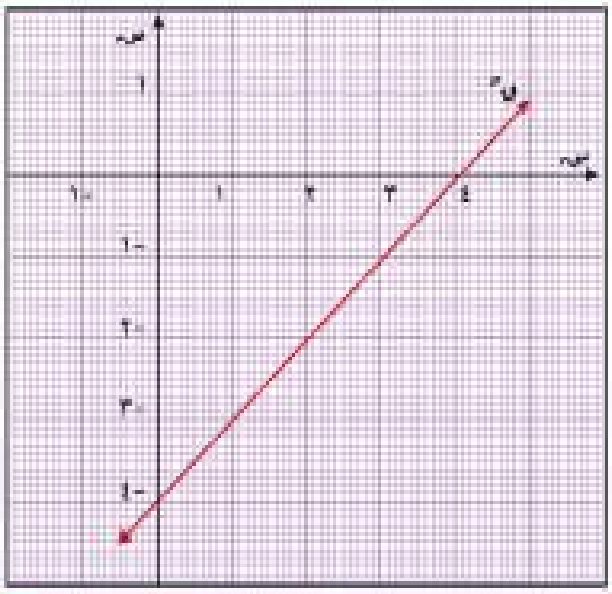
(أ) (-٢ ، ٠) (ب) (٢ ، ١) (ج) (٠ ، ٠) (د) (٠ ، -٢)

● ثالثاً: في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة.

● للدالة ق:

القائمة ١	القائمة ٢
١ ق(س) = (س − ١)^{٤} نقط انعطاف عددها	أ ٤
	ب ٣
٢ ق(س) = س^{٣} + س + ٥ نقط انعطاف عددها	ج ٢
	د ١
٣ ق(س) = (س^{٢} − ٣)^{٢} نقط انعطاف عددها	هـ ٠

● ق دالة حدودية من الدرجة الثالثة والشكل المرسوم يوضح بيان ق″ فإنَّ:



القائمة ١	القائمة ٢
٤ بيان ق مقعر نحو الأعلى في	أ (−∞ ، ٤)
٥ بيان ق مقعر نحو الأسفل في	ب (٤ ، ∞)
٦ للدالة ق نقطة انعطاف عند س تنتمي إلى	ج (−٤ ، ٥]
	د {٠ ، ١ ، ٢}

أسئلة مقالية:

حدد الفترات التي يكون فيها تقعر منحنيات كل من الدوال الآتية للأعلى. والفترات التي يكون فيها التقعر للأسفل وأوجد نقط الانعطاف إن وجدت:

١ $ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٢$

٢ $ق(س) = س^{٣} + ٦س$

٣ $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤$

٤ $ق : [٠ ، \infty) \leftarrow ح$ ، $ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٢}$

٥ $ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$

٦ $ق(س) = (س - ١)^{\frac{٢}{٣}}$

٣-٥ رسم بيان الدالة الحدودية

Polynomial Function's Diagram

تمكنا في البنود السابقة من:

تحديد فترات التزايد وفترات التناقص لدالة د، وتحديد النقاط الحرجه والقيم العظمى المحلية أو الصغرى المحلية. وكذلك تمكنا من تحديد نقط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة د تقعره لأعلى أو لأسفل. وسوف نستفيد من كل ما سبق في رسم بيان الدالة الحدودية بصورة أدق.

وفيما يلي سنوضح الخطوات اللازم اتباعها في رسم بيان دالة حدودية.

١ عين مجال الدالة د.

٢ عين النقط الحرجة للدالة د.

٣ حدد فترات تزايد الدالة وفترات تناقص الدالة مستخدماً بحث إشارة د′(س).

٤ عين النقط العظمى المحلية والنقط الصغرى المحلية إن وجدت.

٥ ادرس تقعر المنحنى وحدد نقط الانعطاف إن وجدت.

٦ أوجد نقطاً إضافية تستعين بها لإكمال الرسم.

٧ ارسم بيان الدالة مستخدماً نتائج الخطوات السابقة.

مثال ١

ارسم بيان الدالة د: د(س) = س^{٣} − ٣س + ١

الحل

مجال الدالة د هو ح

الدالة د متصلة على ح

لإيجاد النقاط الحرجه:

د′(س) = ٣س^{٢} − ٣

نضع د′(س) = ٠

٣س^{٢} − ٣ = ٠

∴ ٣(س^{٢} − ١) = ٠

٣(س − ١)(س + ١) = ٠

س = ١ أو س = −١

د(١) = ١ − ٣ + ١ = −١ ، د(−١) = −١ + ٣ + ١ = ٣

∴ (١ ، −١) ، (−١ ، ٣) نقاط حرجة للدالة د.

س	−∞		−١		١		+∞
إشارة د′(س)		+ + +	صفر	− − −	صفر	+ + +	
د(س)		↗	٣	↘	−١	↗	
		متزايدة		متناقصة		متزايدة	

من الجدول نلاحظ أن:

الدالة د متزايدة على (−∞ ، −١] ، [١ ، ∞)، الدالة د متناقصة على [−١ ، ١].

