وزارة التربية

الرياضيات والإحصاء

للصف الحادي عشر

الجزء الأول

المرحلة الثانوية

الطبعة الأولى

الرياضيات والإحصاء

للصف الحادي عشر

الجزء الأول

تأليف

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيساً)

أ.د. ممدوح محمد سليمان — د. شفيقة عبدالحميد العوضي

أ.د. عماد الدين علي أحمد — أ. إلهام عفيفي علي

أ. محمود عبدالغني محمد — أ. نجوى محمد وسيم عبدالرزاق

أ. وداد محمد سعود بو عباس

الطبعة الأولى

١٤٣٢هـ

٢٠١١ / ٢٠١٢م

الطبعة الأولى
٢٠٠٧ / ٢٠٠٨م

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتوى

الموضوع | الصفحة

المحتوى

الموضوع | الصفحة

المقدمة

إن دور الرياضيات بفروعها المختلفة ضروري وهام ومحوري ، في بناء العقلية العلمية الواعية والمرتبة القادرة على التفكير السليم بمستوياته المتعددة ابتداءً بالتفكير المبني على الملاحظة وإدراك العلاقات ، ومروراً بالتفكير الناقد ووصولاً إلى التفكير الابتكاري والإبداعي ، والتمكن من حل المشكلات في الحياة المعاصرة .

وإلى جانب دور الرياضيات في تقديم الحلول للكثير من المشاكل والمعضلات التي تواجه العلماء والباحثين في شتى علوم الطبيعة ، فقد اهتمت الدول المتقدمة بالرياضيات لعظيم دورها في دفع عجلة النهضة والرقي الحضاري .

هذا وقد أدرك المسلمون الأوائل أهمية الرياضيات ودورها ، فاهتموا بدراستها ، ونبغ منهم علماء أفذاذ قدموا للبشرية الكثير ، وتتلمذ على أيديهم علماء الغرب وأفادوا بعلمهم أوروبا والعالم بأسره .

ويعد علم الإحصاء علماً هاماً من بين علوم الرياضيات التي تخدم باقي العلوم ، وتفيد بتطبيقاتها شتى مجالات الحياة .

وقد ازدادت أهمية هذا العلم خاصة في السنوات الأخيرة ، وتجاوز أن يكون مجرد فرع من فروع الرياضيات إلى أن أصبح علماً قائماً بذاته ، له أساليبه وأسسه وقواعده ، وكذا فروعه المختلفة حتى دخلت أفكاره في أغلب العلوم الأخرى ، مثل علم الفيزياء والكيمياء ، وأفرع الهندسة المختلفة ، والبيولوجي والفسيولوجي ، وعلم النفس وعلوم الإدارة ، والعلوم السياسية والاقتصادية والعسكرية إلى جانب البحوث العلمية والتربوية بأنواعها المختلفة .

وفي وقتنا الحاضر اشتدت الحاجة للإحصاء ، لبناء العقلية الاحتمالية وإعداد البحوث العلمية ، وخدمة علوم الإدارة الحديثة وغير ذلك من تطبيقاته ، لما تقدمه من قواعد ونظريات وطرق علمية تساعد على تعرف طرق جمع البيانات وتنظيمها وتحليلها والاستفادة منها في التنبؤ العلمي وبناء الرؤى المستقبلية التي يحتاجها متخذي القرار في وضع الخطط ، ورسم الاستراتيجيات على كافة المستويات .

من أجل ذلك كله ، وانسجاماً مع توجهات وزارة التربية بدولة الكويت لتطوير التعليم ليلبي حاجات المجتمع ، ويتناغم مع مناهج الرياضيات العالمية ويكون قادراً على تهيئة طلابنا لدراسة جامعية تحقق مخرجات أكثر تأهيلاً للتعامل مع المستجدات العلمية والتربوية التي يشهدها العالم اليوم ، نتقدم بهذا المقرر في مادة الرياضيات والإحصاء للصف الحادي عشر كمقرر من مقررات النظام الموحد الذي تم العمل به في المرحلة الثانوية بمدارس الكويت بدءاً من العام الدراسي ٢٠٠٦ / ٢٠٠٧م .

وقد تم توظيف الإحصاء بشكل واضح في هذا المقرر ، كما تم توظيفه بشكل أكبر في مقرر الرياضيات والإحصاء للصف الثاني عشر .

هذا ويأمل القائمون على إعداد هذا المقرر والمشرفون عليه أن يحقق الأهداف المرجوة منه ، وأن يخدم العملية التربوية والتعليمية ويساهم في تطويرها .

والله ولي التوفيق ، ، ،

المؤلفون

الفصل الأول

الأسس والجذور
EXPONENTS & ROOTS

ربط الرياضيات بالعلوم

هل تعلم أن:

البكتيريا من الكائنات الحية الدقيقة التي لا يمكن رؤيتها بالعين المجردة ، وإنما ترى بوساطة المجهر القوي .

توجد البكتيريا في كل مكان حولنا ، وتحصل على غذائها من المواد النباتية والحيوانية ، وتنمو وتكبر وعندما تصل إلى حجم معين فإنها تنقسم إلى اثنين ، ويسمى بالانقسام الثنائي البسيط .

حل المشكلات Problem Solving

إذا تم توفير الوسط الغذائي المناسب لنمو نوع معين من البكتيريا ومع ملاحظة ذلك وجد أن عدد البكتيريا يتضاعف كل ساعة فإذا بلغ عددها ١٠٠٠ بكتيريا عند الساعة ١٢ ظهراً فهل يمكنك معرفة عدد البكتيريا بهذا الوسط عند الساعة الثالثة بعد الظهر ، وكذلك عند الساعة الخامسة بعد الظهر في نفس اليوم ؟

الفصل الأول

الأسس والجذور

الأسس والجذور Exponents&Roots

المقدمة

تشتمل الرياضيات على موضوعات ومفاهيم ونظريات وقوانين في مجالاتها المختلفة ، ومما لا شك فيه أن موضوع الأسس يعد أهم وأبرز الموضوعات في مجال الجبر ، فبواسطته يتم فهم وتنفيذ الكثير من العمليات الحسابية الحيوية في العلوم الطبيعية ، وبواسطته يتم تبسيط واختصار الكثير من العمليات الحسابية المعقدة والتي ما كانت لتتم دون الاستعانة بقواعد وقوانين الأسس مثل :

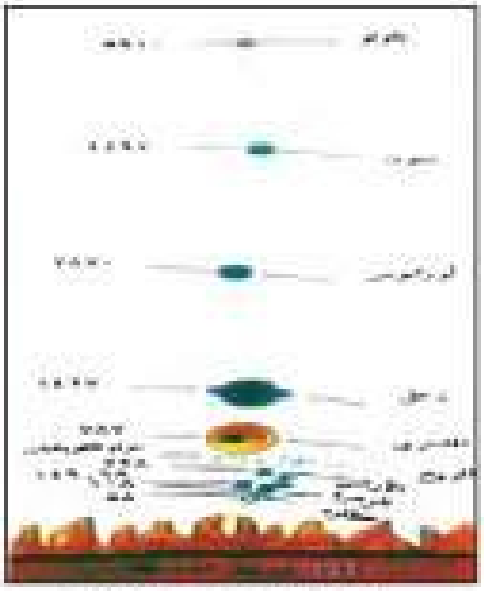
- تحديد بعد الكواكب عن الشمس .

ربط الرياضيات بالعلوم

نبذة عن كواكب المجموعة الشمسية :

يدور حول الشمس تسعة كواكب ، وهذه الكواكب هي بالترتيب حسب بعدها عن الشمس بالمليون كيلومتر $(10)^7$: عطارد - الزهرة - الأرض - المريخ - المشتري - زحل - أورانوس - نبتون - بلوتو .

ونتيجة لاختلاف بعدها عن الشمس تختلف في زمن دوران كل منها حول الشمس ، وكذلك تختلف في سرعة دورانها حول الشمس ، حيث تتناسب السرعة عكسياً مع بعد الكوكب عن الشمس .



الشكل يوضح ترتيب الكواكب بالمليون كيلومتر $(10)^7$

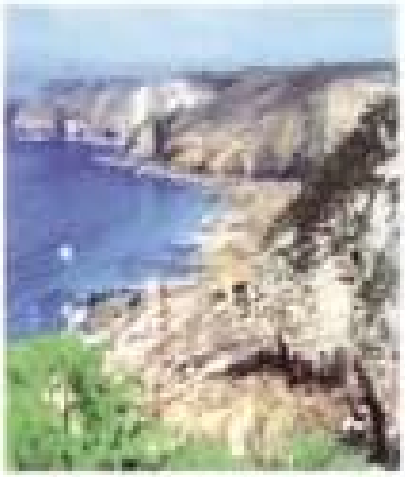
- حساب سرعة الصواريخ والمركبات الفضائية .

قوانين تبريد الأجسام

- العلاقة بين الظواهر الطبيعية (كالضغط والارتفاع) .
- تناقص حجم وكتلة الشمس نتيجة استهلاك مادتها في توليد الطاقة .

ربط الرياضيات بالعلوم

هل تعلم أن: الشمس تتكون من غاز يحوي كمية هائلة من الهيدروجين ، ونتيجة لاندماج ذرات الهيدروجين مكونة عنصر آخر هو الهليوم تحصل الشمس على طاقتها الهائلة من تلك التفاعلات الاندماجية النووية وترسل تلك الطاقة على شكل حرارة وضوء . وهل تعلم أن كتلة الشمس ٢ × ١٠ ^{٣٠} طن (أي ما يعادل ٩٩٪ من كتلة النظام الشمسي) .



- معدلات التآكل لشواطئ البحار والمحيطات بفعل العوامل الطبيعية والجوية عموماً .
- معدلات النمو المستمر لبعض نواحي الحياة (نمو السكان - نمو الخلايا - نمو البكتيريا - نمو الحيوانات . . .) .

الهدف
يتذكر قوانين الأسس الصحيحة الموجبة

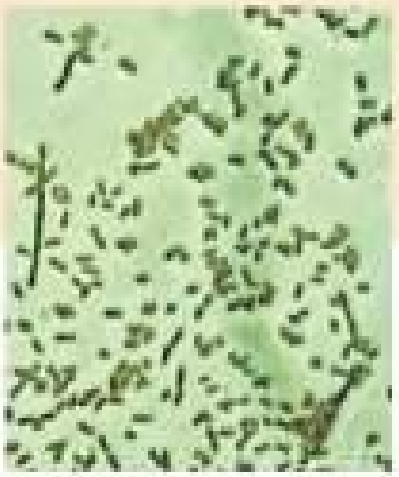
الكلمات الجديدة
الصورة الأسية

١ - ١ التعبيرات الأسية Exponential expressions

١ - ١١ الأسس الصحيحة الموجبة Positive Integeral Exponents

حل المشكلات Problem Solving

إذا تم توفير الوسط الغذائي المناسب لنمو نوع معين من البكتيريا ، ومع ملاحظة ذلك وجد أن عدد البكتيريا يتضاعف كل ساعة فإذا بلغ عددها ١٠٠٠ بكتيريا عند الساعة ١٢ ظهراً ، فهل يمكنك معرفة عدد البكتيريا بهذا الوسط عند الساعة الثالثة بعد الظهر وكذلك عند الساعة الخامسة بعد الظهر في نفس اليوم؟ .



سوف تتم مناقشة حل المشكلة وذلك بعد مراجعة قوانين الأسس الصحيحة الموجبة التي سبق لك دراستها .

نعلم أن $\text{أ}^{\text{ن}} = \underbrace{\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \ldots \times \text{أ}}_{\text{ن من المرات}}$ لكل أ ∈ ح ، ن ∈ صح.

$$٣^{١٠٠} = \underbrace{٣ \times ٣ \times ٣ \times \ldots \times ٣}_{\text{١٠٠ مرة}}$$

فعملية الضرب المتكرر يمكن التعبير عنها بصورة مختصرة وسهلة وذلك بالصورة الأسية .

لاحظ أن $٢^{٣} \times ٢^{٢} = (٢ \times ٢ \times ٢) \times (٢ \times ٢) = ٢^{٥}$

١ $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}+\text{م}}$ لكل أ ∈ ح ، م ، ن ∈ صح.

$$\frac{٣^٥}{٣^٢} = \frac{٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣}{٣ \times ٣} = ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^٣$$

$$\frac{٧^٦}{٧^٦} = \frac{٧ \times ٧}{٧ \times ٧} = ١$$

$$\frac{٥^٦}{٥^٧} = \frac{٥ \times ٥}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{١}{٥}$$

٢ لكل عدد حقيقي $أ \neq ٠$ ، م ، ن $\in$ ص.

فإن

$$\frac{أ^م}{أ^ن} = \begin{cases} أ^{م-ن} & : م > ن \\ ١ & : م = ن \\ \frac{١}{أ^{ن-م}} & : م < ن \end{cases}$$

لاحظ أن $(-١) \times (-١) = (-١)^٢ = ١$

$(-١) \times (-١) \times (-١) = (-١)^٣ = -١$

$$(-١)^م = \begin{cases} ١ & : م \text{ عدد صحيح زوجي موجب} \\ -١ & : م \text{ عدد صحيح فردي موجب} \end{cases}$$

مثال ١

ضع كلاً مما يلي في الصورة الأسية

أ $\frac{٢^٥ \times ٨}{١٦}$ **ب** $\frac{(-٥)^٧ \times (-٥)^٣}{(-٥)^٦}$

الحل

أ $\frac{٢^٥ \times ٨}{١٦} = \frac{٢^٥ \times ٢^٣}{٢^٤}$

$= \frac{٢^٨}{٢^٤}$

$= ٢^٤$

ب $\frac{(-٥)^٧ \times (-٥)^٣}{(-٥)^٦} = \frac{(-٥)^{١٠}}{(-٥)^٦}$

$= (-٥)^٤$

$= ٥^٤$

$(٣^{٢})^{٤} = (٣^{٢}) \times (٣^{٢}) \times (٣^{٢}) \times (٣^{٢}) = ٣^{٨}$

$(س^{٢})^{٤} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

٣ لكل أ ∈ ع ، م ، ن ∈ صح. فإن $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

لاحظ أن $(٢ س)^{٤} = ٢ س \times ٢ س \times ٢ س \times ٢ س$

$= (٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢) \times (س \times س \times س \times س)$

$= ٢^{٤} \times س^{٤}$

$(أ ب)^{م} = \underbrace{(أ ب) \times (أ ب) \times (أ ب) \times \ldots \times (أ ب)}_{\text{م من المرات}}$

$= \underbrace{(أ \times أ \times أ \ldots \times أ)}_{\text{م من المرات}} \times \underbrace{(ب \times ب \times ب \times \ldots \times ب)}_{\text{م من المرات}} = أ^{م} \times ب^{م}$

٤ $(أ ب)^{م} = أ^{م} ب^{م}$ لكل أ ، ب ∈ ع ، م ∈ صح.

لاحظ أن $(\frac{٢}{٥})^{٣} = \frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{٢^{٣}}{٥^{٣}}$

$(\frac{أ}{ب})^{م} = \underbrace{(\frac{أ}{ب}) \times (\frac{أ}{ب}) \times \ldots \times (\frac{أ}{ب})}_{\text{م من المرات}}$

$(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ \times أ \times أ \ldots \times أ \ (\text{م من المرات})}{ب \times ب \times ب \times \ldots \times ب \ (\text{م من المرات})} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

٥ $(\frac{أ}{ب})^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$ لكل أ ، ب ∈ ع ، ب ≠ ٠ ، م ∈ صح.

مثال (٢)

اختصر كلاً مما يلي حيث المقام $\neq$ ٠

١ $(\text{س}^{١}\text{ص}^{٣})^{٢}$

٢ $(٣-\text{أ}\,\text{ب}^{١})^{٣}$

٣ $(\text{س}^{٤})(\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢})^{٢}$

٤ $\left(\frac{٤\,\text{س}^{٢}}{٥\,\text{ص}^{٣}}\right)^{٢}$

٥ $\frac{(\text{أ}+\text{ب})^{٤}}{(\text{أ}+\text{ب})^{٣}\,(\text{أ}+\text{ب})^{٢}}$

الحل

١ $(\text{س}^{٢}\text{ص}^{٣})^{٢} = \text{س}^{٤}\text{ص}^{٦}$

٢ $(٣-\text{أ}\,\text{ب}^{١})^{٣} = ٢٧-\text{أ}^{٣}\text{ب}^{١}$

٣ $(\text{س}^{٤})(\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢})^{٢} = (\text{س}^{٤})(\text{س}^{٦}\text{ص}^{٤})$

$= \text{س}^{١٠}\,\text{ص}^{٤}$

٤ $\left(\frac{٤\,\text{س}^{٢}}{٥\,\text{ص}^{٣}}\right)^{٢} = \frac{(٤\,\text{س}^{٢})^{٢}}{(٥\,\text{ص}^{٣})^{٢}}$

$= \frac{١٦\,\text{س}^{٤}}{٢٥\,\text{ص}^{٦}}$

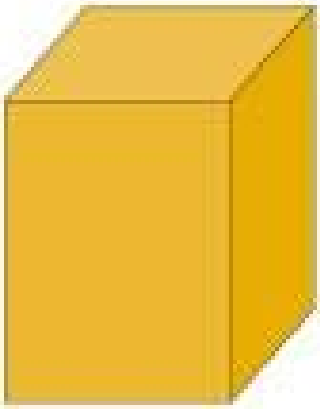
٥ $\frac{(\text{أ}+\text{ب})^{٤}}{(\text{أ}+\text{ب})^{٣}\,(\text{أ}+\text{ب})^{٢}} = \frac{(\text{أ}+\text{ب})^{٤}}{(\text{أ}+\text{ب})^{٥}}$

$= \frac{١}{(\text{أ}+\text{ب})}$ ■

مثال ٢

شبه مكعب طوله = ٤ س سم ، عرضه = ٣ س سم ، ارتفاعه = ١٢ س ص سم

احسب حجمه .



الحل

ح = ل × ض × ع

= ٤ س × ٣ س × ١٢ س ص

= ١٤٤ س^{٣} ص سم^{٣}

تدريب

في المثال السابق التفكير الناقد Critical thinking

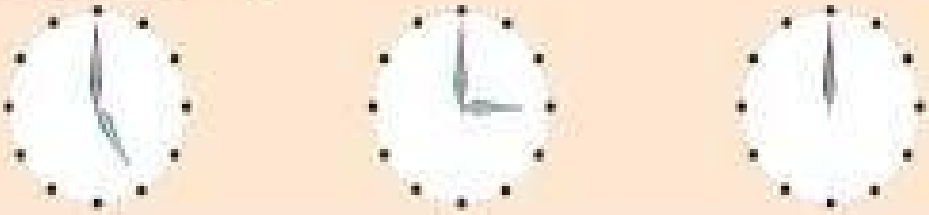
إذا تضاعف كلٌّ من الطول ، والارتفاع ، وأصبح العرض ثلاثة أمثال العرض الأصلي

فاحسب حجم شبه المكعب .

حل المشكلات

Problem Solving

إذا تم توفير الوسط الغذائي المناسب لنمو نوع معين من البكتيريا ، ومع ملاحظة ذلك وجد أن عدد البكتيريا يتضاعف كل ساعة فإذا بلغ عددها ١٠٠٠ بكتيريا عند الساعة ١٢ ظهراً ، فهل يمكنك معرفة عدد البكتيريا بهذا الوسط عند الساعة الثالثة بعد الظهر وكذلك عند الساعة الخامسة بعد الظهر في نفس اليوم ؟ .



عودة للبكتيريا

حيث إن عدد البكتيريا الساعة ١٢ ظهراً هو ١٠٠٠ وكان هذا العدد يتضاعف كل ساعة

الساعة	١٢ ظهراً	الواحدة بعد الظهر	الثانية بعد الظهر	الثالثة بعد الظهر	الخامسة بعد الظهر
عدد البكتيريا	١٠٠٠	١٠٠٠ × ٢ = ٢٠٠٠	١٠٠٠ × $٢^{٢}$ = ٤٠٠٠	...	....

فإنه عند الساعة الثالثة بعد الظهر يكون

عدد البكتيريا = ١٠٠٠ × $٢^{٣}$ = ١٠٠٠ × ٨

= ٨٠٠٠ بكتيريا

عند الساعة الخامسة بعد الظهر يكون

عدد البكتيريا = (١٠٠٠ × $٢^{٣}$) × $٢^{٢}$

= ١٠٠٠ × $٢^{٥}$

= ٣٢٠٠٠ بكتيريا

تمارين ١-١

أولاً : أوجد ناتج كلاً مما يلي في أبسط صورة (حيث المقام ≠ ٠)

١ $٢^{٤} \times ٢^{٥} \times ٢$

٢ $\frac{(٥)^{٣}}{(٥)^{١٢}}$

٣ $\left(\frac{س^{٢}}{ص}\right)^{٢} \times \left(\frac{ص^{٣}}{س^{٤}}\right)^{٢}$

٤ $\frac{(س - ص)^{٣} \times (س + ص)^{٢}}{س^{٢} - ص^{٢}}$

ثانياً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة أسية (حيث المقام ≠ ٠)

١ $\frac{٢٧}{٧٥}$

٢ $(٦٤\,أ^{٣})^{٢}$

٣ $٣٦ \times ١٠^{٢} + ٦٤ \times ١٠^{٢}$

٤ $(٥^{٣} \times ١٠^{٤}) \times (١٢٥ \times ١٠)$

٥ $\frac{(٣\,أ^{٣})^{٦} \times (٩\,أ)^{٢}}{(٢٧\,أ^{٣})^{٥}}$

ثالثاً : حل المشكلات **Problem Solving**

اقتربت إحدى مركبات الفضاء من كوكب زحل (أحد كواكب المجموعة الشمسية) والتقطت مجموعة من الصور للكوكب ، فإذا كان بعد المركبة عن الأرض ١٢٧٥×١٠^{٦} كيلومتر - احسب الوقت الذي تستغرقه الصورة للوصول من المركبة إلى الأرض .

