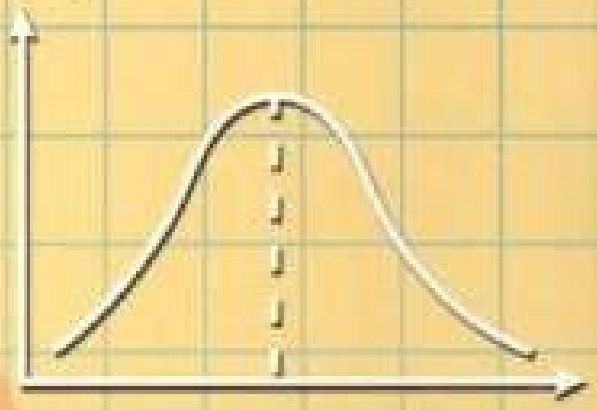
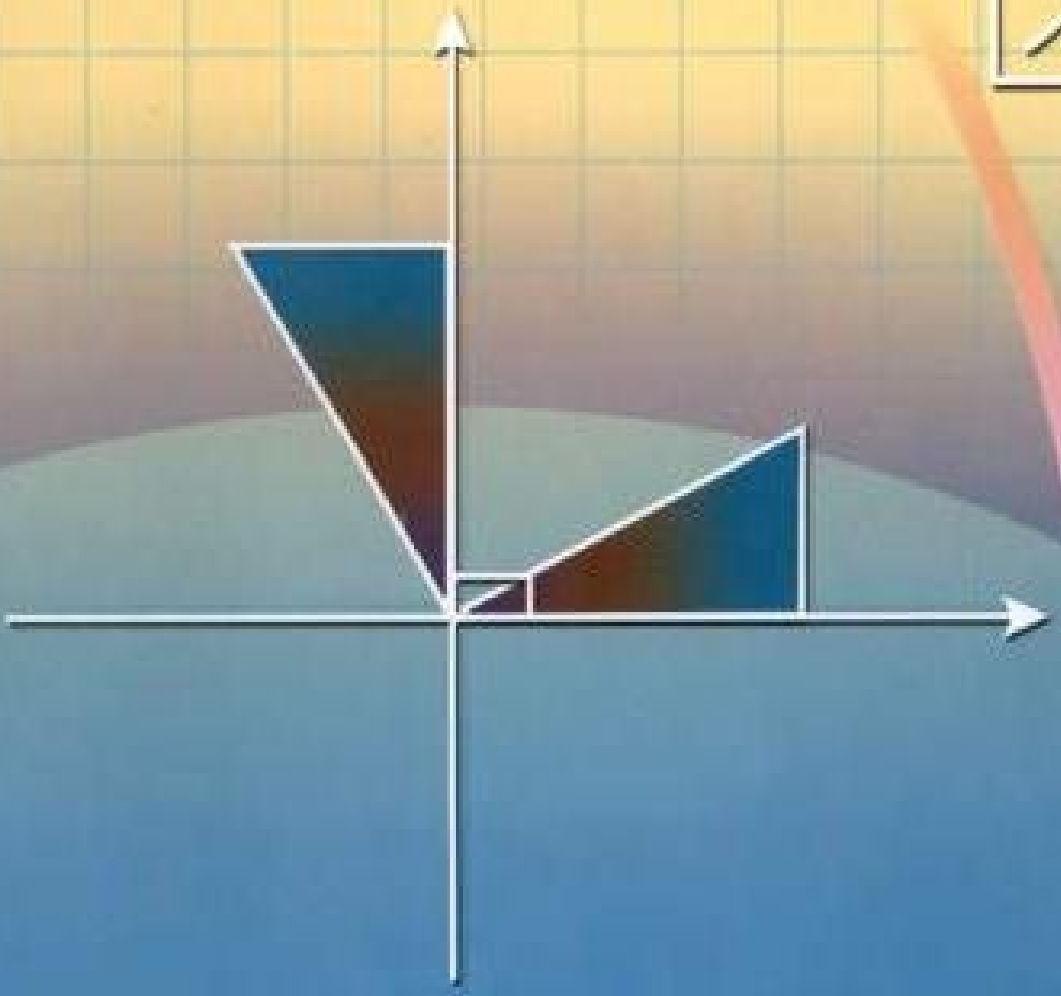
وزارة التربية