عند س = −١ قيمة عظمى محلية هي ٣،

عند س = ١ قيمة صغرى محلية هي −١

والآن لإيجاد نقط الانعطاف:

د″(س) = ٦س

نضع د″(س) = ٠

٦س = ٠

س = ٠

س	−∞		٠		∞
إشارة د″(س)		− − −	صفر	+ + +	
التقعر		∩		∪	

من الجدول نلاحظ أن:

منحنى الدالة د مقعراً للأسفل في (−∞ ، ٠)، منحنى الدالة د مقعراً للأعلى في (٠ ، ∞)

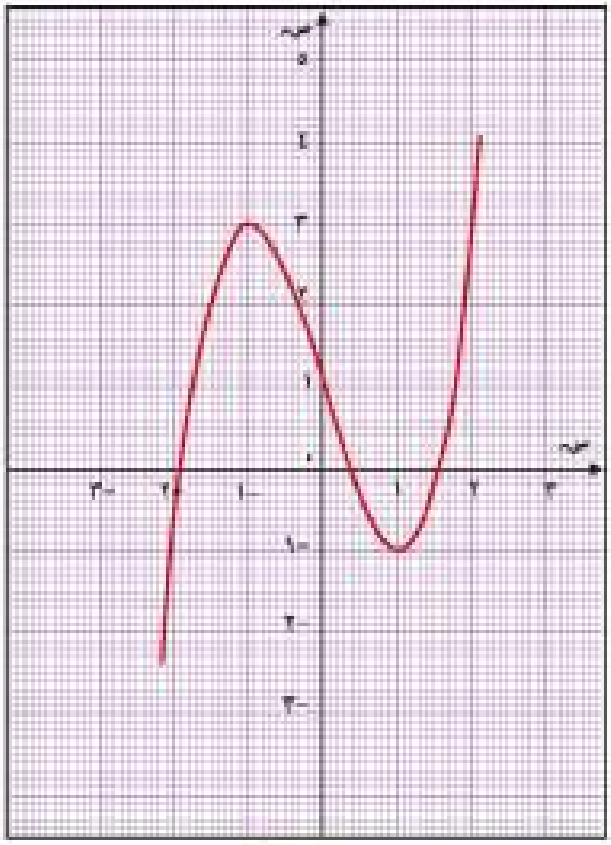
د(٠) = ١

∴ (٠ ، ١) نقطة انعطاف.

الجدول التالي يوضح نقاط تنتمي لمنحنى الدالة د .

س	-٢	-١	٠	١	٢
ق(س)	-١	٣	١	-١	٣

شكل (٣ - ٢٥) يمثل بيان الدالة د



شكل ٣-٢٥

مثال ٢

ارسم بيان الدالة ق : ق(س) = ٤س^{٣} - س^{٤}

الحل

مجال الدالة ق هو ح

الدالة ق متصلة على ح

لإيجاد النقاط الحرجة :

ق$'$(س) = ١٢س^{٢} - ٤س^{٣}

١٢س^{٢} - ٤س^{٣} = ٠

٤س^{٢} (٣ - س) = ٠

إما س = ٠ أو س = ٣

ق(٠) = ٠ ، ق(٣) = ٢٧

∴ (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٢٧) نقاط حرجة .

س	-∞		٠		٣		+∞
إشارة ق$'$(س)		+ + +		+ + +		- - -	
ق(س)		↗	صفر	↗	٢٧	↘	
		متزايدة		متزايدة		متناقصة	

من الجدول نلاحظ أن :

الدالة ق متزايدة على (-∞ ، ٠] ، [٠ ، ٣]

الدالة ق متناقصة على [٣ ، ∞)

عند س = ٣ قيمة عظمى محلية هي ٢٧

ولإيجاد نقط الانعطاف:

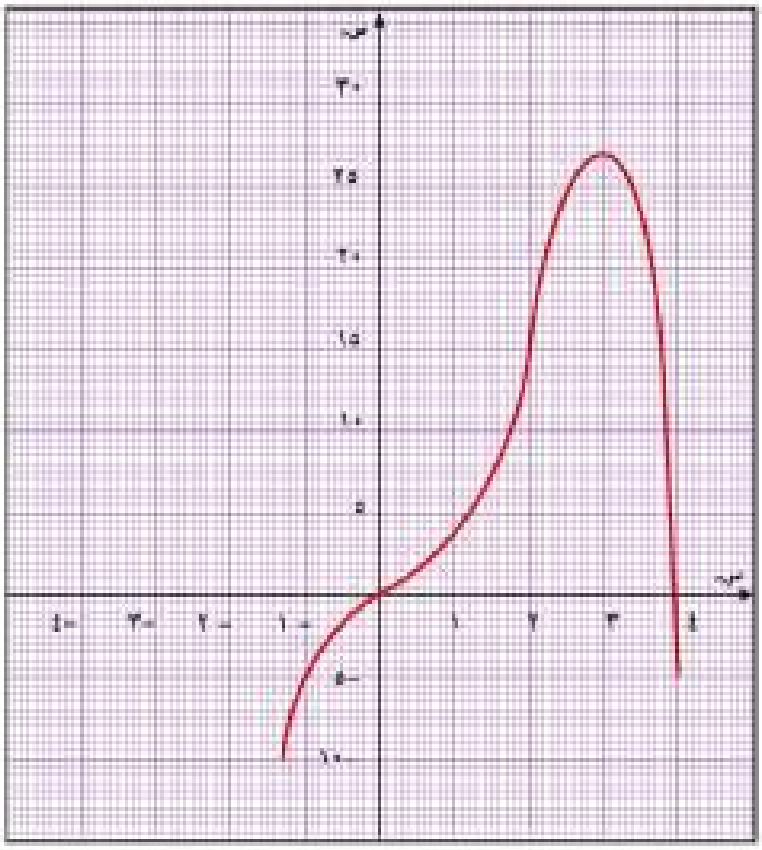
$ق''(س) = ٢٤س - ١٢س^٢$

$٢٤س - ١٢س^٢ = ٠$

$١٢س (٢ - س) = ٠$

إما س = ٠ أو س = ٢

س	$-\infty$		٠		٢		∞
إشارة ق''(س)		- - -	صفر	+ + +	صفر	- - -	
التقعر		∩		∪		∩	



منحنى الدالة ق مقعراً للأسفل في $(-\infty ، ٠)$ ، $(٢ ، \infty)$

ومنحنى الدالة ق مقعراً للأعلى في $(٠ ، ٢)$.