علماً بأن الصورة تنتقل بسرعة الضوء وهي ٣×١٠^{٥} كيلومتر / ثانية .

رابعاً : البنود الموضوعية :

في البنود من (١ – ٥) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، ظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ $٢^{٣} + ٢^{٣} + ٢^{٣} + ٢^{٣} = ٢^{٥}$ (أ) (ب)

٢ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = ١$ (أ) (ب)

٣ إذا كانت أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = – ٢ فإن القيمة العددية للمقدار ($أ^{٢}$ ب) هي – ٤ (أ) (ب)

٤ $٣ \times ٥^{ن} + ٢ \times ٥^{ن} = ٥^{ن+١}$ لكل ن ∈ صـ. (أ) (ب)

٥ $\left(\frac{١}{١٢٥}\right)^{-س} = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٣-س}$ لكل س ∈ صـ. (أ) (ب)

الهدف
- يتعرف الأس الصحيح السالب
- يتعرف الأس الصفري

الكلمات الجديدة
الأس الصحيح السالب
الأس الصفري

١ - ١ ب الأسس الصحيحة السالبة Negative Integral Exponents

نعلم أن $٥^{١} = ٥$ ماذا عن $٥^{-١}$ ؟ كذلك $٥^{٢} = ٢٥$ ماذا عن $(٥)^{-٢}$ ؟

تعريف

$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}} = (\frac{١}{أ})^{ن}$ لكل عدد حقيقي $أ \neq ٠$ ، $ن \in$ ص.

فمثلاً : $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤^{-٢}} = ٤^{٢} = ١٦$ ، $(\frac{٣}{٥})^{-١} = \frac{٥}{٣}$

وينتج من التعريف السابق أن :

$(\frac{أ}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{أ})^{ن}$ حيث $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$

ملاحظة

تستخدم قوانين الأسس الصحيحة الموجبة في حالة الأسس الصحيحة السالبة بشرط أن تكون الكميات مُعرّفة .

مثال ١

ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة بحيث تكون الأسس موجبة .

١ $(\frac{٧}{٤})^{-١}$

٢ $٢^{-٧} \times ٢^{١}$

٣ $\frac{٥^{٢}}{٥^{-٤}}$

٤ $س^{-٢} \div ص^{-٢}$

٥ $\frac{(س + ص)^{-٢}}{(س + ص)^{-٦}}$

الحـل

١ $\left(\frac{٧}{٤}\right)^{-٢} = \left(\frac{٤}{٧}\right)^{٢}$

٢ $٢^{-٧} \times ٢^{٤} = (٢)^{-٧+٤} = (٢^{-٣}) = \left(\frac{١}{٢^{٣}}\right)$

٣ $\frac{٥^{١}}{٥^{-٤}} = ٥^{١-(-٤)} = (٥)^{٦}$

٤ $س^{-٦} + ص^{-٢} = \frac{١}{س^{٦}} + \frac{١}{ص^{٢}} = \frac{ص^{٢} + س^{٦}}{س^{٦} ص^{٢}}$

٥ $\frac{(س + ص)^{-٢}}{(س + ص)^{-٤}} = (س + ص)^{-٢-(-٤)} = (س + ص)^{٢}$ ■

تعريف

$أ^{٠} = ١$ لكل $أ \in ح$ ، $أ \neq ٠$

ملحوظة هامة : في هذا الفصل نستبعد الحالات غير المعرفة ، والحالات غير المعينة .

مثـال (٢)

ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة بحيث تكون الأسس موجبة .

١ $(٠,٧٥)^{-٣}$ ٢ $\frac{س^{-٤}}{ص^{-٢}}$ ٣ $س^{٢} (١ + س^{-٢})$

الحـل

١ $(٠,٧٥)^{-٣} = \left(\frac{٧٥}{١٠٠}\right)^{-٣} = \left(\frac{١٠٠}{٧٥}\right)^{٣} = \frac{٤^{٣}}{٣^{٣}}$

٢ $\frac{س^{-٤}}{ص^{-٢}} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{-٤} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{٤} = \frac{ص^{٤}}{س^{٤}}$

٣ $س^{٢} (١ + س^{-٢}) = س^{٢} + س^{٠} = س^{٢} + ١$ ■

تمارين (١-أ ب)

أولاً : في البنود من (١ - ١٢) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة . ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٠} = \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٠}$ (أ) (ب)

٢ $(-٠,٧) \times (-٠,٧)^{٠} = (٠,٧)^{٢}$ (أ) (ب)

٣ إذا كانت $س = ٣^{-٢}$ ، $ص = ٢^{-٣}$ فإن $س = ص$ (أ) (ب)

٤ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{١} \times \left(\frac{٥}{٣}\right)^{-٣} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٥}$ (أ) (ب)

٥ $\frac{ص^{-١} \times ص^{-٣}}{ص \times ص^{-١}} = \frac{١}{ص}$ (أ) (ب)

٦ $\frac{٢ \times (٧)^{-٣}}{(١٤)^{-٣}} = ١$ (أ) (ب)

٧ $\frac{١٠^{٢} \times ١٠^{-٤}}{١٠^{٢}} = ٠,٠٠١$ (أ) (ب)

٨ إذا كانت $ص = ٣^{-١}$ فإن $ص^{١} = \frac{١}{٩}$ (أ) (ب)

٩ $(س - ١)^{٠} = ١$ لكل $س \in ح - \{-١\}$ (أ) (ب)

١٠ إذا كانت $س = ٢^{٠} + ٢^{-١}$ فإن $س = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

١١ إذا كانت س ، ص $\in$ ص فإن $٢^{(س+ص)} = ٢^{س} + ٢^{ص}$ (أ) (ب)

١٢ إذا كانت $س = \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} + ٢^{٢}$ فإن س في الصورة الأسية هي $٢^{٥}$ (أ) (ب)

ثانياً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة بحيث تكون الأسس موجبة :

١ $(-٤)^{-٢}$

٢ $-(٤)^{-٢}$

٣ $٣\,أ\,ب^{١}(-٢\,أ^{١}\,ب)$

٤ $(أ^{٢}\,ب\,جـ^{١})^{-١}$

٥ $(٤\,س\,ص^{٢})(٣س^{٢}\,ص)(س^{-٣}\,ص^{-٣})$

٦ $(٥س^{-١})(٢ص^{١})(٣س^{-٣})$

٧ $\dfrac{(٢)^{-٣} \times ٣}{(٣)^{-٢} \times (٢)^{-٢}}$

٨ $\dfrac{(-٥\,أ^{٢}\,ب\,جـ^{٢})^{٢}}{٣٠\,أ\,ب^{٢}\,جـ^{١}}$

٩ $\dfrac{(-٢\,أ^{٢}\,ب^{٢})^{٢}}{(أ^{٢}\,ب)^{-٢}}$

١٠ $\dfrac{(١٨)^{٥}}{٣^{١٥} \times ٤^{٥}}$

١١ $\dfrac{(٢٥)^{-٢} \times (٩)^{-٣\,س^{١٠}}}{(١٥)^{٢\,س^{٥}}}$

الهدف
- يتعرف الجذر النوني لعدد حقيقي
- يتعرف قيمة الجذر النوني
- يضع الجذر النوني في أبسط صورة

الكلمات الجديدة
الجذر النوني

١-٢ التعبيرات الجذرية Radical Expressions

من دراستنا السابقة نعلم أن للمعادلة التربيعية ب^{٢} = ٢٥ جذرين حقيقيين أحدهما موجب وهو $\sqrt{٢٥}$ = ٥ والآخر سالب وهو $-\sqrt{٢٥}$ = −٥

وبهذا يكون ±٥ هما الجذرين التربيعيين للعدد ٢٥

فإذا كان أ عدد حقيقي ، أ ≥ ٠ فإنه يوجد جذران تربيعيان للعدد أ هما $\sqrt{أ}$ ، $-\sqrt{أ}$

بحيث $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ}$ = أ ،

$-\sqrt{أ} \times -\sqrt{أ}$ = أ

أي $\sqrt{أ}$ يساوي عدد حقيقي غير سالب ب بحيث ب^{٢} = أ

وإذا كان أ عدداً حقيقياً سالباً فإن $\sqrt{أ} \notin ح$

فمثلاً $\sqrt{-٩} \notin ح$ لأنه لا يوجد عدداً حقيقياً مربعه (−٩)

$\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ لأن ٣^{٣} = ٢٧

$\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢ لأن ٢^{٥} = ٣٢

$\sqrt[٣]{-١٢٥}$ = −٥ لأن (−٥)^{٣} = −١٢٥

ومن الأمثلة السابقة يمكننا أن نستخلص التعميم التالي :

التعميم

إذا كان أ عدداً حقيقياً ، ن ∈ ص$_{+}$ ، ن ≥ ٢

فإن الجذر النوني للعدد أ يرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$ ويساوي عدداً حقيقياً ب بحيث ب^{ن} = أ

ونستبعد من ذلك الحالة التي يكون فيها أ سالباً ، ن زوجياً .

أي أن :

إذا كان ن ∈ ص+ ، وكان ن عدد زوجي ≥ ٢ ، أ عدد موجب فإن $\sqrt[ن]{أ}$ يساوي عدداً حقيقياً .

وكان ن عدد فردي ≥ ١ ، فإن $\sqrt[ن]{أ}$ يساوي عدداً حقيقياً .

فإن $\sqrt[ن]{٠} = ٠$ لكل ن > ١

مثال (١)

أوجد إن أمكن كلاً مما يلي :

١ $-\sqrt{٨١}$

٢ $\sqrt{-٨١}$

٣ $\sqrt{١٦}$

٤ $\sqrt[٤]{٨١}$

٥ $\sqrt[٣]{-٢٧}$

٦ $\sqrt[٣]{٢٧}$

٧ $\sqrt[٤]{(-٢)^{٢}}$

٨ $|٣|$

٩ $|٠|$

١٠ $|-٣|$

الحل

١ $-\sqrt{٨١} = -٩$

٢ $\sqrt{-٨١} \notin ح$

٣ $\sqrt{١٦} = \sqrt{٤^{٢}} = ٤$

٤ $\sqrt[٤]{٨١} = \sqrt[٤]{٣^{٤}} = ٣$

٥ $\sqrt[٣]{-٢٧} = \sqrt[٣]{(-٣)^{٣}} = -٣$

٦ $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

٧ $\sqrt[٤]{(-٢)^{٢}} = |٢| = ٢$

٨ $|٣| = ٣$

٩ $|٠| = ٠$

١٠ $|-٣| = -(-٣) = ٣$

من المثال السابق نلاحظ أن

١ $|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & : \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & : \text{س} < ٠ \end{cases}$

٢ $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \begin{cases} |\text{س}| & : \text{ن عدد زوجي} \\ \text{س} & : \text{ن عدد فردي} \end{cases}$

مثال ٢

ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $\sqrt{\text{س}^{٢}}$

٢ $\sqrt{\text{أ}^{١٠}}$

٣ $\sqrt[٥]{٣٢\,\text{س}^{٥}}$

٤ $\sqrt[٣]{-١٢٥\,\text{س}^{٣}}$

٥ $\sqrt{(-٤\,\text{ب})^{٢}}$

٦ $\sqrt[٣]{(٢\,\text{س} + ١)^{٣}}$

الحل

١ $\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}^{١}| = \text{س}^{١}$

٢ $\sqrt{\text{أ}^{١٠}} = \sqrt{(\text{أ}^{٥})^{٢}} = |\text{أ}^{٥}| = \text{أ}^{٥}\,|\text{أ}|$

٣ $\sqrt[٥]{٣٢\,\text{س}^{٥}} = \sqrt[٥]{(٢\,\text{س})^{٥}} = ٢\,\text{س}$

٤ $\sqrt[٣]{-١٢٥\,\text{س}^{٣}} = \sqrt[٣]{(-٥\,\text{س})^{٣}} = -٥\,\text{س}$

٥ $\sqrt{(-٤\,\text{ب})^{٢}} = |-٤\,\text{ب}| = |٤\,\text{ب}| = ٤\,|\text{ب}|$

٦ $\sqrt[٣]{(٢\,\text{س} + ١)^{٣}} = ٢\,\text{س} + ١$

تمـارين (١ - ٢)

أولاً : أوجد إن أمكن قيمة كلاً مما يلي :

١ $\sqrt[3]{-٨}$

٢ $\sqrt{-٣٦}$

٣ $\sqrt{٦٢٥}$

٤ $\sqrt[3]{٦٤}$

٥ $\sqrt{٢٢٥}$

٦ $-\sqrt[5]{-٣٢}$

ثانياً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $\sqrt{س^{٢}}$

٢ $\sqrt[٣]{٦٤أ^{٣}}$

٣ $\sqrt{١٤٤س^{١٠}}$

٤ $\sqrt[٤]{أ^{٤}ب^{٨}}$

٥ $\sqrt[٥]{-٣٢أ^{٥}ب^{٥}}$

٦ $\sqrt{٢٥س^{٤}ص^{١٢}}$

- الهدف
- يتعرف الأس النسبي
- يعمم قوانين الأسس الصحيحة لتشمل الأسس النسبية

١ - ٣ الأسس النسبية Rational Exponents

بعد أن عرفنا الجذر النوني للعدد الحقيقي أ نورد في الجزء التالي بعض التعريفات للتعبير عن الجذور بالأسس .

تعريف ١

إذا كان أ ∈ ح ، ن ∈ ص+ ، ن ≥ ٢ فإن

$أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ ويكون $\sqrt[ن]{أ}$ عدداً حقيقياً

فمثلاً : $(٢٥)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$(٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$(-٨١)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٨١} \notin ح$

$-(٨١)^{\frac{١}{٢}} = -\sqrt{٨١} = -٩$

تعريف ٢

إذا كان م ، ن ∈ ص+ ، ن ≥ ٢ ، $\sqrt[ن]{أ} \in ح$

فإن $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$

فمثلاً : $(٢٥)^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{٢٥})^{٣} = ٥^{٣} = ١٢٥$

$(-٦٤)^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{(-٦٤)^{٢}} = (\sqrt[٣]{-٦٤})^{٢} = (-٤)^{٢} = ١٦$

ولتعميم الأسس النسبية لتشمل الأسس النسبية السالبة

تعريف (٣)

إذا كان م ، ن ∈ ص ، ن ≥ ٢ ، أ ≠ ٠ ، $أ^{\frac{١}{ن}}$ ∈ ع

فإن $أ^{-\frac{م}{ن}} = \frac{١}{أ^{\frac{م}{ن}}}$

فمثلاً : $٥^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{١}{٥^{\frac{٣}{٤}}}$ ، $\frac{١}{أ^{\frac{١}{٣}}} = أ^{-\frac{١}{٣}}$

التعاريف ١ ، ٢ ، ٣ السابقة تساعد في تعميم قوانين الأسس الصحيحة لتشمل الأسس النسبية .

مثال (١)

اختصر كلاً مما يلي لأبسط صورة :

١ $٢(أ)^{\frac{٣}{٤}} \times ٣(أ)^{-\frac{١}{٤}} \times (أ)^{\frac{١}{٢}}$

٢ $(س + ص)^{\frac{٧}{٢}} \times (س + ص)^{-\frac{٥}{٢}}$

٣ $(أ^{٣} ب^{٩})^{\frac{١}{٣}} \times (أ^{-٦} ب^{-١٠})^{\frac{١}{٢}}$

الحل

١ $٢(أ)^{\frac{٣}{٤}} \times ٣(أ)^{-\frac{١}{٤}} \times (أ)^{\frac{١}{٢}} = ٦أ$

٢ $(س + ص)^{\frac{٧}{٢}} \times (س + ص)^{-\frac{٥}{٢}} = (س + ص)$

٣ $(أ^{٣} ب^{٩})^{\frac{١}{٣}} \times (أ^{-٦} ب^{-١٠})^{\frac{١}{٢}} = أ ب^{٣} \times أ^{-٣} ب^{-٥}$

$= أ^{-٢} ب^{-٢}$

$= \frac{١}{أ^{٢} ب^{٢}}$ ■

مثال ٢

اكتب كلاً مما يلي في صورة جذرية :

١ $(\text{س}^{\frac{1}{3}})\ (\text{س}^{\frac{1}{3}})$

٢ $(\text{س}^{\frac{3}{2}}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}})$

الحل

١ $(\text{س}^{\frac{1}{3}})\ (\text{س}^{\frac{1}{3}}) = \text{س}^{\frac{2}{3}}$

$= \sqrt[3]{\text{س}^2}$

٢ $(\text{س}^{\frac{3}{2}}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}}) = (\text{س}^3\text{ص})^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt[2]{\text{س}^3\text{ص}}$

تمـارين (١ - ٣)

أسئلة مقالية :

في البنود من (١ - ٧) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ، ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، ظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ $(٥)^{\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{١٢٥}$ (أ) (ب)

٢ $(٤)^{\frac{١}{٢}} \times (٤)^{\frac{١}{٨}} = (٤)^{\frac{١}{٨}}$ (أ) (ب)

٣ $\left(\frac{٤}{٩}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٨}{٢٧}$ (أ) (ب)

٤ $(٠,٢٥)^{\frac{٣}{٢}} = ٣٢$ (أ) (ب)

٥ $\left(\sqrt[٣]{٧}\right)^{٥} = (٧)^{\frac{٣}{٢}}$ (أ) (ب)

٦ $(٥)^{\frac{٣}{٢}} \times (٥)^{\frac{٤}{٣}} = ٥$ (أ) (ب)

٧ ناتج $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \left(\frac{ب}{جـ}\right)^{\frac{١}{٢}} = \left(\frac{أ}{جـ}\right)^{\frac{١}{٢}}$ (أ) (ب)

أسئلة مقالية :

أولاً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $(٨١)^{-\frac{١}{٢}}$ ٢ $(١٢٥)^{-\frac{١}{٣}}$ ٣ $\left(\frac{٢٥}{٩}\right)^{-\frac{١}{٢}}$

٤ $\left(٦\frac{١}{٤}\right)^{\frac{٥}{٢}}$ ٥ $(٨١)^{\frac{٣}{٢}} \times (٤)^{-\frac{٣}{٢}}$ ٦ $\left(\frac{٨}{٢٧}\right)^{-\frac{١}{٣}}$

ثانياً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $س^{\frac{١}{٣}} \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ٢ $أ^{\frac{١}{٥}} \sqrt[٥]{أ^{٣}}$ ٣ $\left(\frac{١}{أ}\right)^{\frac{٢}{٣}} \sqrt[٣]{أ}$

٤ $(س^{\frac{١}{٣}})^{٩} \times (س^{٢})^{\frac{١}{٣}}$ ٥ $(١ + أ)^{\frac{١}{٣}} \times (١ + أ)^{\frac{٢}{٣}}$

ثالثاً : اكتب كلاً مما يلي في صورة جذرية :

١ $(أ^{٣} ب^{٢})^{\frac{١}{٣}}$ ٢ $\left(\frac{ص^{٩}}{ص^{٢}}\right)^{\frac{١}{٣}}$

الهدف
- يحل تمارين تحوي عمليات على الجذور

الكلمات الجديدة
تبسيط الجذر

١ - ٤ العمليات على الجذور

١ - ٤أ تبسيط التعبيرات الجذرية Simplifying Radical Expressions

في التعامل مع الأعداد من المعتاد أن نكتب النتائج في أبسط صورة ممكنة فمثلاً

نكتب $\frac{٦}{٢}$ على الصورة ٣ ونكتب $\frac{٩}{٦}$ على الصورة $\frac{٣}{٢}$

فمثلاً $\sqrt{٢٥ \times ٩} = \sqrt{٢٢٥} = \sqrt{(١٥)^{٢}} = ١٥$

أو $\sqrt{٢٥ \times ٩} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٩} = ٥ \times ٣ = ١٥$

أيضاً $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \sqrt{(\frac{٤}{٥})^{٢}} = \frac{٤}{٥}$

أو $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٤}{٥}$

وكذلك عند كتابة الأعداد غير النسبية يفضل كتابتها في أبسط صورة ، لذا عند تبسيط الجذور سوف نوظف القوانين التالية :

إذا كان ن ∈ صحـ ، ن ≥ ٢ وكان كلاً من $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ع ، $\sqrt[ن]{ب}$ ∈ ع فإن:

١ $\sqrt[ن]{أ \times ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ حيث ب ≠ ٠

ولتبسيط الجذور ينبغي معرفة متى يكون التعبير الجذري في أبسط صورة ؟

والإجابة هي :

١ ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر مثل $\sqrt{٢٧ أ^{٤} ب^{٥}}$

٢ ألا يكون المقام جذراً مثل $\frac{٤}{\sqrt{٥}}$

٣ ألا يكون المجذور كسراً مثل $\sqrt{\frac{٣}{٥}}$

٤ ألا يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن مثل $\sqrt[١٢]{٦٤}$ لأن

$$\sqrt[١٢]{٦٤} = \sqrt[١٢]{٢^{٦}} = ٢^{\frac{٦}{١٢}} = ٢^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$$

أمثلة

اختصر لأبسط صورة حيث المتغيرات أعداد حقيقية موجبة :

١ $\sqrt{٧٢}$

٢ $\sqrt{٢٥ س^{٣}}$

٣ $\sqrt{\frac{٥}{١٨}}$

٤ $\sqrt[٤]{٣٢}$

٥ $\sqrt[٣]{١٢٥ أ^{٣}}$

الحل

١ $\sqrt{٧٢} = \sqrt{٣٦ \times ٢} = \sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢} = ٦\sqrt{٢}$

٢ $\sqrt{٢٥ س^{٣}} = \sqrt{٢٥ س^{٢} \times س} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{س^{٢}} \times \sqrt{س}$

$= ٥ \square س \square \times \sqrt{س} = ٥ س \sqrt{س}$

٣ $\sqrt{\frac{٥}{١٨}} = \sqrt{\frac{٥}{١٨} \times \frac{٢}{٢}} = \sqrt{\frac{١٠}{٣٦}} = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٣٦}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٦}$

٤ $\sqrt[٤]{٣٢} = \sqrt[٤]{١٦ \times ٢} = \sqrt[٤]{١٦} \times \sqrt[٤]{٢} = ٢\sqrt[٤]{٢}$

٥ $\sqrt[٣]{١٢٥ أ^{٣}} = \sqrt[٣]{٥^{٣} أ^{٣}}$

$= ((٥ أ)^{٣})^{\frac{١}{٣}} = (٥ أ)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{(٥ أ)^{٣}} = \sqrt{٥ أ}$ ■

تمارين ٤-١م

أولاً : أيٌّ من التعبيرات الجذرية التالية ليس في أبسط صورة :

١ $٥\sqrt{٢}$

٢ $\frac{٣}{\sqrt{٧}}$

٣ $\sqrt{٢١٦}$

٤ $\sqrt{\frac{٣٢}{٨١}}$

٥ $\sqrt{١٢٨}$

٦ $\sqrt{٤٩}$

ثانياً : ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة حيث المتغيرات أعداد حقيقية موجبة :

١ $\sqrt{٨أ^{٢}}$

٢ $\sqrt{١٦أ^{٥}ب^{٤}}$

٣ $\sqrt{١٦أ^{٤}ب^{٤}}$

٤ $\sqrt{\frac{س^{١٠}}{٣٦س^{٤}}}$

١ - ٤ب جمع وطرح التعبيرات الجذرية

Addition and subtraction of Radical Expressions

لجمع وطرح التعبيرات الجذرية يجب أن تكون متشابهة وذلك عندما تتفق في كل من :

١- دليل الجذر ٢ - المجذور

ولنحكم على التعبيرات الجذرية من حيث كونها متشابهة ، يجب وضعها في أبسط صورة حتى يمكن الحكم عليها لاحظ أن : $٥\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٣}$ تعبيرات جذرية متشابهة

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{س}$ تعبيرات جذرية متشابهة

$٥\sqrt[٣]{٦}$ ، $٤\sqrt[٣]{٦}$ تعبيرات جذرية متشابهة

$\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{١٢}$ تعبيرات جذرية متشابهة (لماذا؟)

في حين أن : $٥\sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٥}$ تعبيرات جذرية غير متشابهة

$٨\sqrt{س}$ ، $-٣\sqrt{ص}$ تعبيرات جذرية غير متشابهة

أي أننا نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة .

مثال ١

أوجد الناتج في أبسط صورة في كل مما يأتي :

١ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} - ٨\sqrt{٥}$

٢ $\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٦}$

٣ $(٤ + \sqrt{٣}) + (١ - \sqrt{٢})$

الحل

١ $٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} - ٨\sqrt{٥} = (٣ + ٤ - ٨)\sqrt{٥} = -\sqrt{٥}$

٢ $\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٣} - \sqrt{٦} = ٢\sqrt{٣}$

٣ $(٤ + \sqrt{٣}) + (١ - \sqrt{٢}) = ٥ + \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ■

مثال ٢

أوجد الناتج في أبسط صورة :

١ $٢\sqrt{٣}^{٢} + ٧\sqrt{٥}^{٢} - \sqrt{٣}^{٢} - ٤\sqrt{٥}^{٢}$

٢ $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥}$

٣ $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٣٢}$

٤ $\sqrt{١٦}^{٢} + \sqrt{٥٤}^{٢} - ٢\sqrt{٢٥٠}^{٢}$

الحل

١ $٢\sqrt{٣}^{٢} + ٧\sqrt{٥}^{٢} - \sqrt{٣}^{٢} - ٤\sqrt{٥}^{٢} = \sqrt{٣}^{٢} + ٣\sqrt{٥}^{٢}$

٢ $\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{١٢} - \sqrt{٧٥} = \sqrt{٣ \times ٣} + ٣\sqrt{٢ \times ٣} - \sqrt{٥ \times ٣}$

$= ٣\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٣}$

٣ $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - \sqrt{٣٢} = \sqrt{٩ \times ٢} + \sqrt{٢٥ \times ٢} - \sqrt{١٦ \times ٢}$

$= \sqrt{٣^{٢} \times ٢} + \sqrt{٥^{٢} \times ٢} - \sqrt{٤^{٢} \times ٢}$

$= ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٢}$

$= ٤\sqrt{٢}$

٤ $\sqrt{١٦}^{٢} + \sqrt{٥٤}^{٢} - ٢\sqrt{٢٥٠}^{٢} = \sqrt{٨ \times ٢}^{٢} + \sqrt{٢٧ \times ٢}^{٢} - ٢\sqrt{١٢٥ \times ٢}^{٢}$

$= \sqrt{٢^{٢} \times ٢}^{٢} + \sqrt{٣^{٢} \times ٢}^{٢} - ٢\sqrt{٥^{٢} \times ٢}^{٢}$

$= ٢\sqrt{٢}^{٢} + ٣\sqrt{٢}^{٢} - ١٠\sqrt{٢}^{٢}$

$= -٥\sqrt{٢}^{٢}$ ■

مثال (٢)

أوجد ناتج جمع :

$٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٧}$ ، $٤\sqrt{٢} - \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٧}$

الحل

$(٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٧}) + (٤\sqrt{٢} - \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٧})$

$= (٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢}) - (٤\sqrt{٣} + \sqrt{٣}) + (٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٧})$

$= ٧\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٣} - \sqrt{٧}$ ■

مثال (٣)

أوجد باقي طرح :

$١٠\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢}$ من $١٣\sqrt{٥} - ٧\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٢}$

الحل

$(١٣\sqrt{٥} - ٧\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٢}) - (١٠\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢})$

$= ١٣\sqrt{٥} - ١٠\sqrt{٥} - ٧\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٢}$ ■

تمـارين (١-٤ب)

أولاً :أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

١ $\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}$

٢ $٤\sqrt{٣} - ٥\sqrt{١٢} + ٣\sqrt{٧٥}$

٣ $\sqrt{٧٢} + \sqrt{٤٨} - \sqrt{٧٥} - \sqrt{٩٨}$

٤ $\sqrt{١٢٨} - \sqrt{٥٠} - \sqrt{٨}$

ثانياً :أوجد ناتج جمع

١ $٣\sqrt{٥} - ٥\sqrt{٧} - ١٢\sqrt{٣} ، ٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٣}$

ثالثاً : اطرح

١ $٧\sqrt{٣} - ٤\sqrt{٥} - ٩\sqrt{٧}$ من $٦\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٥} - ١٠\sqrt{٧}$

١ - ٤ جـ ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية

Multiplication and Division of Radical Expressions

مما سبق نجد أنه :

إذا كان: $\sqrt[ن]{أ} \in ع$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$ فإن :

١ $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$

٢ $\dfrac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\dfrac{أ}{ب}}$ حيث ب ≠ ٠

مثال ١

أوجد ناتج كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $(٥\sqrt{٢})^{٢}$

٢ $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$

٣ $٢\sqrt{٧} \times ٣\sqrt{٧}$

٤ $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} + \sqrt{٢٧})$

الحل

١ $(٥\sqrt{٢})^{٢} = ٥\sqrt{٢} \times ٥\sqrt{٢} = ٢٥ \times ٢ = ٥٠$

٢ $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٦} = \sqrt{٣ \times ٢ \times ٦} = \sqrt{٣٦} = ٦$

٣ $٢\sqrt{٧} \times ٣\sqrt{٧} = ٢ \times ٣ \times (\sqrt{٧})^{٢} = ٤٢$

٤ $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} + \sqrt{٢٧}) = ٣ + \sqrt{٨١} = ٣ + ٩ = ١٢$

مثال ٢

أوجد ناتج كلاً مما يلي في أبسط صورة :

١ $(٥ + \sqrt{٢})^{٢}$

٢ $(٥ + \sqrt{٢})(٥ - \sqrt{٢})$

٣ $(\sqrt{١٠} + \sqrt{٣})(\sqrt{٣} - \sqrt{١٠})$

الحل

١ $(٥ + \sqrt{٢})^{٢} = (٥ + \sqrt{٢})(٥ + \sqrt{٢})$

$= ٢٥ + ٢ \times ٥ \times \sqrt{٢} + ٢$

$= ٢٥ + ١٠\sqrt{٢} + ٢$

$= ٢٧ + ١٠\sqrt{٢}$

٢ $(٥ + \sqrt{٢})(٥ - \sqrt{٢}) = ٢٥ + ٥\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢} - ٢$

$= ٢٥ - ٢$

$= ٢٣$

٣ $(\sqrt{١٠} + \sqrt{٣})(\sqrt{٣} - \sqrt{١٠}) = ٣ - ١٠ = -٧$ ■

تعريف

إذا كان كل من $\sqrt{أ}$ ، $\sqrt{ب}$ عدداً حقيقياً فإن :

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ ، $\sqrt{أ} - \sqrt{ب}$ مقداران مترافقان وكذلك

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب}$ ، $\sqrt{ب} - \sqrt{أ}$ مقداران مترافقان

ويكون $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})(\sqrt{أ} - \sqrt{ب}) = أ - ب$ = عدداً نسبياً

فمثلاً $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ مترافقان لأن $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

وفي المثال السابق $(٥ + \sqrt{٢})$ ، $(٥ - \sqrt{٢})$ مترافقان لأن حاصل ضربهما ٢٣

$(\sqrt{١٠} + \sqrt{٣})$ ، $(\sqrt{٣} - \sqrt{١٠})$ مترافقان لماذا؟

$(٥ + \sqrt{٢})(٥ + \sqrt{٢})$ غير مترافقان لماذا؟

ونستخدم فكرة المرافق عند اختصار الكسر الذي يحوي مقامه جذراً

فمثلاً عند اختصار الكسر $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ نضرب حدي الكسر في مرافق المقام

$$\frac{٥}{\sqrt{٥}} = \frac{٥}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٥} = \sqrt{٥}$$

كذلك

$$\frac{٣}{\sqrt{٦}} = \frac{٣}{\sqrt{٦}} \times \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٦}} = \frac{٣\sqrt{٦}}{٦} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$$

$$\frac{١}{\sqrt{٥}} = \sqrt{\frac{١}{٥}} = \sqrt{\frac{١ \times ٥}{٥ \times ٥}} = \sqrt{\frac{٥}{٢٥}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{\sqrt{٥}}{٥}$$

أو

$$\frac{١}{\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥}}{٥}$$

أمثلة أخرى

$$\frac{١}{\sqrt{٨}} = \sqrt{\frac{١}{٨}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{١٦}} = \frac{\sqrt{٢}}{٤} ،$$

$$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣٣}}{٣} ،$$

$$\sqrt{\frac{٨}{٢٥}} = \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢٥}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢٥}} = \frac{\sqrt{٥}\,٢}{٥}$$

مثال ٣

اختصر كلاً مما يلي بحيث يكون المقام عدداً نسبياً :

١ $\frac{٤ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

٢ $\frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٢٠}}{\sqrt{١٠}}$

٣ $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$

٤ $\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$

الحل

١

$$\frac{٤ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٤ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٤\sqrt{٢} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{٢}$$

$$= \frac{٤\sqrt{٢} + ٢}{٢}$$

$$= \frac{٢(٢\sqrt{٢} + ١)}{٢}$$

$$= ٢\sqrt{٢} + ١$$

٢

$$\frac{\sqrt{٢٠} + \sqrt{٥}}{\sqrt{١٠}} = \frac{\sqrt{٢٠} + \sqrt{٥}}{\sqrt{١٠}} \times \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٠}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢٠٠} + \sqrt{٥٠}}{١٠}$$

$$= \frac{١٠\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$$

٣

$$\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٣(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})}{٥ - ٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$$

٤

$$\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})}{(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})}$$

$$= \frac{٣ + ٢ + ٢\sqrt{٦}}{٣ - ٢}$$

$$= ٥ + ٢\sqrt{٦}$$

تمارين ٤-١جـ

أسئلة مقالية

لكل بند مما يلي عدة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح :

١ ناتج $(\sqrt{٧} - ٢)(\sqrt{٧} + ٢)$ هو

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢ مرافق العدد $(٣ + \frac{٥}{\sqrt{٥}})$ هو

(أ) $٥\sqrt{٥}$ (ب) $٣ + \sqrt{٥}$ (جـ) $٣ - \sqrt{٥}$ (د) $\sqrt{٥}$

٣ مرافق العدد $(٢ + \sqrt{٥})^٢$ هو

(أ) $٩ + ٢\sqrt{٥}$ (ب) $٩ - ٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٩ - ٤\sqrt{٥}$ (د) $٩ + ٤\sqrt{٥}$

٤ إذا كان $أ^٢ - ب^٢ = ٤٥$ ، $أ + ب = ٥\sqrt{٣}$ فإن $أ - ب$

(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) $-٥\sqrt{٣}$ (د) $-٣\sqrt{٣}$

٥ إذا كانت $س = (٣)^{-٢} - (٣)^{-١} + (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢$ فإن قيمة س هي

(أ) ٠ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

أسئلة مقالية

ضع ناتج كلاً مما يلي في أبسط صورة مع توضيح خطوات الحل :

١ $(\sqrt{٢} - ١)^٢$

٢ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^٢$

٣ $(\sqrt{٥} - ١)(\sqrt{٥} + ١)$

٤ $\sqrt{\frac{٣}{٧}}$

٥ $\frac{\sqrt{٦ ب^٢}}{\sqrt{٣}}$

٦ $\frac{٧}{١ - \sqrt{٧}}$

٧ $\frac{\sqrt{٥}}{١ + \sqrt{٥}}$

٨ $\frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} - ١}$

٩ $(\sqrt{٦} + \sqrt{٢})(\sqrt{٦} - \sqrt{٢})$

١٠ $٣\sqrt{٢}(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$

تمارين عامة (١ - ٥)

أسئلة مقالية :

أولاً : في البنود من (١ - ١٠) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة ، ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ العددان $(٣ + \frac{٥}{\sqrt{٥}})$ ، $(٣ - \sqrt{٥})$ مترافقان (أ) (ب)

٢ إذا كانت س = $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{-٤}$ ، ص = $(\frac{١}{٣})^{-١}$ فإن س + ص = ٥ (أ) (ب)

٣ النظير الضربي للعدد = $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$ هو $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ (أ) (ب)

٤ $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٢} (\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{-١} = ٢$ (أ) (ب)

٥ إذا كانت س = $(٤)^{٣}$ ، ص = $(٤)^{٥}$ فإن ص > س (أ) (ب)

٦ إذا كانت س = $(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٥}$ ، ص = $(\sqrt[٣]{٨})^{٣}$ فإن س + ص = ٨ (أ) (ب)

٧ $\frac{(\sqrt{٣})^{-١}}{(\sqrt{٢})^{-١}} > (٣^{٢})^{-١} \times (٢^{٣})^{-١}$ (أ) (ب)

٨ أبسط صورة لحاصل ضرب $(-٣ \text{ س ص})^{٢} (٢\text{س})^{٣}$ هو $-١٨ \text{ س}^{٢} \text{ ص}^{٢}$ (أ) (ب)

٩ إذا كانت س = $(٩ \times ١٠^{٢}) - (٣ \times ١٠^{٢})$ ، ص = $\frac{٨ \times ١٠^{٣}}{٤ \times ١٠^{٢}}$ فإن $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = ٣$ (أ) (ب)

ثانياً : لكل بند مما يلي عدة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح :

١ إذا كان $\sqrt{\text{س}} = \sqrt{٥} - ١$ فإن س =

(أ) $٦ + ٢\sqrt{٥}$ (ب) $٦ - ٢\sqrt{٥}$ (جـ) $٢\sqrt{٥}$ (د) ٦

٢ إذا كان $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٢٠$ ، $\text{س} - \text{ص} = \sqrt{٥}$ فإن س + ص =

(أ) $٤\sqrt{٥}$ (ب) ٤ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) $-٤\sqrt{٥}$

٣ إذا كان س = $\frac{٣^{٢} \times ٥^{-٢}}{٣^{-١} \times ٥^{-١}}$ فإن قيمة ٥ س + ٢ هي

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٣ (د) ٥

٤ إذا كان أ = $(\frac{١}{٣})^{-٢}$ ، ب = $(-\frac{٢}{٣})^{٢}$ فإن قيمة أ × ب هي

(أ) -١٢ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ١٢

٥ فيما يلي التعبير الجذري الذي في أبسط صورة هو

(أ) $\sqrt{\frac{٤}{٥}}$ (ب) $\sqrt{س^{٢}}$ (جـ) $\sqrt{٦٤ أ^{٢} ب^{٢}}$ (د) $٧\sqrt{٣}$

٦ أبسط صورة للمقدار $\frac{(٩)^{س} \times (٣)^{س}}{٣^{س+١} (س+١)}$ هي

(أ) $(٣)^{س^{٢}+س}$ (ب) $(٣)^{س^{٢}-س}$ (جـ) $(٣)^{س^{٢}+٢س}$ (د) $(٣)^{س^{٢}-٢س}$

أسئلة مقالية

أولاً - اختصر لأبسط صورة :

١ $\left(\frac{٤٩ س^{٨}}{٨١ س^{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$

٢ $\left(\frac{أ^{٣} ب^{٦}}{٢٧ جـ^{٩}}\right)^{-\frac{١}{٣}}$

٣ $\frac{٦^{س+١} \times ٣^{س-١}}{٣٢^{س} \times ٢٧^{س}}$

٤ $\frac{٢٥^{س} \times ٢^{س+١}}{١٠^{س^{٢}}}$

٥ $\frac{٦^{س+٢٠}}{٢^{س+١٠} \times ٣^{س+١٠}}$

٦ $\sqrt[٣]{٢٤} + \sqrt[٣]{٨١} - ١٢\sqrt[٣]{\frac{٣}{٢٧}}$

٧ $٢\sqrt{٦} - ٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} + \sqrt{٥٤}$

ثانياً :

١ إذا كانت س = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

فأثبت أن $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٩$

٢ إذا كان أ = $\frac{٧}{٣ - \sqrt{٢}}$ ، ب = $\frac{٧}{٣ + \sqrt{٢}}$

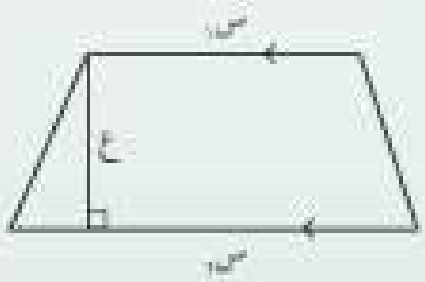
فأثبت أن

أ أ ب = ٧

ب $أ^٢ - ب^٢ = ١٢\sqrt{٢}$

ثالثاً :

١ إذا كانت مساحة منطقة شبه المنحرف تعطى بالعلاقة



م = $\frac{١}{٢}$ (س١ + س٢) ع

حيث س١ ، س٢ طولا قاعدتيه المتوازيتين ،

ع ارتفاعه . فإذا علم أن س١ = ٥ أ وحدة طول ،

س٢ = ١١ أ وحدة طول ، الارتفاع = ٨ أ ب وحدة طول

فأوجد مساحة منطقة شبه المنحرف .