$ق(٢) = ١٦$

$\therefore$ $(٢ ، ١٦)$ نقطة انعطاف

وكذلك $(٠ ، ٠)$ نقطة انعطاف

شكل ٣-٢٦

الجدول التالي يوضح نقاط تنتمي لمنحنى الدالة ق

س	-١	٠	٢	٣	٤
ق(س)	-٥	٠	١٦	٢٧	٠

شكل (٣ - ٢٦) يمثل بيان الدالة ق .

تمارين

٣ - ٥

ارسم بيان كل من الدوال الآتية :

١ $د(س) = س^{٢} - ١٢س + ١٠$

٢ $د(س) = ٤ - ٣س - س^{٢}$

٣ $د(س) = \frac{١}{٤} س^{٤} - ٢س^{٢} + ٤$

٤ $د(س) = (س - ٢)^{٢} + ١$

٥ $د(س) = ٢س^{٤} - ٤س^{٢} + ١$

٦ $د(س) = س^{٤} - ٢س^{٢}$

٧ $د(س) = ٦س^{٢} - س^{٣} + ١$

٨ $د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

٩ $د(س) = ٣ + ٤س^{٢} - س^{٤}$

١٠ $د(س) = (س - ٢)^{٤}$

٣-٦ تطبيقات عملية للقيم العظمى أو الصغرى

Application

يوجد الكثير من المسائل الحياتية التي تحتاج إلى معرفة القيم العظمى أو الصغرى لحلها، ونستعرض بعضاً منها في هذا البند، وحيث إن معظم هذه المسائل تحتاج إلى تحويل من مسائل حياتية ولفظية إلى مسائل رياضية، فيقترح اتباع الخطوات التالية:

١ اقرأ المسألة بدقة وتمعن في مضمونها.

٢ حدّد المتغيرات وضع رموزاً لها، وارسم صورة لبيان ذلك (إن أمكن).

٣ حدّد المتغير المطلوب إيجاد قيمته العظمى أو الصغرى، واكتب الصيغة التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى في (٢).

٤ استخدم المعلومات المعطاة في المسألة لاختصار المتغيرات لمتغير واحد مستقل فقط، ومن ثم عبر عن قيمة المتغير في (٣) بمعادلة تربطه بالمتغير المستقل الوحيد وليكن س.

٥ حدد مجموعة قيم س المحتملة.

٦ إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مغلقة نبحث عن القيم الصغرى المحلية أو العظمى المحلية عند النقاط الحرجة وأطراف الفترة.

٧ إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مفتوحة نبحث عند النقاط الحرجة ونستخدم أحد الاختبارات للتأكد من أن القيمة صغرى أم عظمى.

مثال ١

عددان موجبان مجموعهما ٢٠ فما هما العددان إذا كان:

أ حاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

ب مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن؟

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ٢٠ − س ، س ∈ (٠ ، ٢٠)

أ نرمز لحاصل ضرب العددين بالرمز ح(س)

∴ ح(س) = س (٢٠ − س) = ٢٠س − س^{٢}

ح′(س) = ٢٠ − ٢س = ٢(١٠ − س)

ح′(س) = ٠ ⇐ س = ١٠

، ح″(س) = −٢ < ٠ ⇐ ح(س) قيمة عظمى عندما س = ١٠

∴ العددان هما ١٠ ، ١٠

ب نرمز لمجموع مربعي العددين بالرمز م(س)

∴ م(س) = س^{٢} + (٢٠ − س)^{٢}

، م′(س) = ٢س + ٢(٢٠ − س)(−١)

= ٢س − ٤٠ + ٢س = ٤(س − ١٠)

∴ م′(س) = ٠

⇐ ٤(س − ١٠) = ٠ ⇐ س = ١٠

م″(١٠) = ٤ > ٠ ⇐ م(س) قيمة صغرى عند س = ١٠

∴ العددان هما أيضاً ١٠ ، ١٠ ■

مثال ٢

أوجد أبعاد المنطقة المستطيلة التي مساحتها أكبر ما يمكن والتي يمكن رسمها داخل نصف دائرة طول قطرها يساوي ٤ وحدات.

الحل

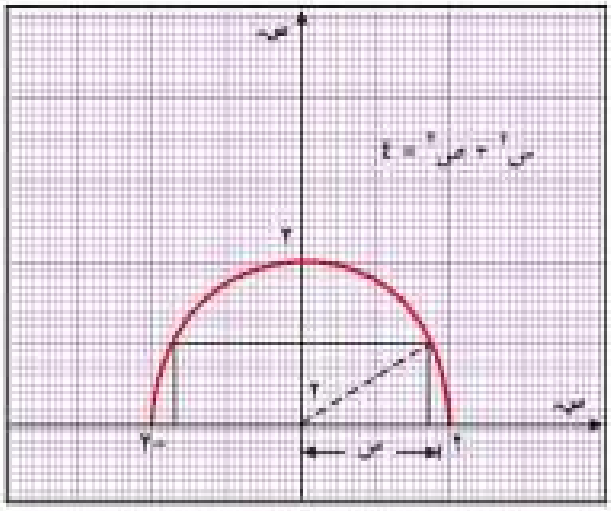
نرسم المستطيل داخل نصف الدائرة كما في الشكل (٣ − ٢٧).

بفرض أن طول المستطيل هو ٢س

∴ عرضه هو $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

∴ المساحة م(س) = ٢س $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

والمطلوب هو إيجاد أكبر قيمة للمساحة م(س) في الفترة ٠ ≤ س ≤ ٢، وذلك عن طريق اختبار قيم م(س) عند النقاط الحرجة والقيمتين عند الطرفين.



شكل ٣-٢٧

∵ م(س) = ٢س $\sqrt{٤ - س^٢}$

∴ م′(س) = ٢ $\sqrt{٤ - س^٢}$ − $\frac{٢س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

= $\frac{٢(٤ - س^٢) - ٢س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}}$ = $\frac{٤(٢ - س^٢)}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

∴ م′(س) غير موجودة عند س = ٢ ، س = −٢

، م′(س) = ٠ ⇐ ٢ − $س^٢$ = ٠ ⇐ س = − $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$

وحيث إن ٠ ≤ س ≤ ٢ فإنَّ كلًّا من س = − $\sqrt{٢}$ ، س = −٢ تستبعد

∴ هناك نقطة حرجة عند س = $\sqrt{٢}$

∴ م($\sqrt{٢}$) = ٢ $\sqrt{٢}$ ($\sqrt{٤ - ٢}$) = ٤

، م(٢) = ٢(٢) $\sqrt{٤ - ٤}$ = ٠

، م(٠) = ٠

∴ أكبر مساحة للمنطقة المستطيلة هي ٤ .

∴ طول المستطيل = ٢س = ٢ $\sqrt{٢}$

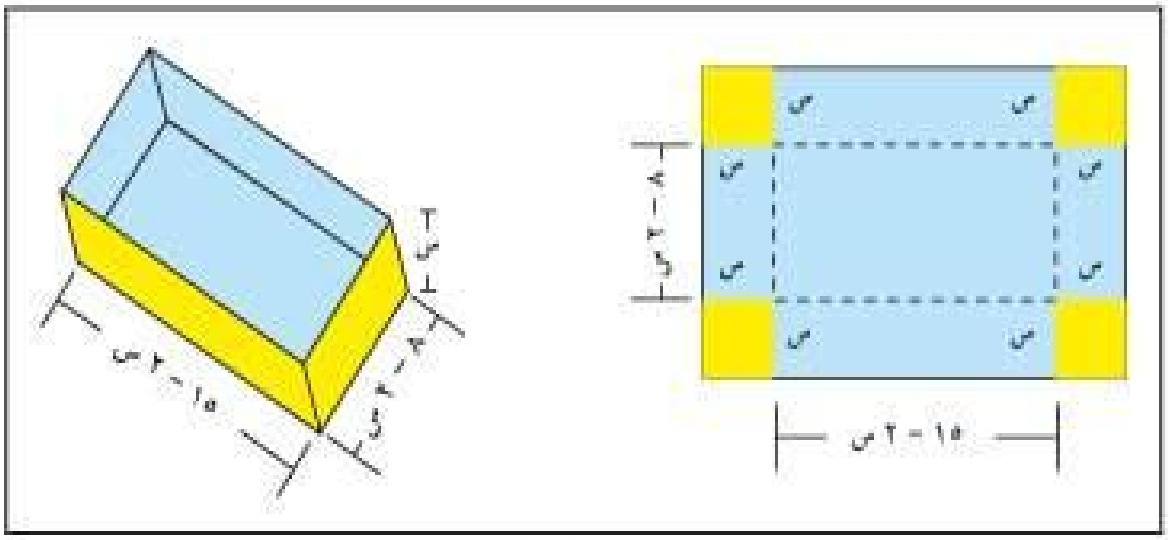
وعرض المستطيل = $\sqrt{٤ - س^٢}$ = $\sqrt{٤ - (\sqrt{٢})^٢}$ = $\sqrt{٢}$ ■

مثال ٣

يراد صنع صندوق مفتوح من أعلى باستعمال قطعة من الكرتون مستطيلة الشكل طولها ١٥سم وعرضها ٨سم وذلك بقطع مربعات متساوية عند زواياها الأربع ثم ثني الأجزاء البارزة إلى أعلى. ما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع المراد قطعه هو س سم كما في الشكل (٣ − ٢٨)، فتكون قاعدة الصندوق بعد الثني مستطيلة الشكل وأبعادها (١٥ − ٢س)سم، (٨ − ٢س)سم ويكون ارتفاع الصندوق س سم.



شكل ٣-٢٨

∴ حجم الصندوق ح(س) = (١٥ − ٢س)(٨ − ٢س)س ، ٠ < س < ٤

∴ ح(س) = ١٢٠س − ٤٦س^{٢} + ٤س^{٣}

، ح′(س) = ١٢س^{٢} − ٩٢س + ١٢٠

= ٤(٣س^{٢} − ٢٣س + ٣٠)

= ٤(٣س − ٥)(س − ٦)

، ح′(س) = ٠ ⟸ س = $\frac{٥}{٣}$ أو س = ٦

وحيث إن س = ٦ ليست في مجال الدالة فإنه يتم استبعادها .

ح″(س) = ٢٤س − ٩٢

∴ ح″$\left(\frac{٥}{٣}\right)$ = ٢٤ × $\frac{٥}{٣}$ − ٩٢ = −٥٢ < ٠

ولذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عندما تكون س = $\frac{٥}{٣}$ سم ويكون

حجم الصندوق = ح $\left(\frac{٥}{٣}\right)$ = $\frac{٢٤٥٠}{٢٧}$

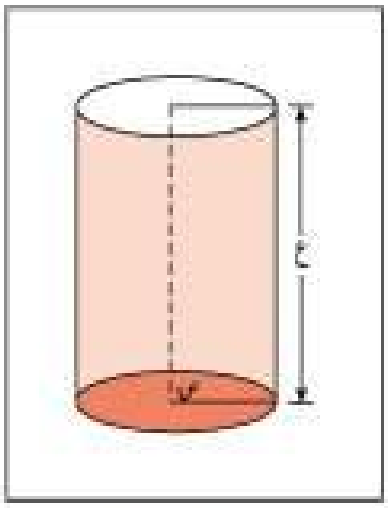
حجم الصندوق ≈ ٩٠,٧ سم^{٣}

مثال ٤

يراد عمل علبة من الصفيح على شكل أسطواني بحيث تكون سعتها ١٠٠ بوصة مكعبة. فما هي أبعادها لتكون كمية الصفيح المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو س وأن ارتفاع العلبة هو ع كما في الشكل (٣ - ٢٩) لنستخدم أقل كمية من الصفيح يعني أن يكون مجموع مساحة جدران العلبة وقاعدتيها أصغر ما يمكن.