قائمة بالمفردات الرياضية

الفصل الأول

باللغة العربية	باللغة الإنجليزية	باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
الأسس	Exponents	الأسس النسبية	Rational Exponents
التعبيرات الأسية	Exponential expressions	تبسيط التعبيرات الجذرية	Simlifying Radical Expressions
الأسس الصحيحة الموجبة	Positive Integral Exponents	جمع وطرح التعبيرات الجذرية	Addition and Subtraction of radical expressions
الأسس الصحيحة السالبة	Negative Integral Exponents	ضرب وقسمة التعبيرات الجذرية	Multiplication and Division of radical expressions
التعبيرات الجذرية	Radical Expressions	جذر	Root

الفصل الثاني

المتتاليات
SEQUENCES

ربط الرياضيات بالرياضة

هل تعلم أن:

كرة السلة هي لعبة جماعية ، يحكمها قانون خاص بها ولها اتحاد دولي .

يتكون كل فريق مما لا يزيد عن عشرة لاعبين ويتواجد على أرض الملعب خمسة لاعبين من كل فريق وزمن المباراة ٢٠ دقيقة لكل شوط تقع بينها فترة راحة ١٠ دقائق .

حل المشكلات Problem Solving

سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٢٨ سم فإذا كانت الكرة ترتد بعد كل اصطدام إلى نصف الارتفاع الذي سقطت منه . فهل الارتفاعات التي تسقط منها الكرة تكوّن متتالية؟ وما نوع المتتالية؟

الفصل الثاني

المتتاليات

الهدف
يتعرف المتتالية

الكلمات الجديدة
المتتالية

٢ - ١ المتتاليات Sequences

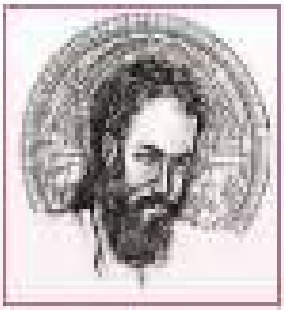
مقدمة

هناك تتابع لمجموعة من الأرقام يكون على هيئة نماذج رياضية معينة .

فمثلاً إذا نظرنا إلى الأعداد ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، . . . . فإنه يمكن الحصول على الحد التالي بإضافة ٣ للحد السابق إذا كانت هذه الإضافة ثابتة .

وإذا نظرنا إلى الأعداد ٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ٢٨ ، فإنه يمكن الحصول على الحد التالي بطرح ٤ من الحد السابق إذا كان هذا الفرق ثابت .

ولهذا النوع من النماذج الرياضية تطبيقات في الحياة العلمية مثل التنبؤ بحساب حجم المجتمعات البشرية لعشرات السنوات القادمة إذا كانت نسبة زيادة السكان ثابتة ، أو تكاثر البكتيريا في مزرعة بكتيريا إذا كان هذا التكاثر ثابتاً . ولهذه النماذج الرياضية تطبيقات في المؤسسات المالية كالاستثمار في البورصة مثلاً ، حيث أصبح لدى الأفراد في أي بلد درجة كبيرة من الوعي نحو الاستثمار لتحقيق أرباح . فهؤلاء الذين يستغلون تلك النماذج الرياضية في اتخاذ قرارات الاستثمار يزيدون من فرص المكسب وهذا ما يطلق عليه العالم الآن «قرارات رشيدة» أي قرارات تعتمد على صيغة علمية أثبت صحتها وصلاحية تطبيقها .



غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي (المتوفى سنة ٨٣٩هـ/ ١٤٣٦م) من أعظم من اشتهر في القرن التاسع الهجري بالحكمة والرياضيات والفلك والنجوم وغيرها .

ولد في مدينة كاشان - قاشان - في بلاد فارس وكان يقيم فيها مدة ، ثم ينتقل إلى مكان آخر .

درس الكاشي النحو والصرف والمنطق والمنطق ، ثم درس الرياضيات وتعمق فيها . فقد ابتكر الكاشي الكسور العشرية ، ويقول سمث في كتابه «تاريخ الرياضيات» : «إن الخلاف بين علماء الرياضيات كبير ، ولكن غالبيتهم تتفق على أن الكاشي هو الذي ابتكر الكسر العشري» . كما وضع الكاشي قانوناً خاصاً بجمع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة .

ويقول كاراذي في حديثه عن علماء الفلك المسلمين : «ثم يأتي الكاشي فيقدم لنا طريقة لجمع المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة ، وهي الطريقة التي لا يمكن أن يتوصل إليها بقليل من الشك» .

http://ar.wikipedia.org

تعريف ١

المتتالية Sequence : هي تطبيق مجاله ص ، أو مجموعة جزئية مرتبة منها ، ويرمز للحد الأول في المتتالية بالرمز $ح_{١}$ وللحد الثاني بالرمز $ح_{٢}$ وللحد الثالث بالرمز $ح_{٣}$ وهكذا . . . . حيث يرمز للحد النوني بالرمز $ح_{ن}$ ، ويمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها كما يلي :

$$ح_{١} ، ح_{٢} ، ح_{٣} ، . . . ، ح_{ن}$$

ملاحظة

حدود المتتالية يمكن الحصول عليها من صور عناصر مجال المتتالية .

الهدف
يتعرف المتتالية المنتهية وغير المنتهية

الكلمات الجديدة
متتالية منتهية - متتالية غير منتهية - حد متتالية ثابتة

٢ - ١ أ المتتالية المنتهية وغير المنتهية Finite & Infinite Sequence

مثال ١

إذا كان ت : {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ⟵ ح تطبيقاً معرفاً بقاعدة الاقتران ت (ن) = ن^{٢} بين فيما إذا كان التطبيق متتالية ، ثم أوجد حدود المتتالية .

الحل

ت تطبيق مجاله مجموعة جزئية مرتبة من صح .

∴ التطبيق متتالية

ت (١) = ١

ت (٢) = ٤

ت (٣) = ٩

ت (٤) = ١٦

ت (٥) = ٢٥

أي أنه يمكن كتابة حدود المتتالية على النحو التالي :

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ■

تعريف ٢

المتتالية المنتهية Finite Sequence : تكون المتتالية منتهية إذا كان مجالها مجموعة جزئية مرتبة ومحدودة من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة صح .

لاحظ أن المتتالية المذكورة في مثال (١) متتالية منتهية .

مثال ٢

إذا كان ت : صـ$_{ن}$ ⟵ ح تطبيقاً معرفاً بقاعدة الاقتران

ت (ن) = $\frac{(-١)^{ن}}{(٢)^{ن}}$ بين فيما إذا كان التطبيق متتالية ، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية .

الحل

ت تطبيق مجاله صـ$_{ن}$

∴ التطبيق متتالية

ت (١) = $\frac{-١}{٢^{١}}$ = $-\frac{١}{٤}$

ت (٢) = $\frac{١}{٢^{٢}}$ = $\frac{١}{٨}$

ت (٣) = $\frac{-١}{٢^{٣}}$ = $-\frac{١}{١٦}$

أي أنه يمكن كتابة حدود المتتالية على النحو التالي :

$-\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، $-\frac{١}{١٦}$ ، . . .

تعريف ٣

المتتالية غير المنتهية Infinite Sequence : تكون المتتالية غير منتهية إذا كان مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (صـ$_{ن}$) أو مجموعة جزئية مرتبة غير منتهية منها .

لاحظ أن المتتالية المذكورة في مثال ٢ متتالية غير منتهية .

ملاحظة

إذا تساوت حدود المتتالية فإنها تسمى متتالية ثابتة .

فمثلاً :

المتتالية ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ متتالية ثابتة منتهية .

المتتالية ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، . . . متتالية ثابتة غير منتهية .

الهدف
يوجد الحد النوني لمتتالية

الكلمات الجديدة
الحد النوني لمتتالية

٢ - ١ ب الحد النوني لمتتالية The nth term of a sequence

الحد النوني أو الحد العام لمتتالية هو صورة العنصر الذي ترتيبه (ن) في مجال المتتالية ويرمز له عادة بالرمز $ح_ن$.

وغالباً ما يكون معلوم لدينا بعض حدود المتتالية ويكون المطلوب ايجاد صيغة الحد النوني ، ويتطلب ذلك التمعن الجيد في الحدود للوصول إلى صيغة النموذج الذي تسير عليه هذه الحدود .

أي أنه قد يُطلبُ منا استخراج الحد النوني $ح_ن$ من خلال حدود معطاة للمتتالية .

مثال ١

أوجد الحد النوني $ح_ن$ للمتتالية غير المنتهية الآتية :

٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، . . . .

الحل

يمكن كتابة الحد النوني للأعداد الزوجية من الصيغة التالية :

$ح_ن = ٢ن$

ولنتحقق من ذلك نكتب بعض الحدود باستخدام صيغة الحد النوني هكذا :

$ح_١ = ٢(١) = ٢$

$ح_٢ = ٢(٢) = ٤$

$ح_٣ = ٢(٣) = ٦$

$ح_٤ = ٢(٤) = ٨$

أي أن صيغة الحد النوني $ح_ن = ٢ن$ صحيحة . ■

مثال ٢

أوجد الحد النوني $ح_ن$ للمتتالية غير المنتهية الآتية :

٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، . . . .

الحل

حيث إنه يمكن كتابة الحد النوني في الأعداد الزوجية كما يتضح من المثال السابق بالصيغة $ح_ن = ٢ن$ ، ولكون كل عدد فردي يزيد عن العدد الزوجي بواحد - في هذا المثال - فإن صيغة الحد النوني يمكن كتابتها على الصورة :

$ح_ن = ٢ن + ١$

وللتحقق من ذلك نكتب بعض الحدود باستخدام صيغة الحد النوني كما يلي :

$ح_١ = ٢(١) + ١ = ٣$

$ح_٢ = ٢(٢) + ١ = ٥$

$ح_٣ = ٢(٣) + ١ = ٧$

$ح_٤ = ٢(٤) + ١ = ٩$ وهكذا

أي أن صيغة الحد النوني $ح_ن = ٢ن + ١$ صحيحة . ■

مثال (٢)

أوجد الحد النوني للمتتالية غير المنتهية التالية :

$١ ، -\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٩} ، -\frac{١}{١٦} ، ...$

الحل

$ح_ن = \frac{(-١)^{ن+١}}{(ن)^٢}$ (تحقق من الحل بإيجاد الحدود الأربعة الأولى)

$ح_١ = \frac{(-١)^٢}{١} = ١$

$ح_٢ = \frac{(-١)^٣}{(٢)^٢} = -\frac{١}{٤}$

$ح_٣ = \frac{(-١)^٤}{(٣)^٢} = \frac{١}{٩}$

$ح_٤ = \frac{(-١)^٥}{(٤)^٢} = -\frac{١}{١٦}$ ■

مثال ٤

أوجد كلاً من $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$ للمتتالية التي حدها النوني هو $ح_ن = \frac{(-١)^{ن+١}}{(ن)^٢}$

الحل

$$ح_١ = \frac{(-١)^٢}{١} = -١$$

$$ح_٢ = \frac{(-١)^٣}{(٢)^٢} = \frac{-١}{٤}$$

$$ح_٣ = \frac{(-١)^٤}{(٣)^٢} = \frac{-١}{٩}$$

$$ح_٤ = \frac{(-١)^٥}{(٤)^٢} = \frac{١}{١٦}$$

$$ح_٥ = \frac{(-١)^٦}{(٥)^٢} = \frac{١}{٢٥}$$

تمـــارين ١-٢

بنود موضوعية :

في البنود من (١ – ٧) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة . ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ الحد النوني للمتتالية : ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، . . . . هو ح$_{ن}$ = ٢ن (أ) (ب)

٢ الحد النوني للمتتالية : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، . . . . هو ح$_{ن}$ = ٢ن – ١ (أ) (ب)

٣ المتتالية المنتهية هي تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة . (أ) (ب)

٤ المتتالية غير المنتهية هي تطبيق مجاله مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحة الموجبة . (أ) (ب)

٥ الحد النوني للمتتالية : – ١ ، ٤ ، –٩ ، ١٦ ، –٢٥ ، . . . . هو ح$_{ن}$ = (–١)$^{ن+١}$ ن^{٢} (أ) (ب)

٦ الحد السادس للمتتالية التي حدها النوني ح$_{ن}$ = (–١)$^{ن+١}$ × ٢^{ن} هو ٦٤ (أ) (ب)

٧ الحد العاشر للمتتالية : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، . . . . هو ١٠٢٤ (أ) (ب)

أسئلة مقالية :

أولاً : عرف كلاً مما يأتي :

١ المتتالية .

٢ حد المتتالية .

٣ المتتالية المنتهية .

٤ المتتالية غير المنتهية .

ثانياً : أوجد حدود المتتاليات المنتهية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = ن^2$ ، $1 \leq ن \leq 4$

٢ $ح_ن = -ن^2$ ، $1 \leq ن \leq 4$

٣ $ح_ن = 2ن + 6$ ، $1 \leq ن \leq 7$

٤ $ح_ن = 2ن - 3$ ، $1 \leq ن \leq 7$

٥ $ح_ن = 2^{ن}$ ، $1 \leq ن \leq 6$

٦ $ح_ن = (-2)^{ن+1}$ ، $1 \leq ن \leq 5$

٧ $ح_ن = \frac{(-1)^{ن}}{(ن)}$ ، $1 \leq ن \leq 10$

ثالثاً : أوجد الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات غير المنتهية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = 2ن - 3$

٢ $ح_ن = \frac{1}{2ن - 5}$

٣ $ح_ن = \frac{4}{2ن - 5}$

٤ $ح_ن = \frac{(-1)^{ن+1}}{ن^2}$

٥ $ح_ن = (-1)^{ن} (ن - 2)^2$

رابعاً : استنتج صيغة الحد النوني للمتتاليات غير المنتهية التالية :

١ ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ...

٢ ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ...

٣ ٠ ، ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...

٤ ١ ، -٣ ، ٩ ، -٢٧ ، ...

٥ -١ ، ٢ ، -٤ ، ٨ ، -١٦ ، ...

خامساً : أوجد كلاً من $ح_1$ ، $ح_2$ ، $ح_3$ للمتتالية التي حدها النوني $ح_ن = \frac{1}{ن^2 + ن}$

الهدف
يتعرف المتتالية الحسابية

الكلمات الجديدة
متتالية حسابية

٢ - ٢ المتتالية الحسابية Arithmetic Sequence

لقد عرفنا المتتالية في الجزء السابق والآن نتناول نوعاً خاصاً من المتتاليات يطلق عليه المتتاليات الحسابية .

مثال ١

ادرس المتتالية الآتية من حيث نمط الحدود التي تحويها

٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥

الحل

تسمى هذه المتتالية بالحسابية بسبب نمط الحدود التي تحويها ،

فكل حد يزيد عن الحد الذي يسبقه مباشرة بمقدار ٤

٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٥

+٤ +٤ +٤ +٤ +٤

الفرق الثابت ← Common Difference

لاحظ أن كل حد بعد الحد الأول يمكن الحصول عليه من جمع الحد السابق له بالعدد ٤

مثال ٢

ادرس المتتالية الآتية من حيث كونها حسابية أم لا :

٢ ، ٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٧ ، ...

الحل

$ح_٢ - ح_١ = ٣ - ٢ = ١$ ، $ح_٣ - ح_٢ = ٨ - ٣ = ٥$

$\therefore ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$

أي أننا نستنتج أن كل حد يزيد عن الحد الذي قبله بقيمة ليست ثابتة .

وبناءً على ذلك فإن هذه المتتالية ليست حسابية .

مما سبق فإنه يمكن استخلاص التعريف التالي :

تعريف

يقال أن المتتالية التي حدها النوني $ح_ن$ متتالية حسابية إذا كان :

$ح_ن - ح_{ن-١}$ = عدد ثابت لكل ن تنتمي لمجال المتتالية بحيث ن > ١

● وفي حالة ما يكون $ح_ن - ح_{ن-١}$ ≠ عدد ثابت لأي ن تنتمي لمجال المتتالية ، فإنها في هذه الحالة تكون متتالية غير حسابية .

إن هذا الفرق الثابت (المشترك) Common Difference بين كل حد والحد الذي يسبقه يرمز له بالرمز d باللغة الإنجليزية ، كما يرمز له بالرمز د باللغة العربية وقد أطلق عليه «أساس المتتالية» .

أي أن $ح_ن = ح_{ن-١} + د$

مثال (٣)

حدد أي من المتتاليات التالية حسابية واكتب أساسها :

١ $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{٥}{٢}$

٢ $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$

٣ ٥ ، ٠ ، −٥ ، −١٠ ، −١٥

٤ ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

٥ ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣

الحل

١ $ح_٢ - ح_١ = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ - ح_٢ = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{١}{٢}$

∴ $ح_٣ - ح_٢ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ح_٥ - ح_٤ = \frac{١}{٢}$

∴ المتتالية حسابية ، $د = \frac{١}{٢}$

٢ $ح_١ - ح_٠ = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٦}$ ، $ح_٢ - ح_١ = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} = -\frac{١}{١٢}$

∴ $ح_١ - ح_٠ \neq ح_٢ - ح_١ \neq$ عدد ثابت .

∴ المتتالية ليست حسابية .

٣ $ح_١ - ح_٠ = ٠ - ٥ = -٥$ ، $ح_٢ - ح_١ = -٥ - ٠ = -٥$

∴ $ح_١ - ح_٠ = ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = -٥$.

∴ المتتالية حسابية ، د = −٥ .

٤ $ح_١ - ح_٠ = ٣ - ٢ = ١$ ، $ح_٢ - ح_١ = ٤ - ٣ = ١$

∴ $ح_١ - ح_٠ = ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ١$.

∴ المتتالية حسابية ، د = ١ .

٥ $ح_١ - ح_٠ = ٣ - ٣ = ٠$ ، $ح_٢ - ح_١ = ٣ - ٣ = ٠$

∴ $ح_١ - ح_٠ = ح_٢ - ح_١$ (لاحظ أن المتتالية ثابتة والفرق بين كل حدين متتاليين فيها = ٠)

∴ المتتالية حسابية ، د = ٠ . ■

الهدف
يتعرف الحد النوني للمتتالية حسابية
يوجد حدود متتالية حسابية عُلم حدها الأول

الكلمات الجديدة
الحد النوني لمتتالية حسابية

٢ - ٢أ الحد النوني للمتتالية الحسابية

The nth term of an arithmetic sequence

علمنا مما سبق أن $ح_{ن} = ح_{ن-١} + د$ وبناء على ذلك فإن

$ح_{١} = ح_{١}$

$ح_{٢} = ح_{١} + د = (ح_{١} + د) + د = ح_{١} + ٢د$

$ح_{٣} = ح_{٢} + د = (ح_{١} + ٢د) + د = ح_{١} + ٣د$

$ح_{٤} = ح_{٣} + د = (ح_{١} + ٣د) + د = ح_{١} + ٤د$

ويمكننا أن نستنتج أن صيغة الحد النوني لمتتالية حسابية هي :

$$ح_{ن} = ح_{١} + (ن - ١)د$$

مثال ١

أوجد الحد التاسع للمتتالية الحسابية التالية :

٢ ، ٧ ، ١٢ ، ١٧ ، . . .

الحل

$ح_{٩} = ح_{١} + (٩ - ١)د$

$= ٢ + (٨) ٥$

$= ٢ + ٤٠ = ٤٢$

$\therefore$ الحد التاسع = ٤٢ ■

مثال ٢

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الحسابية التي حدها النوني هو :

$ح_{ن} = ٣ + ٦ (ن - ١)$

الحل

$ح_1 = ٣ + ٦ (١ - ١) = ٣$

$ح_2 = ٣ + ٦ (٢ - ١) = ٩$

$ح_3 = ٣ + ٦ (٣ - ١) = ١٥$

$ح_4 = ٣ + ٦ (٤ - ١) = ٢١$

$ح_5 = ٣ + ٦ (٥ - ١) = ٢٧$

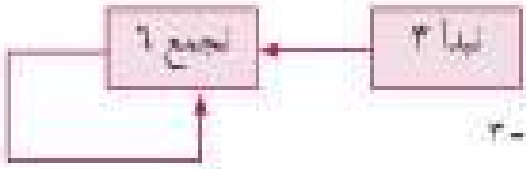
∴ حدود المتتالية هي :

٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٧ ، . . .

حل آخر :

يمكن رسم نموذج (iteration diagram)

يصف المتتالية الحسابية حيث $ح_1 = ٣$ ، د = ٦ (الأساس)



$ح_1 = ٣$

$ح_2 = ٣ + ٦ = ٩$

$ح_3 = ٩ + ٦ = ١٥$

$ح_4 = ١٥ + ٦ = ٢١$

$ح_5 = ٢١ + ٦ = ٢٧$

مثال ٣

أوجد أساس متتالية حسابية إذا كان حدها الأول −٨ وحدها التاسع −٦٤

الحل

∵ $ح_ن = ح_1 + (ن - ١)د$

∴ $ح_9 = ح_1 + (٩ - ١)د$

$-٦٤ = -٨ + (٨)د$

∴ $٨ د = -٥٦$

∴ $د = -٧$ ■

مثال ٤

إذا كان أساس متتالية حسابية −٢ وحدها السابع ١٤ ، فما حدها الأول .