شكل ٣-٢٩

∴ المساحة الإجمالية لجوانب العلبة وقاعدتيها هي:

م = ٢ π س^{٢} + ٢ π س ع ..... (١)

وحيث إن حجم العلبة معلوم ويساوي ١٠٠ بوصة مكعبة

∴ ح = π س^{٢} ع = ١٠٠

∴ ع = $\frac{١٠٠}{\pi س^{٢}}$ ..... (٢)

وبالتعويض عن ع في المعادلة (١) نحصل على:

م = ٢ π س^{٢} + ٢ π س × $\frac{١٠٠}{\pi س^{٢}}$

= ٢ π س^{٢} + $\frac{٢٠٠}{س}$ ..... (٣)

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٤ π س − $\frac{٢٠٠}{س^{٢}}$ = $\frac{٤\pi س^{٣} - ٢٠٠}{س^{٢}}$ ..... (٤)

، $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ⇐ ٤ π س^{٣} = ٢٠٠

⇐ س = $\sqrt[٣]{\frac{٥٠}{\pi}}$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث س = ٠ هي خارج مجال الدالة.

وللتأكد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة نوجد المشتقة الثانية:

∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = ٤π + $\frac{٤٠٠}{س^{٣}}$ > ٠ ∀ س ∈ ح$^{+}$

∴ س = $\sqrt[٣]{\frac{٥٠}{\pi}}$ هي قيمة طول نصف القطر

ولذلك فإنّ ع = $\frac{١٠٠}{\pi س^{٢}}$ = $\frac{١٠٠}{\pi \left(\frac{٥٠}{\pi}\right)^{\frac{٢}{٣}}}$ ■

تمارين

٣ - ٦

١ أوجد أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته ١٦ سم^{٢}.

٢ أثبت أن أكبر مستطيل من حيث المساحة إذا كان محيطه معلوم (ل) هو مربع.

٣ أوجد أكبر مساحة لمثلث قائم الزاوية إذا كان طول وتره هو ٥سم.

٤ أسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائري قائم بحيث يكون محورا المخروط والأسطوانة متطابقين إذا كان ارتفاع المخروط ٦سم وطول نصف قطر قاعدته ٣سم فما هي أبعاد الأسطوانة ليكون حجمها أكبر ما يمكن؟

٥ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة. فإذا كان محيط النافذة ١٥ قدماً. أوجد أبعاد النافذة التي تسمح بدخول أكبر كمية من الضوء.

٦ أوجد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة داخل كرة طول نصف قطرها ١٠سم بحيث يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن.

٧ أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها **ن**.

٣ – ٧ ملخص وتمارين عامة

١ معادلة المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة له (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي:

ص – ص$_{١}$ = د′(س) (س – س$_{١}$)

ومعادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة

$$ص - ص_{١} = \frac{١}{د'(س_{١})} (س - س_{١})$$

٢ يقال للدالة د إنها متزايدة في الفترة ف إذا كان

لكل س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈ ف ، س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإنَّ د(س$_{١}$) < د(س$_{٢}$).

٣ يقال للدالة د إنها متناقصة في الفترة ف إذا كان

لكل س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ∈ ف ، س$_{١}$ < س$_{٢}$ فإنَّ د(س$_{١}$) > د(س$_{٢}$).

٤ لتكن الدالة د متصلة على [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق في الفترة (أ ، ب):

أ إذا كانت د′(س) > ٠ لكل قيم س ∈ (أ ، ب) فإنَّ د تكون دالة متزايدة في [أ ، ب].

ب إذا كانت د′(س) < ٠ لكل قيم س ∈ (أ ، ب) فإنَّ د تكون دالة متناقصة في [أ ، ب].

٥ لتكن د دالة أوسع مجال لها هو ص.

أولاً – إذا كانت ف ⊆ ص وكانت حـ ∈ ف بحيث،

١ د(س) ≥ د(حـ) ∀ س ∈ ف فإننا نقول إن

د(حـ) هي قيمة عظمى للدالة د في ف.

٢ د(س) ≤ د(حـ) ∀ س ∈ ف فإننا نقول إن

د(حـ) هي قيمة صغرى للدالة د في ف.

ثانياً – إذا كانت ف = ص وكانت حـ ∈ ف بحيث:

١ د(حـ) قيمة عظمى في ف، نقول إن د(حـ) قيمة عظمى مطلقة.

٢ د(حـ) قيمة صغرى في ف ، نقول إن د(حـ) قيمة صغرى مطلقة.

٦ إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] فإنَّ للدالة د قيمة عظمى وقيمة صغرى في هذه الفترة.

٧ لتكن د دالة مجالها مر ، حـ ∈ مر.

أ تقول إن د(حـ) قيمة عظمى محلية للدالة د إذا كان هناك فترة مفتوحة تحتوي على حـ بحيث تكون د(حـ) قيمة عظمى في ف.

ب تقول إن د(حـ) قيمة صغرى محلية للدالة د

إذا كان هناك فترة مفتوحة تحتوي على حـ بحيث تكون د(حـ) قيمة صغرى في ف.

٨ إذا كان للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة حـ ∈ (أ ، ب) ، فإنه إمّا أن يكون د′(حـ) = ٠ أو تكون د′(حـ) غير موجودة.

٩ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = حـ وكانت د′(حـ) = صفر أو د′(حـ) غير موجودة فإنَّ النقطة (حـ ، د(حـ)) تسمى نقطة حرجة.

١٠ إذا كانت د دالة متصلة في جوار للنقطة حـ مثل (أ ، ب) وكانت:

أ د′(س) ⩾ ٠ عند كل س ∈ (أ ، حـ).

وكذلك د′(س) ⩽ ٠ عند كل س ∈ (حـ ، ب)

فإنَّ للدالة د قيمة عظمى محلية عند حـ.

ب د′(س) ⩽ ٠ عند كل س ∈ (أ ، حـ)

وكذلك د′(س) ⩾ ٠ عند كل س ∈ (حـ ، ب)

فإنَّ للدالة د قيمة صغرى محلية عند حـ.

١١ لتكن (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د حيث د′(حـ) = ٠

أ إذا كانت د″(حـ) > ٠ فإنَّ للدالة د قيمة صغرى محلية عند حـ.

ب إذا كانت د″(حـ) < ٠ فإنَّ للدالة د قيمة عظمى محلية عند حـ.

١٢ إن تقعر منحنى الدالة ق في (أ ، ب) يكون

أ للأعلى إذا كانت ق″(س) > ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب).

ب للأسفل إذا كانت ق″(س) < ٠ ∀ س ∈ (أ ، ب).

١٣ لتكن ق دالة متصلة عند حـ ، تسمى النقطة (حـ ، ق(حـ)) نقطة انعطاف لمنحنى ق إذا غير منحنى الدالة تقعره عندها.

١٤ عند نقطة الانعطاف تكون ق″(حـ) = ٠ أو ق″(حـ) غير موجودة.

تمارين عامة

٣ - ٧

➤ بنود موضوعية:

• أولاً: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة في كل مما يلي:

١ إذا كانت ق(س) = س^{٢} + ١ فإنَّ $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق'(١ + هـ) - ق'(١)}{هـ} = ٦$

٢ إذا كانت الدالة ق معرفة على [أ ، ب] وكانت ق لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في [أ ، ب] فإنَّ ق متصلة على [أ ، ب].

٣ الدالة: د(س) = $\frac{-١}{س}$ متزايدة في ح - {٠}

٤ كل دالة حدودية من الدرجة الثالثة لها نقطة انعطاف واحدة.

٥ إذا كانت د دالة متصلة على [أ ، ب] ومتزايدة على (أ ، ب) فإنَّ د(ب) قيمة عظمى للدالة د في [أ ، ب].

٦ إذا كانت ق دالة معرفة على [أ ، ب] ومتزايدة على [أ ، ب] فإنَّ ق'(س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب).

٧ إذا كانت ق(س) = $\frac{١}{س}$ فإنَّ المماس لمنحنى الدالة ق عند (-١ ، -١) عمودي على المستقيم: ص = س.

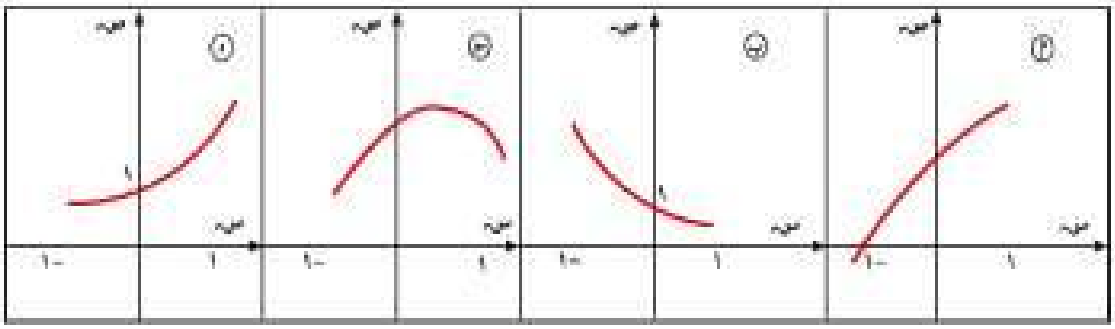
٨ إذا كانت (١ ، د(١)) نقطة صغرى محلية لبيان د فإنَّ د''(١) > ٠ .

٩ منحنى الدالة: د(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} مقعراً للأعلى.

١٠ إذا كانت ص^{٢} - ٢$\sqrt{س}$ = ٠ فإنَّ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{ص^{٣}}$ حيث ص ≠ ٠

• **ثانياً: لكل بند مما يلي عدة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:**

١ إذا كانت ق دالة متصلة على [-١ ، ١] وكانت ق′(س) > ٠ ، ق″(س) < ٠
∀ س ∈ (-١ ، ١) فإنَّ بيان الدالة ق يمكن أن يوضحه الشكل:



٢ إذا كان المماس لمنحنى الدالة: د(س) = م س^{٢} + ١ عند س = ١ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° فإنَّ م =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $-\frac{١}{٢}$ (د) -١

٣ معادلة العمودي لمنحنى الدالة: ص = $\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}$ عند س = ١ هي

(أ) ص = -٣س + ٢ (ب) ص = ٣س - ٤

(جـ) ص = -٣س - ٢ (د) ٢ص = ٣س + ٢

٤ يتحرك جسيم على المنحنى ص^{٢} = س^{٣} فإذا كانت $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = $\frac{١}{٢}$ سم/ث فإنَّ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ عند ص = -١ مقدراً بوحدة سم/ث يساوي:

(أ) $\frac{-٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

٥ يتسرب الماء من خزان مكعب الشكل طول ضلعه ٢٠٠سم بمعدل ١٢٠سم^{٣}/ دقيقة فإنَّ معدل نقصان ارتفاع الماء في الخزان يساوي