الحل

∵ $ح_ن = ح_1 + (ن - ١)د$

∴ $١٤ = ح_1 + (٧ - ١)(-٢)$

$١٤ = ح_1 + (٦)(-٢) = ح_1 - ١٢$

∴ $ح_1 = ١٤ + ١٢ = ٢٦$ ■

مثال ٥

أوجد الحد السادس عشر لمتتالية حسابية حدها الخامس ١٣ وحدها الأول −٣

الحل

∵ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$

∴ $١٣ = -٣ + ٤د$

$٤د = ١٦$

∴ $د = ٤$

$ح_{١٦} = ح_١ + ١٥د$

$= -٣ + ١٥(٤) = -٣ + ٦٠$

∴ $ح_{١٦} = ٥٧$ ■

مثال ٦

أوجد صيغة الحد النوني للمتتالية الحسابية الآتية :

٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، . . .

الحل

∵ $ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$ ، $ح_١ = ٥$ ، $د = ٤$

∴ $ح_ن = ٥ + ٤(ن - ١)$

$= ٥ + ٤ن - ٤$

∴ $ح_ن = ٤ن + ١$ ■

مثال ٧

أوجد صيغة الحد النوني للمتتالية الحسابية الآتية :

٤ ، ١ ، −٢ ، −٥ ، −٨ ، . . .

الحل

$ح_١ = ٤$ ، $د = -٣$

∴ $ح_ن = ٤ + (ن - ١)(-٣)$

$= ٤ - ٣ن + ٣$

∴ $ح_ن = -٣ن + ٧$ ■

مثال ٨

أوجد رتبة الحد الذي قيمته −٥٦ في المتتالية الحسابية التالية :

٤ ، ١ ، −٢ ، −٥ ، −٨ ، . . .

الحل

$ح_١ = ٤$ ، $د = -٣$

$\therefore ح_ن = ٤ + (ن - ١)(-٣)$

$= ٤ - ٣ن + ٣$

$\therefore ح_ن = -٣ن + ٧$

$\therefore -٥٦ = -٣ن + ٧$

$\therefore -٣ن = -٦٣$

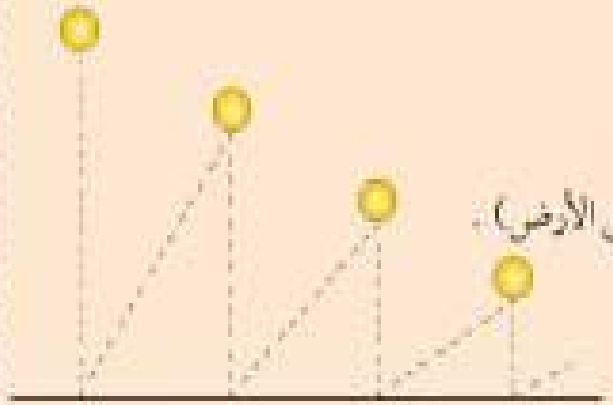
$ن = ٢١$

∴ الحد الحادي والعشرون هو الحد الذي قيمته −٥٦ ■

حل المشكلات Problem Solving

مثال ٩

سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٢٠ سم . فإذا كانت الكرة ترتد بعد كل اصطدام بالأرض إلى ارتفاع أقل من الارتفاع الذي سقطت منه بمقدار ٤ سم فإذا كانت الارتفاعات التي تسقط منها الكرة تُكوِّنُ متتالية أجب عما يلي :



أ ما نوع المتتالية؟

ب إذا كان $ح_ن$ = صفر ، فما قيمة ن؟

(أو بمعنى آخر متى تستقر الكرة على الأرض) .

جـ اكتب الحد النوني $ح_ن$

د هل المتتالية منتهية؟

الحل

الكرة تسقط أولاً من ارتفاع ١٢٠ سم ثم تسقط بعد الاصطدام الأول بالأرض من ارتفاع ١١٦ سم وبعد الاصطدام الثاني تسقط من ارتفاع ١١٢ سم وهكذا . . . وبناءً على ذلك تُكوِّن الارتفاعات التي تسقط منها الكرة المتتالية الآتية :

١٢٠ ، ١١٦ ، ١١٢ ، ١٠٨ ، . . . .

أ المتتالية حسابية :

$ح_١ = ١٢٠$ ، $د = -٤$

ب لإيجاد متى تستقر الكرة على الأرض فإنه ينبغي أن يكون $ح_ن$ = صفر ،

أي أن $١٢٤ - ٤ن$ = صفر

$\therefore ٤ن = ١٢٤ \quad \therefore ن = ٣١$ ،

وهذا يعني أن الكرة تستقر على الأرض بعد التصادم رقم ٣٠ .

جـ $\because ح_ن = ح_١ + (ن - ١) د$

$\therefore ح_ن = ١٢٠ + (ن - ١)(-٤)$

$= ١٢٠ - ٤ن + ٤$

$ح_ن = ١٢٤ - ٤ن$.

د نعم المتتالية منتهية كما اتضح من الإجابة عن الجزء (ب) .

تمـــارين (٢-٢م)

بنود موضوعية :

في البنود من (١-٥) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة . ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ المتتالية الحسابية ٣ ، ١ ، -١ ، -٣ ، -٥ أساسها هو ٢ . (أ) (ب)

٢ المتتالية ٢ ، ٥ ، ٩ ، ١٤ ، ٢٠ ، ٢٧ ، . . . هي متتالية حسابية . (أ) (ب)

٣ المتتالية ٢ ، ٤ ، ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٢ ، . . . هي متتالية حسابية . (أ) (ب)

٤ إذا كان $ح_{٥} = ٥$ ، $ح_{م} = ١٠$ في متتالية حسابية فإن $ح_{٢} = ١٥$. (أ) (ب)

٥ إذا كان $ح_{٦} = ٦$ ، $ح_{م} = ٢$ في متتالية حسابية فإن $ح_{٢} = ١٠$ (أ) (ب)

أسئلة مقالية :

أولاً - أجب عن الأسئلة التالية :

١ عرّف المتتالية الحسابية .

٢ عرّف أساس المتتالية الحسابية .

ثانياً - أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الحسابية التي حدها النوني هو :

١ $ح_{ن} = ٩ + (ن - ١) ٤$

٢ $ح_{ن} = ٧ + (ن - ١) (-٢)$

٣ $ح_{ن} = -٣ن + ١$

٤ $ح_{ن} = ٠,٥ن + ٤$

٥ $ح_{ن} = ٠,٣ن + ١$

٦ $ح_{ن} = ٢٠ن + ١٠٠٠$

ثالثاً - استنتج صيغة الحد النوني لكل من المتتاليات الحسابية التالية :

١ ٠ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، . . . .

٢ ٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٧ ، . . . .

٣ -٤ ، -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، . . . .

٤ ٨ ، ٥ ، ٢ ، -١ ، -٤ ، . . . .

٥ -٥ ، -٧ ، -٩ ، -١١ ، -١٣ ، . . . .

٦ -٣ ، -٢,٥ ، -٢ ، -١,٥ ، . . . .

رابعاً - أجب عن الأسئلة التالية :

١ أوجد الحد الثامن للمتتالية الحسابية التي حدها الأول ٩ ، وأساسها ٦ .

٢ متتالية حسابية حدها الأول ٦ ، وحدها العشرون ٨٢ ، فأوجد أساسها .

٣ متتالية حسابية حدها السادس -٤٢ ، وحدها الأول ٣ ، فأوجد حدها الثامن .

٤ متتالية حسابية حدها السابع ١٤ ، أساسها -٢ ، فأوجد حدها الأول .

٥ متتالية حسابية حدها الثاني عشر -٧ وأساسها ٥ ، فأوجد حدها الأول .

خامساً - حل المشكلات **Problem Solving**

١ ادخر طالب من مصروفه اليومي في يوم ما ٢٠٠ فلس . فإذا علمت أنه يدخر في كل يوم مبلغاً يزيد ٥٠ فلساً عن اليوم السابق . أوجد ما يدخره في اليوم الثاني عشر .

٢ بدأ مهندس عمله بشركة نفط الكويت بتقاضي راتب سنوي ٢٢٠٠٠ د .ك ويزيد مرتبه بقيمة ٥٠٠ د .ك لكل عام . فما قيمة راتبه عن السنة السابعة من بدء عمله ؟

٣ في أول يوم من شهر أكتوبر اقترح معلم اللغة الإنجليزية على طلاب الصف أن يقوموا بقراءة خمس صفحات من رواية إنجليزية . ثم اقترح عليهم في اليوم التالي أن يزيدوا من معدل القراءة اليومية بمقدار صفحتين عن اليوم السابق مباشرة . ما عدد الصفحات التي يكون الطالب قد قرأها في اليوم الخامس والعشرين فقط من شهر أكتوبر ؟

٤ أسندت إدارة المدرسة إلى أحد المقاولين عمل صيانة شاملة لمباني وأجهزة ومرافق المدرسة ، وحددت له يوم محدد لاستلام كافة هذه الأعمال . وكان من بين شروط التعاقد أنه في حالة تأخير المقاول تسليم هذه الأعمال أن يدفع ٥٠٠ د .ك غرامة عن اليوم الأول للتأخير ، و٦٠٠ د .ك عن اليوم الثاني للتأخير ، و٧٠٠ د .ك عن اليوم الثالث للتأخير وهكذا . . . فإذا تأخر المقاول عشرة أيام عن تسليم هذه الأعمال . فكم يكون المبلغ المستحق عليه لتسديد غرامة التأخير عن اليوم العاشر ؟ .

الهدف
يوجد مجموع ن حداً الأولى من متتالية حسابية

٢ - ٢ب مجموع ن حداً الأولى في متتالية حسابية

Sum of the first n terms of an arithmetic sequence

إذا كان $(ح_١)$ هو الحد الأول لمتتالية حسابية أساسها (د) ،

وكان $جـ_ن$ مجموع ن حداً الأولى منها فإن :

$$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ + \ldots\ldots + ح_{ن-١} + ح_ن$$

$$جـ_ن = ح_١ + (ح_١ + د) + (ح_١ + ٢د) + (ح_١ + ٣د) + \ldots + (ح_١ - د) + ح_ن \longleftarrow \quad (١)$$

كما أن

$$جـ_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - ٢د) + (ح_ن - ٣د) + \ldots + (ح_١ - د) + ح_١ \longleftarrow \quad (٢)$$

(وذلك بعكس ترتيب حدود المتتالية المذكورة في (١))

بجمع المعادلتين (١) و (٢) ينتج :

$$٢جـ_ن = \underbrace{(ح_١ + ح_ن) + (ح_٢ + ح_{ن-١}) + (ح_٣ + ح_{ن-٢}) + \ldots + (ح_ن + ح_١)}_{\text{(ن من المرات)}}$$

$$= ن(ح_١ + ح_ن)$$

$$\therefore \quad \boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)} \longleftarrow \quad \text{(الصيغة الأولى)}$$

$$= \frac{ن}{٢}\left[ح_١ + ح_١ + (ن - ١)د\right]$$

أي أن $\boxed{جـ_ن = \frac{ن}{٢}\left[٢ح_١ + (ن - ١)د\right]} \longleftarrow$ (الصيغة الثانية)

مثال ١

أوجد مجموع خمسة الحدود الأولى في المتتالية الحسابية التالية :

١ ، ٧ ، ١٣ ، ١٩ ، . . .

الحل

لدينا $ح_١ = ١$ ، $د = ٦$

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ح_١ + (ن - ١) د]$

∴ مجموع الحدود الخمسة الأولى $جـ_٥ = \frac{٥}{٢} [٢(١) + (٥ - ١)(٦)]$

$= \frac{٥}{٢} [٢ + ٢٤]$

$= ٦٥$

حل آخر :

∵ $ح_١ = ١$ ، $د = ٦$ ، $ح_٥ = ١٩$

∴ $ح_٥ = ٢٥$ ، ∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن)$

∴ مجموع الحدود الخمسة الأولى $جـ_٥ = \frac{٥}{٢} [١ + ٢٥]$

$= \frac{٥}{٢} [٢٦]$

$= ٦٥$

مثال ٢

أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية التالية :

٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، . . . ، ١٠٢٤

الحل

لدينا $ح_١ = ٢$ ، $د = ٢$ ، $ح_ن = ١٠٢٤$

ولإيجاد مجموع حدود متتالية ، يتحتم علينا أولاً إيجاد عدد الحدود (ن) والذي يمكن الحصول عليه من الصيغة :

$$ح_ن = ح_١ + (ن - ١)د$$

$$\therefore \quad ١٠٢٤ = ٢ + (ن - ١)(٢)$$

$$\therefore \quad ٢ن = ١٠٢٤$$

$$\therefore \quad ن = ٥١٢$$

ولإيجاد مجموع (٥١٢) حداً لهذه المتتالية نستخدم الصيغة التالية :

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن)$$

$$جـ_{٥١٢} = \frac{٥١٢}{٢}(٢ + ١٠٢٤)$$

$$= ٢٥٦ (١٠٢٦) = ٢٦٢٦٥٦$$ ■

مثال (٢)

أوجد الحد التاسع والعشرين لمتتالية حسابية يكون فيها مجموع ن حداً الأولى

$$[جـ_ن = ٥ن (\frac{ن+١}{٢})]$$

الحل

لدينا $جـ_ن = ٥ن (\frac{ن+١}{٢})$

$$ح_{٢٩} = جـ_{٢٩} - جـ_{٢٨}$$

$$جـ_{٢٩} = ٥(٢٩)(\frac{٢٩+١}{٢}) = ٢١٧٥$$

$$جـ_{٢٨} = ٥(٢٨)(\frac{٢٨+١}{٢}) = ٢٠٣٠$$

$$\therefore ح_{٢٩} = ٢١٧٥ - ٢٠٣٠ = ١٤٥$$ ■

ملاحظة :

$ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$

حيث $ن > ١$

تمـارين (٢-٢ب)

أولاً - أوجد مجموع ستة الحدود الأولى في المتتاليات الحسابية التالية :

١ ٥ ، ١ ، -٣ ، -٧ ، . . . .

٢ ٠ ، ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، . . . .

٣ ٧ ، ١٢ ، ١٧ ، ٢٢ ، . . . .

ثانياً - أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية التالية :

١ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . . ، ٣٩

٢ ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، . . . . ، ٥٢

٣ ٠ ، ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، . . . . ، ٥٤

ثالثاً - حل المشكلات Problem Solving

ارجع مرة أخرى إلى التمارين المشار إليها في البند (٢ - ٢ م) : خامساً ثم أجب عن الأسئلة التالية وفقاً لرقم كل سؤال في ذلك البند :

١ أوجد مجموع ما سيوفره الطالب في الاثني عشر يوماً .

٢ ما هو إجمالي الراتب الذي حصل عليه المهندس في السنوات السبع ؟

٣ ما عدد الصفحات التي يكون الطالب قد قرأها طوال شهر أكتوبر ؟

٤ كم يكون إجمالي المبلغ المستحق على المقاول لتسديده كغرامة تأخير عن الأيام العشرة؟

الهدف
يتعرف متتالية هندسية

الكلمات الجديدة
متتالية هندسية

٢ - ٣ المتتالية الهندسية

Geometric Sequence

حل المشكلات Problem Solving

بكتيريا تنمو في وسط غذائي بحيث تنقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة ثم إلى ثمانية وهكذا . كم عدد البكتيريا بعد عشرة انقسامات ؟

لقد عرفنا عزيزي المتعلم المتتالية الحسابية في الجزء السابق والآن نتناول نوعاً خاصاً آخراً من المتتاليات يطلق عليه المتتاليات الهندسية .

مثال ١

ادرس المتتالية التالية من حيث نمط الحدود التي تحويها ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦

الحل

تسمى هذه المتتالية بالهندسية بسبب نمط الحدود التي تحويها ، فكل حد عبارة عن الحد السابق له مضروباً في قيمة ثابتة (نسبة ثابتة) وهي ٢ أي أن :

٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦

× ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢

النسبة الثابتة
Common ratio

ملاحظة : ويمكن الحصول على النسبة الثابتة من خلال قسمة الحد على الحد الذي يسبقه مباشرة .

مثال ٢

ادرس المتتالية الآتية من حيث كونها هندسية أم لا : ١ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩

الحل

$\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٤}{١} = ٤$

$\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٥}{٤}$

$\therefore \frac{ح_٢}{ح_١} \neq \frac{ح_٣}{ح_٢}$

وبناء عليه فإن هذه المتتالية ليست هندسية .

مما سبق فإنه يمكن استخلاص التعريف التالي : ■

تعريف

يقال أن المتتالية التي حدها النوني $ح_ن$ متتالية هندسية إذا كان :

$\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}}$ = نسبة ثابتة ، ن > ١

● وفي حالة ما يكون $\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} \neq$ نسبة ثابتة لأي ن من مجال المتتالية ، فإنها في هذه الحالة تكون متتالية غير هندسية .

إن هذه النسبة الثابتة (المشتركة) Common Ratio بين كل حد والحد الذي يسبقه يرمز لها بالرمز (r) باللغة الإنجليزية ، كما يرمز لها بالرمز (م) باللغة العربية (م ≠ ٠) وقد أطلق عليه «أساس المتتالية» .

أي أن $\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}}$ = م ، م ≠ ٠ ، ن > ١

فإذا كان $ح_١$ يرمز إلى الحد الأول فإن :

$ح_٢ = م \times ح_١$

$ح_٣ = م \times ح_٢$ ، . . . وهكذا

مثال (٢)

حدد أي من المتتاليات التالية هندسية واكتب أساسها :

١ ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

٢ ٠,١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ ، ٠,٠٠٠١ ، ٠,٠٠٠٠١

٣ −١ ، ٢ ، −٤ ، ٨ ، −١٦

٤ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠

٥ ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣

الحل

١ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٢}{١} = ٢$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ،

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ٢$

∴ المتتالية ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ هندسية ، أساسها ر = ٢

٢ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٠,٠١}{٠,١} = ٠,١$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٠,٠٠١}{٠,٠١} = ٠,١$

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ٠,١$

∴ المتتالية ٠,١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠١ ، ٠,٠٠٠١ ، ٠,٠٠٠٠١ هندسية ، أساسها ر = ٠,١

٣ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٢}{-١} = -٢$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = -٢$

∴ المتتالية −١ ، ٢ ، −٤ ، ٨ ، −١٦ هندسية ، أساسها ر = −٢

٤ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} \neq \frac{ح_٣}{ح_٢}$

∴ المتتالية ٢ ، ٤ ، ٦ ، . . . ليست هندسية .

٥ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٣}{٣} = ١$ ، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٣}{٣} = ١$

∴ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} = ١$

∴ المتتالية ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ متتالية ثابتة هندسية أساسها ر = ١

(لاحظ أيضاً أن هذه المتتالية حسابية أساسها د = صفر) ■

الهدف
يتعرف الحد النوني لمتتالية هندسية
يوجد حدود متتالية هندسية تعلم حدها الأول وأساسها

الكلمات الجديدة
الحد النوني لمتتالية هندسية

٢ - ٣ أ الحد النوني لمتتالية هندسية

The nth term of a geometric sequence

تعلمنا مما سبق أنه إذا كان لدينا متتالية هندسية حدها النوني $ح_ن$ وأساسها $ر$ وحدها الأول $ح_١$

فإن :

$$\frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = ر$$

أي أن $ح_ن = ح_{ن-١} \times ر$

الحد الأول $= ح_١$

$ح_٢ = ح_١ \times ر$

$ح_٣ = ح_٢ \times ر = ح_١ \times ر \times ر = ح_١ \times ر^٢$

$ح_٤ = ح_٣ \times ر = ح_١ \times ر^٢ \times ر = ح_١ \times ر^٣$

من ذلك نستنتج أن صيغة الحد النوني للمتتالية الهندسية هي :

$$ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١} \quad ، \quad ر \neq ٠$$

مثال ١

أوجد صيغة الحد النوني للمتتالية الهندسية الآتية :

$٦ ، ٢ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٩} ، \ldots$

الحل

يمكننا معرفة أساس المتتالية عن طريق قسمة أي حد بعد الأول على الحد السابق له مباشرة

هكذا : $ر = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_ن = ٦ \times (\frac{١}{٣})^{ن-١}$

التحقق :

$ح_١ = ٦ \times (\frac{١}{٣})^{٠} = ٦$ ، $ح_٢ = ٦ \times \frac{١}{٣} = ٢$

$ح_٣ = ٦ \times (\frac{١}{٣})^{١} = \frac{٢}{٣}$ ، $ح_٤ = ٦ \times (\frac{١}{٣})^{٢} = \frac{٢}{٩}$

وبذلك نكون قد تحققنا من صحة صيغة الحد النوني للمتتالية . ■

مثال (٢)

أوجد صيغة الحد النوني للمتتالية الهندسية الآتية :

$٢ ، -١ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٤} ، ...$

الحل

لدينا $ح_١ = ٢$ ، $ر = -\frac{١}{٢}$

، $\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_ن = ٢ (-\frac{١}{٢})^{ن-١}$ ■

مثال (٣)

أوجد الحد السادس للمتتالية الهندسية الآتية :

$٢ ، -٤ ، ٨ ، -١٦ ، ...$

الحل

$ح_١ = ٢$ ، $ر = -٢$

، $\because ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

$\therefore ح_٦ = ٢ \times (-٢)^{٥}$

$= ٢ \times -٣٢ = -٦٤$

$\therefore ح_٦ = -٦٤$ ■

مثال ٤

أوجد الحد الأول لمتتالية هندسية حدها الرابع = ٨ وأساسها = $\frac{١}{٢}$

الحل

لدينا $ح_{١}$ = ٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$

∴ ٨ = $ح_{١}$ × $(\frac{١}{٢})^{٣}$

∴ ٨ = $ح_{١}$ × $\frac{١}{٨}$

∴ $ح_{١}$ = ٦٤

∴ الحد الأول للمتتالية الهندسية = ٦٤ ■

مثال ٥

أوجد خمسة الحدود الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها النوني

$ح_{ن}$ = ٣ $(-٢)^{ن-١}$

الحل

لتكن ن من ١ إلى ٥ وبالتعويض في صيغة الحد النوني فإننا نحصل على :

$ح_{١}$ = ٣ $(-٢)^{١-١}$ = ٣

$ح_{٢}$ = ٣ $(-٢)^{٢-١}$ = −٦

$ح_{٣}$ = ٣ $(-٢)^{٣-١}$ = ١٢

$ح_{٤}$ = ٣ $(-٢)^{٤-١}$ = −٢٤

$ح_{٥}$ = ٣ $(-٢)^{٥-١}$ = ٤٨

∴ خمسة الحدود الأولى هي :

٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ٤٨ ■

حل آخر : يمكن رسم نموذج (iteration diagram) يصف المتتالية الهندسية حيث $ح_{١}$ = ٣ ،

ر = −٢ (الأساس)

$ح_{١}$ = ٣

$ح_{٢}$ = ٣ × −٢ = −٦

$ح_{٣}$ = −٦ × −٢ = ١٢

$ح_{٤}$ = ١٢ × −٢ = −٢٤

$ح_{٥}$ = −٢٤ × −٢ = ٤٨

مثال ٦

أوجد الحد السادس لمتتالية هندسية فيها $ح_{١} = ١$ ، $ح_{٣} = -٢٧$

الحل

$\because ح_{ن} = ح_{١} \times م^{ن-١}$

$\therefore -٢٧ = ١ \times م^{٣-١}$

$\therefore م^{٢} = -٢٧$ ومنها $م = -٣$

$ح_{٦} = ١ \times (-٣)^{٥} = -٢٤٣$ ■

حل المشكلات Problem Solving

Problem Solving

بكتيريا تنمو في وسط غذائي ، بحيث تنقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة ثم إلى ثمانية وهكذا . كم عدد البكتيريا بعد عشرة انقسامات ؟

مثال ٧

عودة إلى البكتيريا

لدينا بكتيريا واحدة ثم بعد ذلك تنقسم إلى جزأين في الانقسام الأول = ١ × ٢ = ٢ ،

والانقسام الثاني = ٢ × ٢ = ٤ ، والانقسام الثالث = ٤ × ٢ = ٨

وهكذا تتكون لدينا المتتالية الآتية :

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، . . . .

يكون حدها الأول $ح_{١} = ١$ ، $م = ٢$

إذن المتتالية هندسية

حدها النوني هو

$ح_{ن} = ح_{١} \times م^{ن-١}$

إذن عدد البكتيريا بعد عشرة انقسامات $ح_{١١} = (٢)^{١١-١} = ٢^{١٠} = ١٠٢٤$

تمـــارين (٢-٣م)

بنود موضوعية :

في البنود من (١-٤) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة . ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ المتتالية ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، . . . . هي متتالية هندسية . (أ) (ب)

٢ أساس المتتالية الهندسية التي حدها النوني $ح_ن = ٢(٠,٥)^{ن-١}$ هو ٠,٥ . (أ) (ب)

٣ إذا كان $ح_ن = ٣(٢)^{ن+١}$ فإن $ح_٢ = ١٢$ (أ) (ب)

٤ في المتتالية الهندسية التي حدها النوني $ح_ن = ٣(٢)^{ن-٢}$ يكون أساسها $ر = \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

أسئلة مقالية :

أولاً - أجب عن الأسئلة التالية :

١ ما هي المتتالية الهندسية؟

٢ ما هي النسبة الثابتة (الأساس) للمتتالية الهندسية؟

ثانياً - أوجد خمسة الحدود الأولى للمتتاليات الهندسية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = (٢)^{ن}$

٢ $ح_ن = ٣^{ن}$

٣ $ح_ن = (-٢)^{ن-١}$

٤ $ح_ن = (-\frac{١}{٣})^{ن-١}$

ثالثاً - استنتج صيغة الحد النوني لكل من المتتاليات الهندسية التالية :

١ $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، . . . .

٢ ٦٤ ، ٨ ، ١ ، . . . .

٣ ٨ ، -٤ ، ٢ ، -١ ، . . . .

٤ ١٠٠ ، ١٠ ، ١ ، . . . .

٥ -٩ ، ٣ ، -١ ، . . . .

٦ $-\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، -٨ ، ٣٢ ، . . . .

رابعاً - أجب عن الأسئلة التالية :

١ أوجد الحد الأول لمتتالية هندسية حدها الرابع = ٤٠ ، وأساسها = ٢

٢ أوجد الحد الأول لمتتالية هندسية حدها الخامس = ٤ وأساسها = $\frac{١}{٢}$

٣ أوجد أساس المتتالية الهندسية التي فيها $ح_{١}$ = ١ ، $ح_{٤}$ = -٢٧

٤ أوجد الحد الرابع لمتتالية هندسية حدها الأول = -٣ وأساسها = $\frac{١}{٣}$

٥ أوجد الحد الخامس لمتتالية هندسية حدها الأول = - $\frac{٢}{٣}$ وأساسها = - $\frac{٢}{٣}$

٦ أوجد الحد السادس للمتتالية الهندسية الآتية : ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، . . .

خامساً - حل المشكلات Problem Solving

١ ادخر طالب ٢٠٠ فلس من مصروفه اليومي في اليوم الأول . فإذا كان التلميذ يدخر في كل يوم ضعف ما أدخره في اليوم السابق وذلك لمدة شهر فما مقدار ما يدخره في اليوم الخامس؟

٢ لكل منا أبوين ، ٤ أجداد ، ٨ أجداد لآباء ، ١٦ جد لجد ، وهكذا . فإذا وضعنا التعبير «أب لأب» ، «جد لجد» فكم عدد الأقارب من هذا النوع يكون لك في المرة العشرين ؟

٣ افرض أنك أودعت مبلغ دينار واحد في حسابك بالبنك لشهر سبتمبر . وإذا افترضنا أن البنك قد قدم عرضاً رائعاً بأن يتضاعف المبلغ كل يوم . فكم يكون المبلغ في اليوم العاشر ؟ .

٤ أوجد متتالية من واقع حياتك يكون فيها كل حد أكبر من الذي يسبقه . وحدد نوعها .

الهدف
يوجد مجموع ن حداً في متتالية هندسية

٢ - ٣ب مجموع ن حداً الأولى في متتالية هندسية

Sun of the first n terms of a geometric sequence

إذا كان ($ح_١$) هو الحد الأول لمتتالية هندسية أساسها ($ر$) ، وكان $جـ_ن$ مجموع ن حداً الأولى منها فإن :

$$جـ_ن = ح_١ + ح_٢ + \ldots + ح_ن$$

ولإيجاد صيغة مجموع ن حداً الأولى في متتالية هندسية فهناك احتمالية إما أن تكون المتتالية الهندسية ثابتة وإما تكون غير ثابتة . وفيما يلي استنتاج صيغة مجموع ن حداً الأولى في كل من الحالتين .

أولاً :

إذا كانت المتتالية الهندسية ثابتة : ($ر = ١$)

في هذه الحالة يكون $جـ_ن = \underbrace{ح_١ + ح_١ + \ldots + ح_١}_{\text{(ن من المرات)}}$

$$\therefore \quad \boxed{جـ_ن = ن\, ح_١}$$

ثانياً :

إذا كانت المتتالية الهندسية ليست ثابتة : ($ر \neq ١$) في هذه الحالة يكون

$$جـ_ن = ح_١ + ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + \ldots + ح_١ ر^{ن-١} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

بضرب طرفي المعادلة (١) في $ر$

$$ر\, جـ_ن = ح_١ ر + ح_١ ر^٢ + ح_١ ر^٣ + ح_١ ر^٤ + \ldots + ح_١ ر^{ن-١} + ح_١ ر^ن \quad \ldots\ldots (٢)$$

بطرح (٢) من (١) :

$$جـ_ن - ر\, جـ_ن = ح_١ - ح_١ ر^ن$$

$$جـ_ن (١ - ر) = ح_١ (١ - ر^ن)$$

$$\therefore \quad \boxed{جـ_ن = \frac{ح_١ (١ - ر^ن)}{١ - ر} \quad ، \quad ر \neq ١}$$

مثال ١

أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الهندسية الآتية :

١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، . . . .

الحل

$$ح_١ = ١ \quad ، \quad ر = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{٣}{١} = ٣$$

$$جـ_٥ = \frac{ح_١(١ - ر^٥)}{١ - ر} = \frac{١(١ - ٣^٥)}{١ - ٣} = \frac{٢٤٢}{٢} = ١٢١$$

مثال ٢

أوجد مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول = ١٢٨ وحدها الأخير = ٢ وأساسها = $\frac{١}{٢}$

الحل

$$جـ_ن = \frac{ح_١ - ح_١ ر^ن}{١ - ر} = \frac{ح_١ - ح_١ ر^{ن-١} ر}{١ - ر} = \frac{١٢٨ - ٢ \times \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٢}}$$

$$= ١٢٧ \times ٢$$

$$= ٢٥٤$$

∴ مجموع حدود المتتالية = ٢٥٤

تمـــارين (٢-٣ب)

أولاً - أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى في المتتاليات الهندسية التالية :

١ $\frac{١}{٤}$ ، ٢ ، ١٦ ، . . . .

٢ $-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٤}$ ، $+\frac{٣}{١٦}$ ، . . . .

٣ $-\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٢٥}$ ، . . . .

ثانياً - أوجد مجموع حدود كل من المتتاليات الهندسية التالية :

١ ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، . . . . ، ٧٢٩

٢ -١ ، ٢ ، -٤ ، ٨ ، . . . . ، -٦٤

ثالثاً - حل المشكلات Problem Solving

ارجع إلى التمارين المشار إليها في البند (٢ - ٣ أ) : خامساً ثم أجب عن الأسئلة التالية وفقاً لرقم كل سؤال في ذلك البند :

١ ما مقدار ما يدخره الطالب في ٣٠ يوم؟

٢ كم يكون مجموع أقاربك من هذا النوع حتى نهاية المرة ٣٥ ؟ ثم قارن بين العدد الذي تحصل عليه وبين العدد الإجمالي الحالي لسكان الكرة الأرضية .

تمارين عامة ٢-٤

بنود موضوعية :

في البنود من (١ - ٦) عبارات صحيحة وأخرى غير صحيحة . ظلل الدائرة (أ) إذا كانت العبارة صحيحة وظلل الدائرة (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة :

١ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ متتالية حسابية . (أ) (ب)

٢ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ متتالية هندسية . (أ) (ب)

٣ ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ متتالية حسابية . (أ) (ب)

٤ ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ متتالية حسابية . (أ) (ب)

٥ ١١٠ ، ١١٢ ، ١١٤ ، ١١٦ ، ١١٨ متتالية حسابية أساسها ٢ . (أ) (ب)

٦ ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ متتالية هندسية أساسها ٨ . (أ) (ب)

أسئلة مقالية :

أولاً - أوجد حدود المتتاليات المنتهية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = ٢^{ن-١}$ ، $١ \leq ن \leq ٥$

٢ $ح_ن = (-٣)^{ن-١}$ ، $١ \leq ن \leq ٥$

٣ $ح_ن = \frac{(-١)^{ن-١}}{ن}$ ، $١ \leq ن \leq ٦$

٤ $ح_ن = \frac{٢^ن}{ن}$ ، $١ \leq ن \leq ٤$

ثانياً - أوجد أربعة الحدود الأولى للمتتاليات غير المنتهية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = (-١)^{ن-١} (٢)^{ن-١}$

٢ $ح_ن = (-١)^ن (٢ن - ١)^٢$

٣ $ح_ن = \frac{١}{(ن + ١)(ن + ٢)}$

ثالثاً - أوجد خمسة الحدود الأولى للمتتاليات الحسابية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = ١٣ + (ن - ١) ٦$

٢ $ح_ن = -١٩ ن + (ن - ١) ١٢$

٣ $ح_ن = -٦٠٠ ن + ٤٠٠٠$

٤ $ح_ن = -٤ ن - ٣$

رابعاً - أوجد صيغة الحد النوني لكل من المتتاليات الحسابية التالية :

١ ٠ ، ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، . . . .

٢ -٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، . . . .

٣ -٢ ، -٩ ، -١٦ ، -٢٣ ، . . . .

٤ ٥ ، ١ ، -٣ ، -٧ ، -١١ ، . . . .

خامساً - أوجد خمسة الحدود الأولى للمتتاليات الهندسية التي حدها النوني هو :

١ $ح_ن = ٢ (\frac{١}{٣})^{ن-١}$

٢ $ح_ن = -٥ (\frac{١}{٢})^{ن-١}$

٣ $ح_ن = (٠,٧٨)^{ن}$

٤ $ح_ن = (-٠,٢٣)^{ن}$

سادساً - أوجد صيغة الحد النوني للمتتاليات الهندسية التالية :

١ $\frac{١}{٤}$ ، ٢ ، ١٦ ، . . . .

٢ $-\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{٣}{١٦}$ ، . . . .

٣ ٢ ، -٤ ، ٨ ، -١٦ ، . . . .

٤ $-\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $-\frac{٤}{٢٥}$ ، . . . .

سابعاً - أجب عن الأسئلة التالية :

١ أوجد الحد التاسع للمتتالية الحسابية : -٧ ، -٤ ، -١ ، ٢ ، ٥ ، . . . .

٢ أوجد الحد الحادي عشر للمتتالية الهندسية : $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، . . . .

٣ أوجد مجموع خمسة الحدود الأولى في المتتالية الحسابية :

-٤ ، -٨ ، -١٢ ، -١٦ ، -٢٠ ، . . . .

٤ أوجد مجموع عشرة الحدود الأولى في المتتالية الهندسية :

١٢ ، ٤ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٤}{٢٧}$ ، . . . .

قائمة بالمفردات الرياضية

الفصل الثاني

باللغة العربية	باللغة الإنجليزية	باللغة العربية	باللغة الإنجليزية
المتتاليات	Sequences	مجموع ن حداً الأولى في متتالية حسابية	Sum of the first n terms of an arithmetic sequences
متتالية منتهية	Finite Sequence		
متتالية غير منتهية	infinite sequence	المتتالية الهندسية	Geometric sequences
الحد النوني لمتتالية	The nth term of a Sequence	الحد النوني لمتتالية هندسية	The nth term of a geometric sequence
المتتالية الحسابية	Arithmetic Sequence	مجموع ن حداً الأولى في متتالية هندسية	Sum of the first n terms of a geometric sequences
الحد النوني للمتتالية الحسابية	The nth term of an arithmetic Sequence		

الفصل الثالث

المتباينات والبرمجة الخطية
Inequalities & Linear Programming

ربط الرياضيات بالتغذية

هل تعلم أن الجبن هو غذاء عالمي معروف مصنوع من الحليب ، قد يكون الحليب المصنوع منه مبسترا أو غير مبستر ، مقشوط أو بكامل دسمه . للجبن قيمة غذائية فهو مصدر للبروتين والدهون والأملاح والكالسيوم والفوسفور والكبريت والحديد ، ويمكن استخلاص حوالي ١٦ كجم من الجبن من كل ١٠٠ كجم من الحليب .

هناك أنواع كثيرة من الأجبان ولكل بلد نوع من الجبن تختص بصنعه ، فجبنة الشيدر تشتهر بها بريطانيا واستراليا وكندا والجبن الفرنسي بفرنسا والجبن الدمياطي بمدينة دمياط في مصر .

حل المشكلات Problem Solving

ينتج أحد مصانع الأجبان عبوات من النوع الفاخر من الجبن ، وعبوات من النوع الممتاز من الجبن ، تحتاج عبوة النوع الفاخر إلى ١٢ كجم من الحليب و٢ ، ٠ ساعة عمل ، وتحتاج عبوة النوع الممتاز إلى ٦ كجم من الحليب و٣ ، ٠ ساعة عمل . يربح المصنع ٤ دنانير من كل عبوة من النوع الفاخر ، ويربح ٣ دنانير من كل عبوة من النوع الممتاز ، ترغب إدارة المصنع في تحديد عدد عبوات النوع الفاخر وعدد عبوات النوع الممتاز اللازم إنتاجها يومياً بحيث يكون إجمالي أرباح المصنع أكبر ما يمكن . علماً بأنه يتوفر يومياً بالمصنع ٦٠٠٠ كجم من الحليب و١٨٠ ساعة عمل .

الفصل الثالث

المتباينات والبرمجة الخطية

مقدمة :

إن الكثير من المشاكل التي تواجه إدارة المشروعات تتمثل بصورة أساسية في كيفية تخصيص وتوزيع الموارد المحدودة – رأس المال ، القوة العاملة ، المواد الخام ، الآلات ، المكان ، والوقت من أجل تعظيم (Maximization) مقياس ما للأداء أو إقلال (Minimization) مقياس ما للتكلفة ، والأساليب الرياضية التي تستخدم لتخطيط عملية التوزيع ، هذه تعرف بالبرمجة الرياضية (Mathematical Programming) . وفي حالات خاصة يعبر عن مقاييس الأداء أو التكلفة بدوال خطية تتضمن المتغيرات الأساسية التي يمكن التحكم فيها ، كما يعبر عن كمية الموارد المتاحة بمعادلات أو متباينات خطية (LinearEquations Or Inequalities) .

وهذه الحالات هي ما تسمى بالبرمجة الخطية ، أي أن البرمجة الخطية لأي مشكلة ما ما هي إلا عملية تعظيم أو إقلال دالة خطية للمتغيرات الأساسية (دالة هدف Objective Function) في ظل مجموعة من المعادلات أو المتباينات الخطية (القيود Constraints) .

سوف نتعرف في هذا الفصل الأدوات التي يمكن استخدامها لإيجاد الحل الذي يحقق رغبة إدارة المصنع ، وتتضمن هذه الأدوات دراسة المتباينات ودراسة البرمجة الخطية .

الهدف
يتعرف المتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين

الكلمات الجديدة
المتباينة - متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين

٣ - ١ المتباينات Inequalities

٣ - ١ أ المتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين Linear Inequality In Two-Variables

تأخذ المتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين أحد الأشكال التالية :

أ س + ب ص < جـ

أ س + ب ص ≤ جـ

أ س + ب ص > جـ

أ س + ب ص ≥ جـ

حيث إن أ ، ب ، جـ ثوابت وكل من س ، ص متغيرات مرفوعة إلى الأس واحد (من الدرجة الأولى) .

مثال ١

بين أي المتباينات التالية من الدرجة الأولى في متغيرين :

١ ٢ س + ٣ ص ≥ ٥

٢ ٥ س + ٣ ص^{٢} ≤ ٢

٣ ٩ س ≤ ١٨

الحل

١ متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين .

٢ ليست من الدرجة الأولى لأن ص مرفوعة إلى الأس ٢ .

٣ من الدرجة الأولى في متغير واحد ولكن يمكن اعتبارها في متغيرين :

٩ س + ٠ ص ≤ ١٨ ■

الهدف
يوجد الحل البياني لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين

٣-١ب منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً :

Graphing a Linear Inequality in Two Variables

تعرف منطقة الحل لمتباينة في متغيرين على أنها جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي التي تحقق المتباينة .

فمثلاً إذا اعتبرنا المتباينة

٢ س + ص ⩽ ٣

نلاحظ أن النقطة (١ ، ٢) ليست في منطقة الحل لأن :

٢ × ١ + ٢ ⩽ ٣ عبارة غير صحيحة

ولكن النقطة (٢ ، -٢) تقع في منطقة الحل لأن :

٢ × ٢ + (-٢) ⩽ ٣ عبارة صحيحة

وكذلك النقطة (١ ، ١) تقع في منطقة الحل لأن :

٢ × ١ + ١ ⩽ ٣ عبارة صحيحة

عند إيجاد منطقة الحل للمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين سوف نحتاج إلى رسم الخط المستقيم (يسمى خط الحدود) أ س + ب ص = جـ الذي يحدد «حدود» المتباينة .