(أ) -٠,٠٣سم/ دقيقة (ب) ٠,٠٠٣سم/ دقيقة

(جـ) -٠,٠٠٣سم/ دقيقة (د) ٠,٠٣سم/ دقيقة

٦ إذا كانت القيمة الصغرى للدالة ق : [أ، ٢أ] ← ح ، ق(س) = ٢٤ - ٢س هي ٨ فإنَّ أ =

(أ) ١٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

٧ مجموعة كل قيم م العددية التي تجعل للدالة : هـ(س) = س^{٣} + م س نقط حرجة هي

(أ) ح. (ب) ح-ح. (ج) ح- (د) {٠}

٨ إذا كان لبيان الدالة : ق(س) = ك س^{٣} + ٩س^{٢} نقطة انعطاف عند س = -١ فإنَّ قيمة ك العددية هي

(أ) -٣ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٩

٩ الدالة : د(س) = س - $\frac{١}{س}$ متزايدة على :

(أ) ح-{٠} (ب) ح-ح. (ج) ح-ح- (د) ح-

١٠ إذا كانت ق : [٠، ٣] ← ح، ق(س) = س^{٢} - ٢س +٣ فإنَّ القيمة الصغرى للدالة ق في [٠، ٣] هي :

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

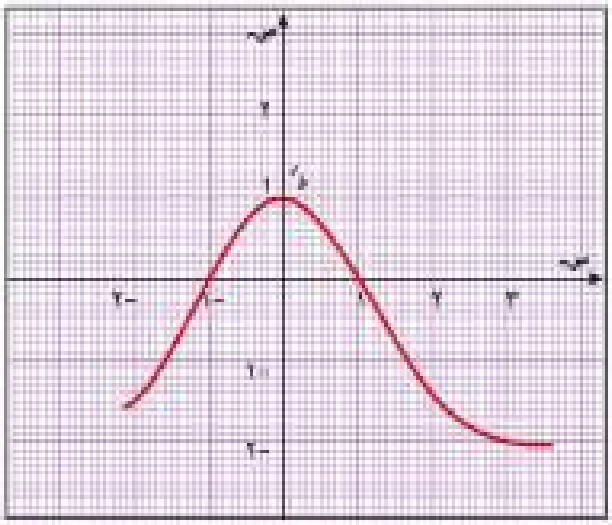
● ثالثاً : في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة ١	القائمة ٢
١ القيمة العظمى المحلية للدالة : د(س)= س^{٣} - ٣س + ٢ عند س =	أ صفراً
	ب ١
٢ القيمة الصغرى المحلية للدالة : ق(س)= $\sqrt{س^{٢} + س + ٣}$ عند س =	ج ٢
	د - $\frac{١}{٢}$
٣ القيمة الصغرى المحلية للدالة : هـ(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$ عند س =	هـ -١

* إذا كان ص = $\frac{١}{س}$ فإنه عندما س = ١ يكون

القائمة ١	القائمة ٢
٤ ص'' =	أ -١٢٠
٥ ص''' =	ب -٦
٦ ص$^{(٥)}$ =	جـ -٤
	د -٢
	هـ ٢

* إذا كانت د دالة متصلة على ح وقابلة للاشتقاق على ح، والشكل المرسوم يوضح بيان الدالة د' فإنَّ:



القائمة ١	القائمة ٢
٧ بيان د له نقطة صغرى محلية عند س =	أ -٢
٨ بيان د له نقطة عظمى محلية عند س =	ب -١
٩ للدالة د قيمة صغرى في [٢، ٣] عند س =	جـ ١
	د ٣

أسئلة مقالية:

أجب عن الأسئلة التالية:

١ إذا كان لمنحنى الدالة: ق(س) = س^{٣} + م س^{٢} + ل س نقطة حرجة عند س = −١ ونقطة انعطاف عند س = ١ فأوجد قيمة كل من الثابتين م، ل.

٢ إذا علمت أن بيان الدالة: د(س) = أ س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س − ب له نقطة انعطاف عند (−١، ٣) فأوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب . ثم أوجد قيم س التي يكون عندها نقط حرجة.

٣ في كل دالة من الدوال الآتية:

i حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة ثم أوجد النقطة العظمى المحلية والنقط الصغرى المحلية.

ii عين نقط الانعطاف للدالة.

iii ارسم بيان الدالة:

أ ت(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥

ب ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} + ٩س

جـ هـ(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} − ٣س

د ح(س) = س^{٢} (س^{٢} − ٦)

هـ ت(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ١٥

٤ ارسم بياناً تقريبياً للدالة ق المتصلة على ح وتتوافر فيها الشروط التالية:

ق(٠) = ٢ ، ق(٣) = ق(−٣) = ١ ، ق′(٠) = ٠،

ق′(س) > ٠ حيث س < ٠ ، ق′(س) < ٠ حيث س > ٠،

ق″(س) < ٠ حيث |س| < ٣ ، ق″(س) > ٠ حيث |س| > ٣

٥ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة (د ∘ هـ) عندما س = ٢

حيث د(س) = س^{٢} + ٢س − ١، هـ(س) = ٣س − ٥

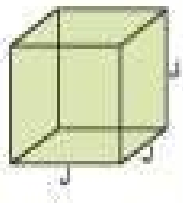
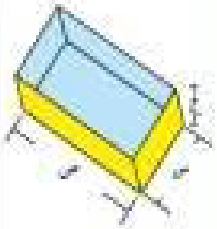
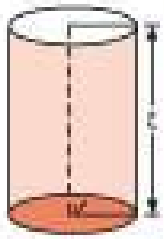
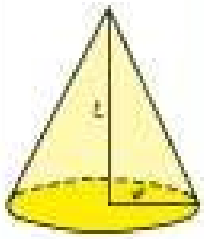
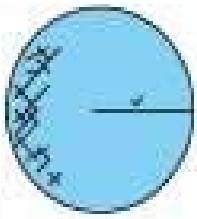
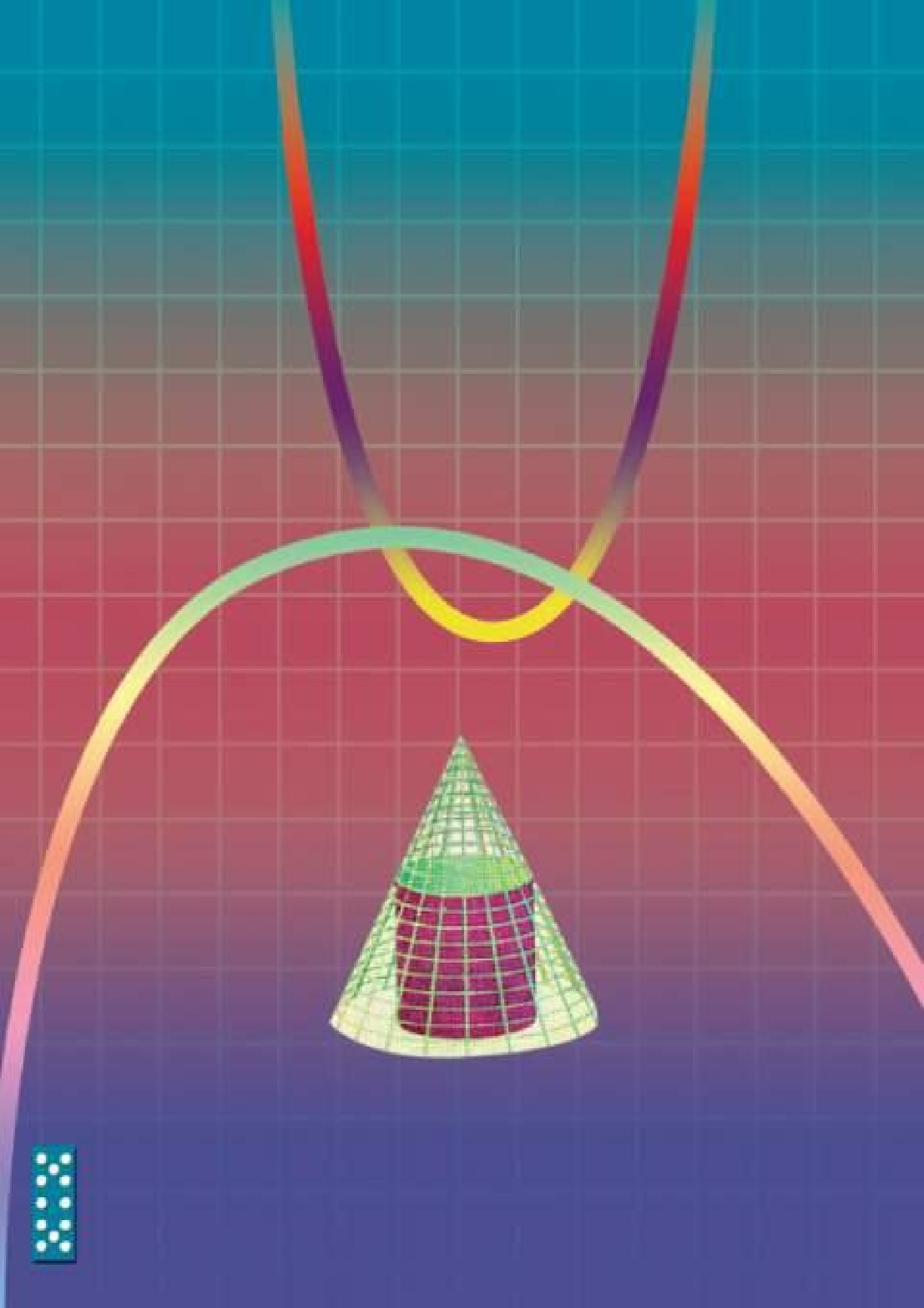
٦ أوجد معادلة العمودي للمنحنى $ص^{٢}$ + س ص = ٣ عند النقطة (٢، ١).

٧ أوجد نقط المنحنى د(س) = $س^{٣}$ − ٥س التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم الذي معادلته ص − ٧س = ٣.

٨ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها، سخنت فبدأت تتمدد محافظة على شكلها، فإذا كان معدل ازدياد عرضها بالنسبة للزمن ٠,٠١سم/دقيقة فأوجد معدل التغير في مساحتها عندما يكون عرضها = ٥سم.

٩ خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وطول ضلعها ٢م فإذا صبّ الماء في الخزان بمعدل ٨$م^{٣}$/دقيقة. فاحسب سرعة ارتفاع الماء في الخزان.

قوانين لبعض المجسمات

المجسم	الشكل	محيط القاعدة	مساحة القاعدة	المساحة الجانبية	المساحة الكلية أو مساحة السطح	الحجم
المكعب		٤ل	$ل^٢$	$٤ل^٢$	$٦ل^٢$	$ل^٣$
شبه المكعب (متوازي المستطيلات)		٢(س + ص)	س × ص	٢(س + ص) × ع	٢(س + ص) × ع + ٢س ص	س × ص × ع
الأسطوانة		٢π س	$π س^٢$	٢π س × ع	٢π س ع + ٢π $س^٢$	$π س^٢$ × ع
المخروط		٢π س	$π س^٢$	$π س \sqrt{س^٢ + ع^٢}$	$π س \sqrt{س^٢ + ع^٢}$ + $π س^٢$	$\frac{١}{٣}$ $π س^٢$ ع
الكرة		-	-	-	$٤π س^٢$	$\frac{٤}{٣}$ $π س^٣$

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٠٣) بتاريخ ٠٣/ ١٢/ ٢٠٠١