وترسم خط الحدود بشكل متصل في حالة أي من المتباينتين :

أ س + ب ص ⩽ جـ

أ س + ب ص ⩾ جـ

وبشكل متقطع في حالة أي من المتباينتين :

أ س + ب ص < جـ

أ س + ب ص > جـ

مثال (٢)

ارسم خط الحدود لكل من :

١ ٣ س + ٢ ص ≤ ٦

٢ ٩ س + ٣ ص > ٩

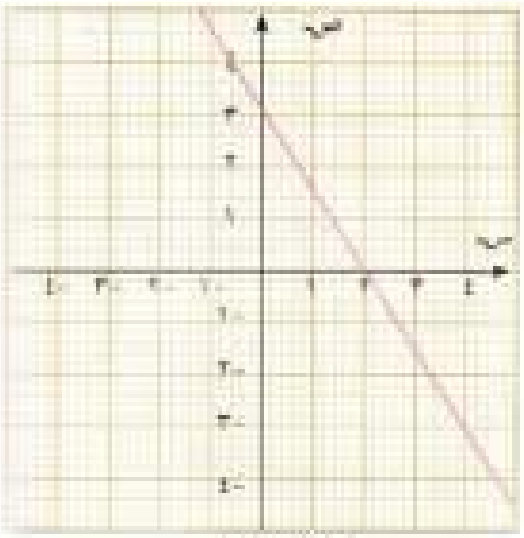
الحل

١ لرسم خط الحدود للمتباينة ٣ س + ٢ ص ≤ ٦ نتبع الآتي :

أ نكتب المعادلة المناظرة للمتباينة وهي ٣ س + ٢ ص = ٦

ب نرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة ،

فنحصل على الشكل المقابل ، شكل (٣-١)



شكل (٣-١)

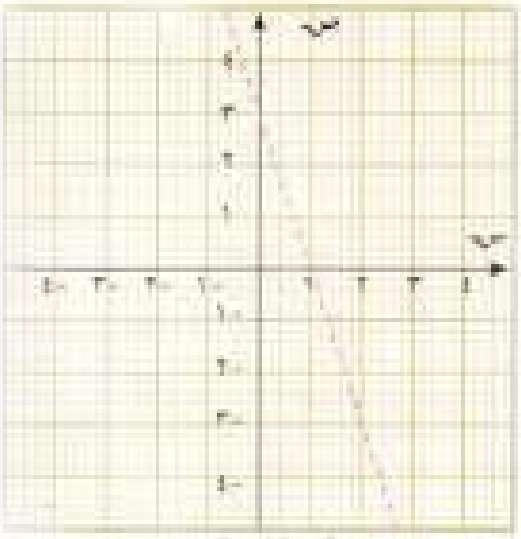
تذكر : لرسم خط المستقيم نقوم بعمل جدول القيم

س	٢	٠	-١
ص	٠	٣	$\frac{٩}{٢}$
(س ، ص)	(٢ ، ٠)	(٠ ، ٣)	(-١ ، $\frac{٩}{٢}$)

٢ المعادلة المناظرة :

٩ س + ٣ ص = ٩

شكل (٣-٢)



شكل (٣-٢)

مثال ٣

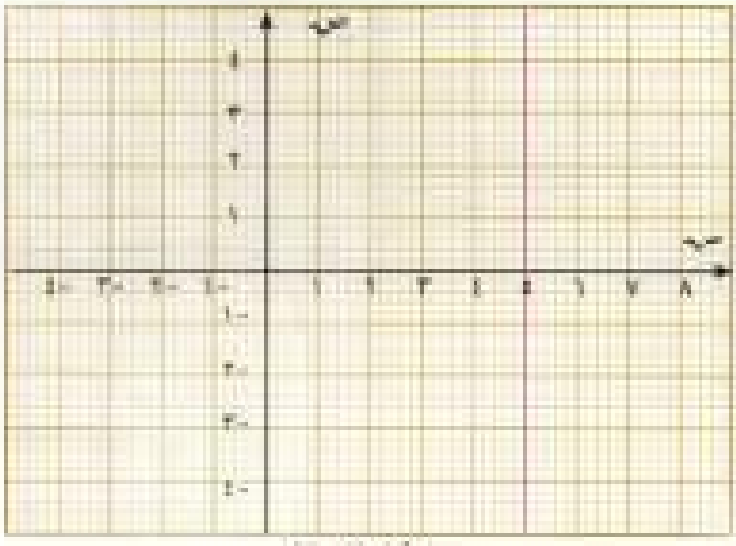
ارسم خط الحدود لكل من :

١ س ≤ ٥

٢ ص > ٣

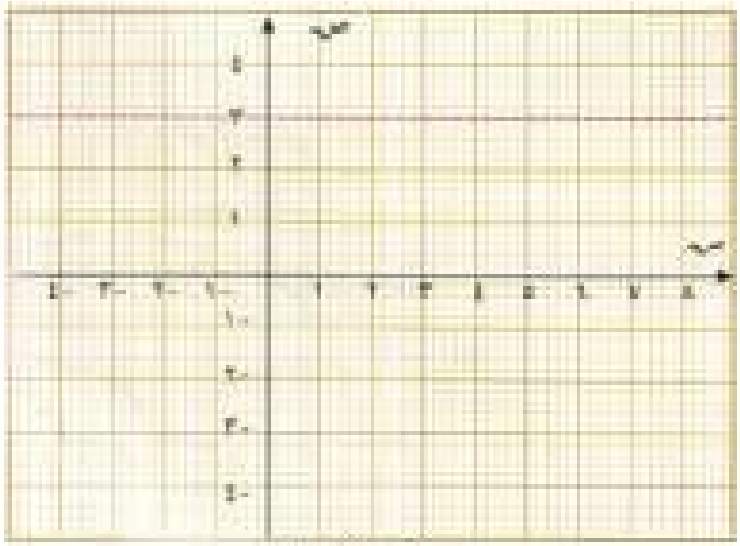
الحل

١ المعادلة المناظرة : س = ٥ شكل (٣-٣)



شكل (٣-٣)

٢ المعادلة المناظرة : ص = ٣ شكل (٣-٤)



شكل (٣-٤)

خطوات إيجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى بيانياً:

١ نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة ($\geqslant$ أو $\leqslant$) والخط المتقطع في حالة ($>$ أو $<$) .

٢ نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة ، ولتحديد هذا الجانب نختار أي نقطة من أحد جانبي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة ، إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل ، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل .

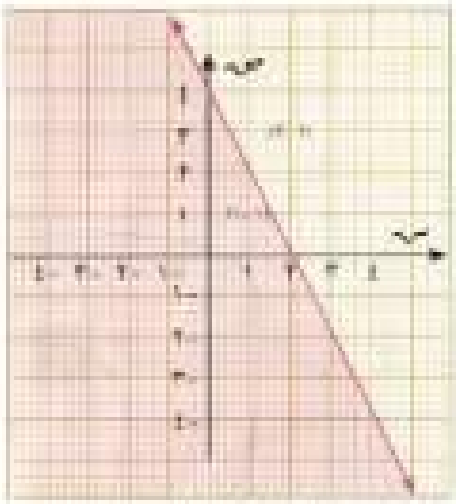
٣ في حال ($\geqslant$ أو $\leqslant$) تكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود بالإضافة إلى جميع النقاط الواقعة في جانب منطقة الحل . وفي حالة ($>$ أو $<$) تكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على جانب منطقة الحل .

٤ نظلل المنطقة التي تمثل منطقة حل المتباينة .

مثال ٤

مثل بيانياً منطقة الحل للمتباينة

٢ س + ص $\leqslant$ ٤



شكل (٣ - ٥)

الحل

١ معادلة خط الحدود :

ل : ٢ س + ص = ٤

٢ إذا اخترنا النقطة (١ ، ١) وعوضنا في المتباينة نجد :

٢ × ١ + ١ $\leqslant$ ٤ عبارة صحيحة

وعلى ذلك يمثل الجانب الأيسر جانب منطقة الحل . وتكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود أو على يساره . ■

ملاحظة : في المثال السابق إذا تم اختيار النقطة (٢ ، ٣) من الجانب الأيمن وعوضنا في المتباينة نجد : ٢ × ٢ + ٣ $\leqslant$ ٤ عبارة غير صحيحة

وعلى ذلك يكون الجانب الأيسر جانب منطقة الحل .

ملاحظة : لتسهيل الحل في المثال السابق يمكن اتباع الخطوات التالية :

١ عند رسم خط الحدود

٢ س + ص = ٤

نُوجد نقطتين على الخط بالتعويض عن س = ٠ ونُوجد قيمة ص ، ثم بالتعويض عن ص = ٠ نُوجد قيمة س

س = ٠ ← ص = ٤ ← (٠ ، ٤) تنتمي إلى الخط

ص = ٠ ← ٢ س = ٤ ← س = ٢ ← (٢ ، ٠) تنتمي إلى الخط

خط الحدود يمر بالنقطتين (٠ ، ٤) ، (٢ ، ٠)

٢ عند تحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة الأصل (٠ ، ٠) في المتباينة (حيث خط الحدود لا يمر بنقطة الأصل) . إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة تكون المنطقة التي تحوي نقطة الأصل هي المنطقة المطلوبة ، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة فإن المنطقة الأخرى هي جانب منطقة الحل .

مثال ٥

مثل بيانياً منطقة الحل للمتباينة

-٢ س + ص < ٢

الحل

معادلة خط الحدود

ل : -٢ س + ص = ٢

س = ٠ ← ص = ٢ ← (٠ ، ٢) تنتمي إلى الخط

ص = ٠ ← -٢ س = ٢ ← س = -١ ← (-١ ، ٠)

تنتمي إلى الخط

إذن خط الحدود يمر بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (-١ ، ٠)

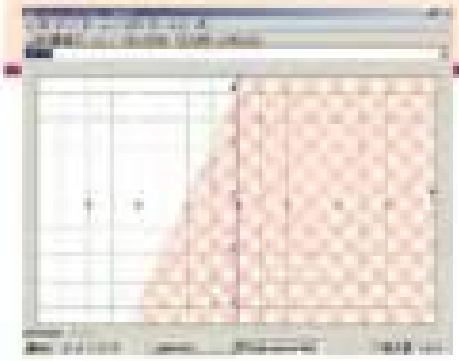
بالتعويض عن (٠ ، ٠) نجد :

-٢ × ٠ + ٠ < ٢ عبارة صحيحة

ربط الرياضيات بالتكنولوجيا:

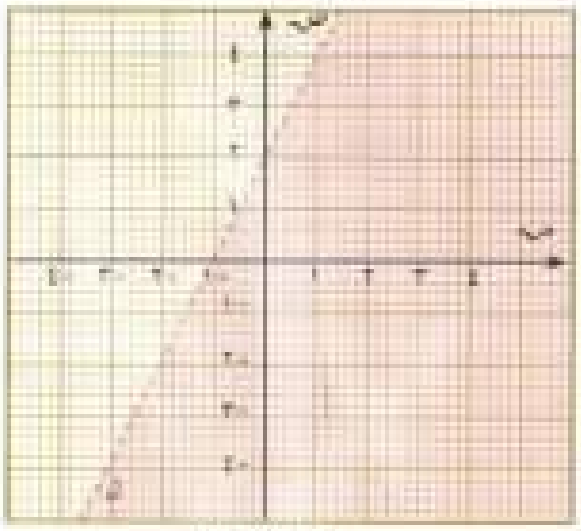
لتسهيل رسم منطقة الحل للمعادلات أو المتباينات استخدم برنامج الرسم الهندسي Graphmatica من موقع الوزارة على شبكة الإنترنت توجيه الرياضيات

www.moe.edu.kw



وبالتالي فإن المنطقة اليمنى من خط الحدود هي جانب منطقة الحل .

وتتكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على يمين خط الحدود .



شكل (٣ - ٦)

مثال ٦

مثل بيانياً منطقة الحل للمتباينة

٣ س − ٥ ص > ٠

الحل

معادلة خط الحدود

ل : ٣ س − ٥ ص = ٠

لاحظ أن خط الحدود يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) ، لذا نحتاج إلى نقطة أخرى على الخط .

في هذه الحالة نعوض عن س = ١ ونوجد قيمة ص .

س = ١ ⟵ ٣ × ١ − ٥ ص = ٠ ⟵ ٣ = ٥ ص ⟵ ص = $\frac{٣}{٥}$

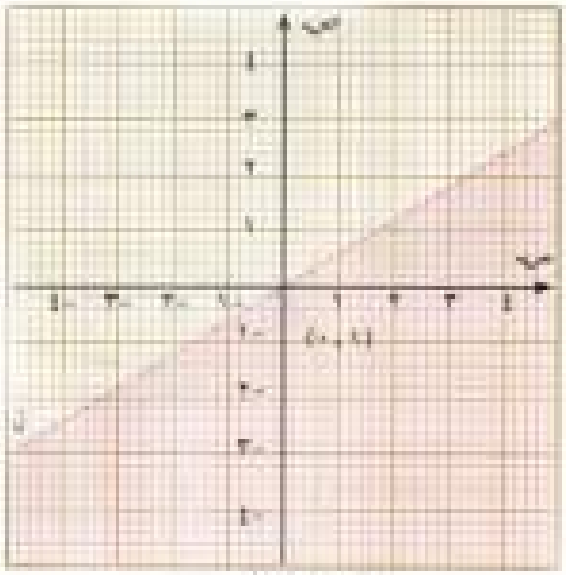
أي أن النقطة (١ ، $\frac{٣}{٥}$) تنتمي إلى الخط .

لتحديد منطقة الحل ، نعوض بنقطة غير نقطة الأصل (٠ ، ٠) ، (وذلك لأن نقطة الأصل تنتمي إلى خط الحدود) :

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٠) نحصل على :

٣ × ١ − ٠ < ٠ عبارة صحيحة

ومن ذلك نستنتج أن جانب منطقة الحل يقع أسفل خط الحدود وتتكون منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة أسفل خط الحدود .



شكل (٣-٧)

الهدف
- يوجد منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين
- يحل مسألة حياتية

٣ - ١ جـ منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً :

Graphing Compound Inequalities

مثال (٧)

مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينتين :

س - ٢ ص ≤ ٢ (١)

٢ س + ٣ ص < ٦ (٢)

الحل

معادلة خط الحدود للمتباينة الأولى هي ل١ : س - ٢ ص = ٢

س	٢	٠
ص	٠	-١

بالتعويض بنقطة الأصل (٠ ، ٠) نحصل على عبارة غير صحيحة فتكون المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل هي جانب منطقة الحل

ومعادلة خط الحدود للمتباينة الثانية هي ل٢ : ٢ س + ٣ ص = ٦

س	٣	٠
ص	٠	٢

بالتعويض بالنقطة (٠ ، ٠) نحصل على عبارة صحيحة فتكون المنطقة التي تحوي نقطة الأصل هي جانب منطقة الحل .

وبذلك تكون المنطقة التي تمثل منطقة الحل هي تقاطع منطقتي الحل للمتباينتين (منطقة الحل المشترك) .

شكل (٣-٨)

خطوات إيجاد منطقة الحل المشترك بيانياً:

١ نرسم خط الحدود لكل متباينة في نفس المستوى .

٢ نحدد منطقة الحل لكل متباينة .

٣ نوجد منطقة الحل المشترك والتي تتكون من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة الحل لكل من المتباينتين (أو المتباينات) .

مثال ٨

مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينات

س + ص ≥ ١

س − ص ≤ ٢

٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

الحل

معادلات خط الحدود للمتباينات الثلاث هي :

ل١ : س + ص = ١

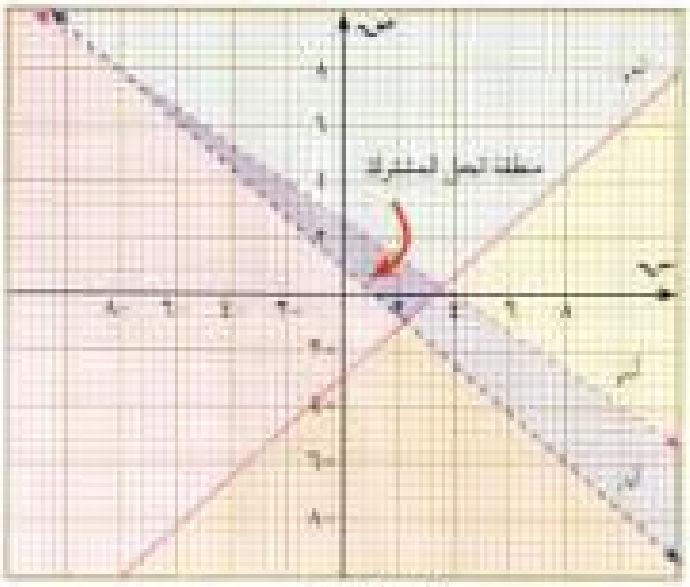
س	٠	١
ص	١	٠

ل٢ : س − ص = ٢

س	٠	٢
ص	٠	−٢

ل٣ : ٣ س + ٤ ص = ١٢

س	٠	٤
ص	٣	٠



شكل (٣-٩)

عودة إلى مصنع الأجبان:

إذا قام مصنع الأجبان بإنتاج عدد س من عبوات النوع الفاخر وعدد ص من عبوات النوع الممتاز يكون لدينا المتباينات التالية :

١ س ≥ ٠

٢ ص ≥ ٠

٣ كمية الحليب اللازمة يومياً

١٢ × س + ٦ × ص كجم

وحيث إن المصنع لديه ٦٠٠٠ كجم من الحليب يومياً ، فإنه يتوجب أن تتحقق المتباينة

١٢ س + ٦ ص ≤ ٦٠٠٠

أو

٢ س + ص ≤ ١٠٠٠ (لماذا ؟)

٤ عدد ساعات العمل اللازمة يومياً

٠,٢ × س + ٠,٣ × ص ساعة

وحيث إن المصنع لديه ١٨٠ ساعة عمل يومياً ، فإنه يتوجب أن تتحقق المتباينة

٠,٢ س + ٠,٣ ص ≤ ١٨٠

أو

٢ س + ٣ ص ≤ ١٨٠٠ (لماذا ؟)

مما سبق يتضح أن س ، ص يحققان المتباينات التالية :

س ≥ ٠ (١)

ص ≥ ٠ (٢)

٢ س + ص ≤ ١٠٠٠ (٣)

٢ س + ٣ ص ≤ ١٨٠٠ (٤)

Problem Solving

يُنتج أحد مصانع الأجبان عبوات من النوع الفاخر من الجبن ، وعبوات من النوع الممتاز من الجبن ، تحتاج عبوة النوع الفاخر إلى ١٢ كجم من الحليب و٠,٢ ساعة عمل ، وتحتاج عبوة النوع الممتاز إلى ٦ كجم من الحليب و٠,٣ ساعة عمل .

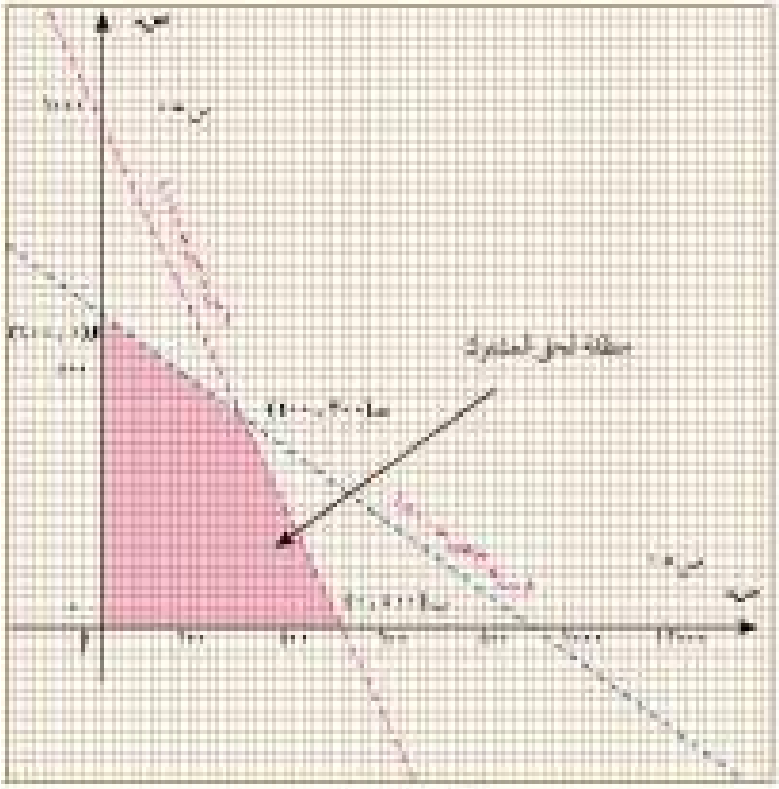
يربح المصنع ٤ دنانير من كل عبوة من النوع الفاخر ويربح ٣ دنانير من كل عبوة من النوع الممتاز . ترغب إدارة المصنع في تحديد عدد عبوات النوع الفاخر ، وعدد عبوات النوع الممتاز اللازم إنتاجها يومياً ، بحيث يكون إجمالي أرباح المصنع أكبر ما يمكن . علماً بأنه يتوفر يومياً بالمصنع ٦٠٠٠ كجم من الحليب و١٨٠ ساعة عمل .

ويكون أمام إدارة المصنع التساؤل عن أعداد كل من س ، ص التي يمكن إنتاجها في حدود الإمكانات المتوفرة (كمية الحليب وعدد ساعات العمل) .

ملاحظة :

- استخرج معادلة خط الحدود للمتباينات .
- أوجد منطقة الحل لكل متباينة .
- أوجد منطقة الحل المشترك .

الإجابة عن هذا التساؤل هي جميع قيم (س ، ص) التي تقع في منطقة الحل المشترك الموضحة في الشكل التالي :



شكل (٣ - ١٠)

من الشكل يتضح أن المنطقة المظللة عبارة عن منطقة تقاطع المناطق التي تمثل حل المتباينات الأربع ، أي أن منطقة الحل المشترك هي جميع النقاط الواقعة على أو داخل المضلع أ ب جـ د .

تمارين ٣-١

أسئلة موضوعية

لكل بند مما يلي عدة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح :

١ أيٌّ من النقاط التالية ينتمي إلى منطقة حل المتباينة ٥ س + ٤ > ٢٠

(أ) (١ ، ١) (ب) (٠ ، ٠) (جـ) (٤ ، ١) (د) (٢ ، ٢)

٢ أيٌّ من النقاط التالية ينتمي إلى منطقة حل المتباينة ٣ س + ٤ ص < ٢٤

(أ) (٢ ، ٥) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٠ ، ٧) (د) (٨ ، ٠)

٣ أيٌّ من النقاط التالية لا ينتمي إلى منطقة حل المتباينة ٢ س − ٣ ص ≥ ٦

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٥ ، ١) (جـ) (٢ ، ١) (د) (٧ ، ٢)

أسئلة مقالية

١ مثل بيانياً منطقة حل كل من المتباينات التالية :

أ ٢ س + ٣ ص > ١٢

ب ٣ س + ص ≤ ٩

٢ مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينتين

س + ٣ ص ≥ ٩ ، ٣ س − ٢ ص > ٦

٣ مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينات

س + ص ≤ ٣ ، س − ص ≥ ١ ، ص > ٠

الهدف
يتعرف العناصر الأساسية في نموذج البرمجة الخطية

الكلمات الجديدة
البرمجة الخطية - فضاء الحلول الممكنة - متغيرات القرار - الحل الأمثل - دالة الهدف - القيود - تعظيم - تصغير

٣ - ٢ البرمجة الخطية Linear Programming

تعريف البرمجة الخطية :

تُستخدم البرمجة الخطية في مسألة تعظيم (تكبير) أو تصغير دالة خطية معينة تحت قيود (شروط) على متغيرات هذه الدالة . على سبيل المثال ، في مثال مصنع الأجبان ، تُستخدم البرمجة الخطية لإيجاد عدد العبوات من النوع الفاخر وعدد العبوات من النوع الممتاز التي يتوجب إنتاجها ليحقق المصنع أكبر قيمة ممكنة للربح ، تحت شروط تتعلق بكمية الحليب المتوفرة وبعدد ساعات العمل المتوفرة .

أساسيات البرمجة الخطية Principles Of Linear Programming

تشترك جميع مسائل البرمجة الخطية في العناصر الأساسية التالية :

متغيرات القرار : Decision Variables

هي المتغيرات التي يتوجب إيجاد قيمها لاتخاذ القرار .

في مثال مصنع الأجبان يتم اتخاذ القرار بتحديد عدد عبوات النوع الفاخر وعدد عبوات النوع الممتاز الواجب إنتاجها لتحقيق أكبر قيمة ممكنة للربح . وتكون متغيرات القرار في هذه الحالة :

س : عدد عبوات النوع الفاخر

ص : عدد عبوات النوع الممتاز

دالة الهدف : Objective Function

في كل مسائل البرمجة الخطية يرغب متخذ القرار في تعظيم أو تصغير دالة خطية في متغيرات القرار . هذه الدالة عادة تمثل الأرباح أو الإيرادات (في حالة التعظيم) أو التكلفة أو كمية التالف (في حالة التصغير) . هذه الدالة تُسمى دالة الهدف .

في مثال مصنع الأجبان تمثل دالة الهدف الأرباح في حالة إنتاج عدد س عبوة من النوع الفاخر . وعدد ص عبوة من النوع الممتاز . أي أن دالة الهدف في هذا المثال هي :

هـ = ٤ س + ٣ ص دينار

القيود (الشروط) :Constraints

القيود هي مجموعة من المتباينات أو المعادلات الواجب تحقيقها من قبل متغيرات القرار .

في مثال مصنع الأجبان يتوجب أن تحقق س ، ص المتباينات (القيود) التالية :

س ≥ ٠

ص ≥ ٠

٢ س + ص ≤ ١٠٠٠

٢ س + ٣ ص ≤ ١٨٠٠

البرمجة الخطية :

تعالج البرمجة الخطية مسألة إيجاد الحل الأمثل على النحو التالي :

١ يتم تعظيم أو تصغير دالة خطية في متغيرات القرار . هذه الدالة تُسمى دالة الهدف .

٢ تحقق قيم متغيرات القرار مجموعة من القيود ، يمكن صياغتها في شكل متباينات أو معادلات خطية .

فضاء الحلول الممكنة :Space of Possible Solutions

يتكون فضاء الحلول الممكنة من جميع النقاط التي تحقق جميع القيود . بمعنى آخر منطقة الحل المشترك لقيود المسألة هي فضاء الحلول الممكنة .

في مثال مصنع الأجبان ، فضاء الحلول الممكنة يتكون من جميع النقاط (س ، ص) التي تقع داخل أو على حدود المضلع الذي أركانه أ (٠ ، ٠) ، ب (٥٠٠ ، ٠) ، حـ (٣٠٠ ، ٤٠٠) ، و (٠ ، ٦٠٠) ، (انظر الشكل (٣ - ١١)) كل نقطة من نقاط فضاء الحلول الممكنة تمثل أحد الاختيارات المُتاحة لإدارة المصنع ، والتي يجب الاختيار فيما بينها للوصول إلى الحل الأمثل .

تعريف الحل الأمثل :Optimal Solution

الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية لتعظيم (أو لتصغير) دالة الهدف ، هو نقطة في فضاء الحلول الممكنة تكون عندها دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن .

في مثال مصنع الأجبان نجد أن الحل الأمثل ، هو النقطة حـ (٣٠٠ ، ٤٠٠) وهذا يعني أن إجمالي أرباح المصنع تكون أكبر ما يمكن إذا أنتج ٣٠٠ عبوة من الجبن الفاخر و ٤٠٠ عبوة من الجبن الممتاز . (سوف نوضح فيما بعد كيفية الحصول على الحل الأمثل) .

الهدف

- يحدد فضاء الحلول الممكنة
- يوجد الحل الأمثل بيانياً لنموذج برمجة خطية في متغيرين

الحل البياني لنموذج برمجة خطية في متغيرين :

Graphical Solution of a Two variables Linear Programming model

سوف نوضح طريقة إيجاد الحل الأمثل بيانياً من خلال مثال مصنع الأجبان .

تذكر عزيزي المتعلم

أن المطلوب تعظيم دالة الهدف (الوصول بالربح إلى أكبر قيمة ممكنة)

هـ = ٤ س + ٣ ص

تحت الشروط (القيود) التالية :

س ≥ ٠

ص ≥ ٠

٢ س + ص ≤ ١٠٠٠

٢ س + ٣ ص ≤ ١٨٠٠

Problem Solving

ينتج أحد مصانع الأجبان عبوات من النوع الفاخر من الجبن وعبوات من النوع الممتاز من الجبن . تحتاج عبوة النوع الفاخر إلى ١٢ كجم من الحليب و٢,٠ ساعة عمل ، وتحتاج عبوة النوع الممتاز إلى ٦ كجم من الحليب و٣,٠ ساعة عمل .

يربح المصنع ٤ دنانير من كل عبوة من النوع الفاخر ويربح ٣ دنانير من كل عبوة من النوع الممتاز . ترغب إدارة المصنع في تحديد عدد عبوات النوع الفاخر وعدد عبوات النوع الممتاز اللازم إنتاجها يومياً ، بحيث يكون إجمالي أرباح المصنع أكبر ما يمكن . علماً بأنه يتوفر يومياً بالمصنع ٦٠٠٠ كجم من الحليب و١٨٠ ساعة عمل .

الخطوة الأولى :

نوجد فضاء الحلول الممكنة (منطقة الحل المشترك للقيود بيانياً في شكل (٣-١١) حيث نجد أنه يتكون من جميع النقاط (س ، ص) التي تقع داخل أو على حدود المضلع الذي أركانه النقاط أ ، ب ، حـ ، و

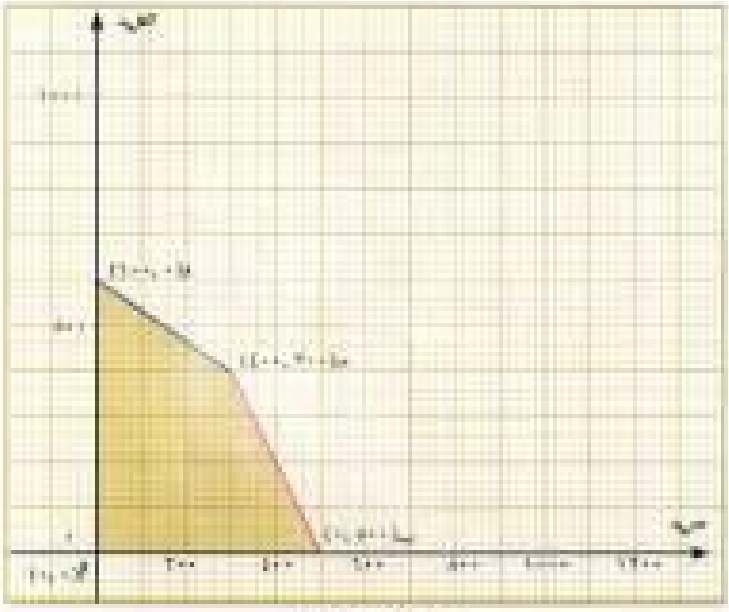
الخطوة الثانية :

نلاحظ أن دالة الهدف

هـ = ٤ س + ٣ ص هي دالة خط مستقيم ،

إذا أخذت هـ قيم مختلفة نحصل على خطوط متوازية

على سبيل المثال إذا أخذت هـ القيم المتزايدة ١٠٠٠ ، ٢٠٠٠ ، ٢٤٠٠ ، ٢٦٠٠ نحصل على الخطوط :



شكل (٣-١١)

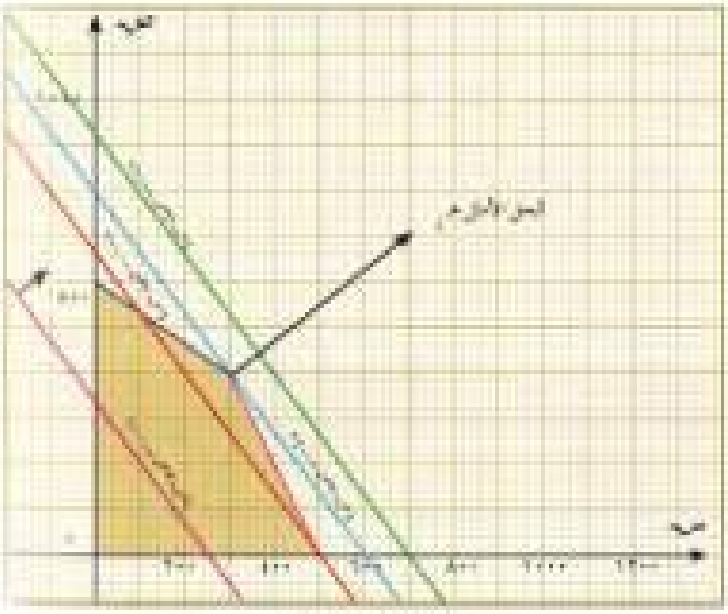
ل$_{١}$: ٤ س + ٣ ص = ١٠٠٠

ل$_{٢}$: ٤ س + ٣ ص = ٢٠٠٠

ل$_{٣}$: ٤ س + ٣ ص = ٢٤٠٠

ل$_{٤}$: ٤ س + ٣ ص = ٢٦٠٠

وهي خطوط متوازية وتبتعد عن نقطة الأصل ، نستنتج من ذلك أنه كلما زادت قيمة الهدف (قيمة هـ) إبتعد الخط المستقيم ٤ س + ٣ ص = هـ عن نقطة الأصل كما هو موضح في شكل (٣-١٢) :



شكل (٣-١٢)

وبالتالي لإيجاد الحل الأمثل نقوم بتحريك دالة الهدف بشكل متوازي في اتجاه زيادتها (تباعدياً عن نقطة الأصل) وتتوقف عندما نصل إلى قيمة هـ$_{ع}$ التي إذا زدنا عنها يكون خط دالة الهدف بالكامل خارج فضاء الحلول الممكنة .

هذه القيمة هـ$_{ع}$ هي القيمة العظمى لدالة الهدف ، ونقطة تماس الخط ٤ س + ٣ ص = هـ$_{ع}$ مع فضاء الحلول الممكنة التي توقفنا عندها هي الحل الأمثل ، وبتطبيق هذه الخطوة نجد أن الحل الأمثل هو س = ٣٠٠ ، ص = ٤٠٠ والقيمة العظمى لدالة الهدف هـ$_{ع}$ = ٤ × ٣٠٠ + ٣ × ٤٠٠ = ٢٤٠٠

ملاحظات مهمة

١ يلاحظ أن الحل الأمثل في المثال السابق يمثل النقطة حـ (٣٠٠ ، ٤٠٠) وهي أحد أركان المضلع أ ب حـ د ، وهذه ليست مصادفة ، وإنما يكون دائماً الحل الأمثل عند أحد أركان مضلع فضاء الحلول الممكنة ، وفي هذه الحالة يوجد حل أمثل وحيد .

٢ إذا كانت دالة الهدف موازية لأحد أضلاع مضلع فضاء الحلول الممكنة ، تكون كل نقطة على هذا المضلع حل أمثل للمشكلة .

٣ لحساب دالة الهدف هـ عند كل ركن من أركان مضلع فضاء الحلول الممكنة ، يكون الحل الأمثل عند إحداثيات الركن الذي تكون عنده قيمة هـ أكبر ما يمكن .

تمارين ٣-٢

١ استخدم طريقة الرسم لإيجاد الحل الأمثل لتعظيم دالة الهدف هـ في المسائل التالية :

أ هـ = ٥ س + ٤ ص

تحت القيود

س + ص ≤ ٣

٤ س + ٢ ص ≤ ٨

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ب هـ = ٢٣ س + ١٨ ص

تحت القيود

٢ س + ٣ ص ≤ ٦

٥ س + ٢ ص ≤ ١٠

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

تمارين عامة ٣-٣

١ مثل بيانياً منطقة حل كل من المتباينات التالية :

أ ٥ س - ٢ ص ≥ ١٠

ب ٣ س - ٤ ص < ١٢

٢ مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينتين

٢ س - ٥ ص ≤ ١٠ ، ٢ س + ص ≤ ٤

٣ مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينات

س + ص ≤ ٣ ، س - ص ≤ ١ ، س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

٤ استخدم طريقة الرسم لإيجاد الحل الأمثل ، لتعظيم دالة الهدف فيما يلي :

أ هـ = ١٥ س + ٥ ص

تحت القيود

٩ س + ٢ ص ≤ ١٨

٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ب استخدم طريقة التعويض ، لإيجاد الحل الأمثل ، لتعظيم دالة الهدف :

هـ = ٦ س + ٤ ص

تحت القيود

٣ س + ص ≤ ٦

٢ س + ٣ ص ≤ ١٢

٢٠ س + ٣ ص ≤ ٣٠

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

Technology تكنولوجيا

رسم المتباينات باستخدام برنامج Graphmatica من موقع وزارة التربية
(www.moe.edu.kw)

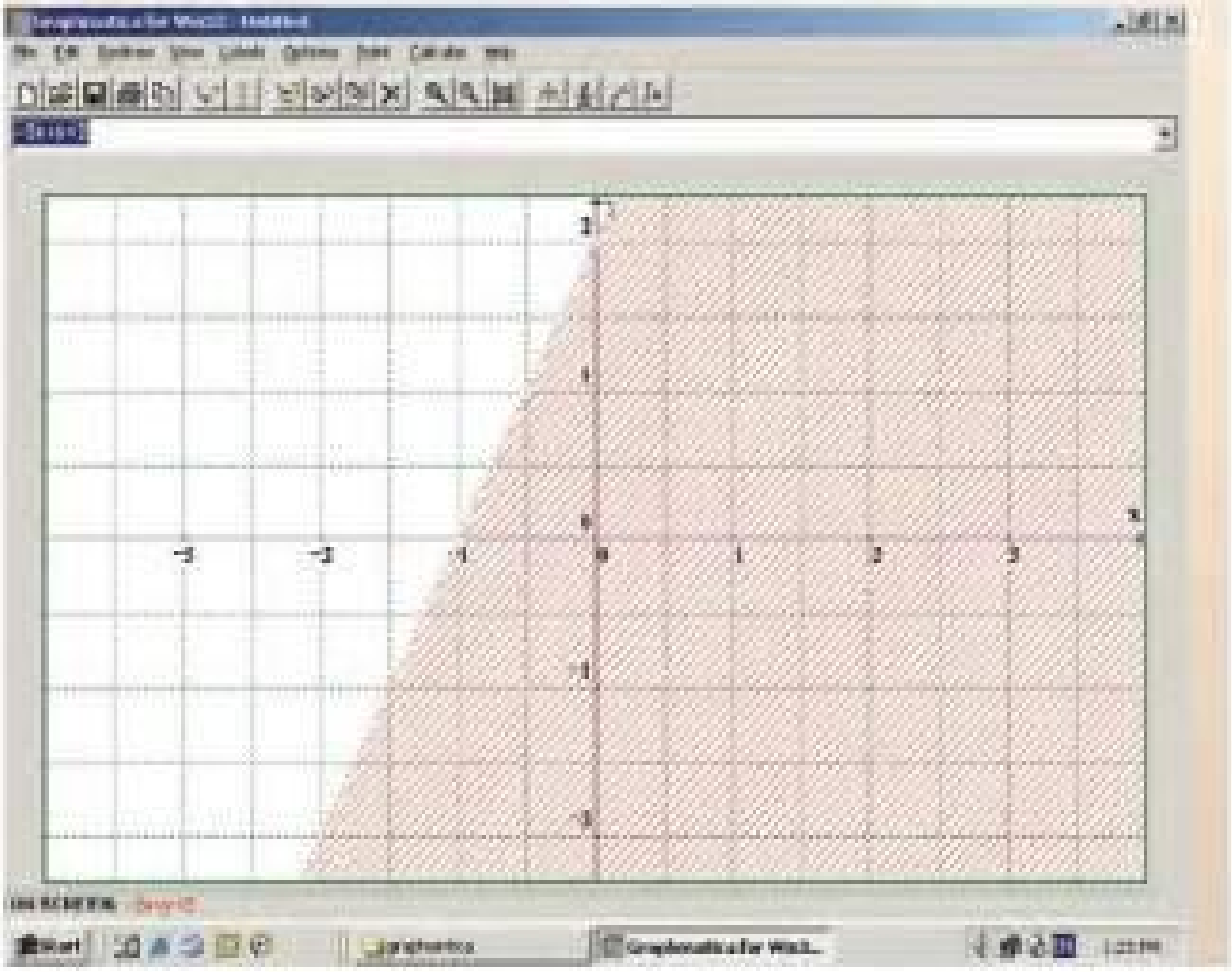
مثال : مثل بيانياً منطقة حل المتباينة - ٢ س + ص < ٢

الخطوات :

١ قم بفتح البرنامج وذلك بالضغط المزدوج على أيقونة تشغيل البرنامج .

٢ اكتب المتباينة .

٣ اضغط مفتاح Enter ليتم رسم منطقة حل المتباينة .



قائمة بالمفردات الرياضية

الفصل الثالث

باللغة الإنجليزية	باللغة العربية	باللغة الإنجليزية	باللغة العربية
Inequalities	المتباينات	Space of Possible Solutions	فضاء الحلول الممكنة
Linear Programming	البرمجة الخطية	Optimal Solution	الحل الأمثل
Principles of Linear Programming	أساسيات البرمجة الخطية		
Objective Function	دالة الهدف	Graphical Solution of a Two Variables Linear Programming Model	الحل البياني لنموذج برمجة خطية في متغيرين
Constraints	القيود (الشروط)	Linear Inequality in Two Variables	متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين
Graphing a Linear Inequality in Two Variables	منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً	Graphing Compound Inequalities	منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً
		Decision Variables	متغيرات القرار

قائمة المراجع

المراجع	الإصدار	المؤلفون
Calculus	Pws publishing company, Boston	Sworowski Olinick Pence
Theory And Problems of College Algebra	Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited	Murray R. Spiegel Robert E. Moyer
Math advantage	Harcourt brase	
Harcourt math		
رياضيات تطبيقات اقتصادية وإدارية		د . زكريا عبدالحميد باشا
Operations Research	Prantic hall	Hamdy A. Taha
البرمجة الخطية	جامعة الملك سعود	عبدالرحمن بن محمد أبو عمه محمد أحمد العش

قائمةبالمواقع العلمية على شبكة الإنترنت

www. userpedia. com
http: / / ar. wikipedia. org
www. moe. edu. kw

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٨٢) بتاريخ ١/ ٥/ ٢٠٠٧