الرياضيات

للصف العاشر

الجزء الثاني





المرحلة الثانوية

الطبعة الخامسة

الطبعة الخامسة
١٤٣١هـ
٢٠١٠-٢٠١١م

تأليف

أ. إبراهيم حسين القطان
أ. سلوى لطيف مطر
أ. عبدالله محمد النعمة
أ. محمد راشد بن سعيد الحديدي
أ. محمد هلال اليوسفي
أ. ناهدة إبراهيم الخياط
د. يوسف بن صالح الشنيفي

تحرير ومراجعة

د. عبدالفتاح الشرقاوي

أعضاء لجنة المواءمة

أ. حصة يونس العلي
أ. سعيد محمد الوراقي
أ. ذكريات عبدالرسول المويل
أ. فتحية محمود أبوزور
أ. إلهام عفيفي العلي
عبدالرزاق البغلي

حقوق الطبع والنشر محفوظة للدول الأعضاء بتفويض من مكتب التربية العربي لدول الخليج

الرياضيات

للصف العاشر

الجزء الثاني

إهداء خاص من

Y kuwait.net

منتديات ياكويت

الطبعة الأولى : ١٩٩٣ - ١٩٩٤م
١٩٩٥ - ١٩٩٦م
الطبعة الثانية : ١٩٩٦ - ١٩٩٧م
الطبعة الثالثة : ١٩٩٧ - ١٩٩٨م
١٩٩٨ - ١٩٩٩م
الطبعة الرابعة : ٢٠٠٠ - ٢٠٠١م
٢٠٠٥ - ٢٠٠٦م
الطبعة الخامسة : ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧م
٢٠٠٨ - ٢٠٠٩م
٢٠٠٩ - ٢٠١٠م
٢٠١٠ - ٢٠١١ م

بسم الله الرحمن الرحيم

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

خبراء المشروع

□ اتفقت الدول الأعضاء في مكتب التربية العربي لدول الخليج على تدريس هذا الكتاب المدرسي الموحد في مدارسها، وهو يخدم الصف الأول الثانوي في كل من:

دولة الإمارات العربية المتحدة

مملكة البحرين

المملكة العربية السعودية

سلطنة عُمان

دولة قطر

والصف العاشر في دولة الكويت

دولة الإمارات العربية المتحدة:

د. حميد فايز حميد
د. رفعت أحمد عبداللطيف
أ. محمد هلال اليوسفي

مملكة البحرين:

د. عبدالله الحواج
أ. هدى إسماعيل العوضي
أ. ناهدة ابراهيم الخياط
أ. سلوى لطيف مطر

دولة الكويت:

د. منصور غلوم حسين
أ. علي عبدالله الصراف
أ. إبراهيم حسين القحطاني

المملكة العربية السعودية:

د. محمد بن علوي البار
د. محمد الشاشي
د. يوسف بن صالح الشنيفي

سلطنة عمان:

أ. محمد راشد بن سعيد الحديدي
أ. أحمد رضا أمين مهنا

دولة قطر:

د. نصرة رضا حسن الباقر
أ. عبدالله محمد النعمة

المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج:

د. عبدالفتاح الشرقاوي

الموضوع

المحتوى

الصفحة

٣ الفصل الثالث

٤ الفصل الرابع

المقدمة

المربي الفاضل . . . المربية الفاضلة . .

يسر المكتب العربي لدول الخليج/ المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج ، أن يضع بين يديك كتاب الطالب لرياضيات الصف العاشر المعادل للصف الأول الثانوي في كل من . . دولة الإمارات العربية المتحدة ، ومملكة البحرين ، وسلطنة عُمان ، ودولة قطر ، والمملكة العربية السعودية ، وذلك إستكمالاً لمسيرة توحيد وتطوير مناهج الرياضيات لمراحل التعليم العام ، وقد وضع هذا الكتاب في ظل منهج خليجي موحد ، من أهم ملامحه أنه :

- يتناول محتوى موحداً في كل الدول الأعضاء بالمكتب بقصد بناء الإنسان وتنمية المجتمع في إطار وحدة الفكر والهدف الخليجي .
- يتناول في محتواه حاسبات الجيب الإلكترونية ، فيربط بذلك بين دراسة الرياضيات وتكنولوجيا العصر .
- يعكس الاتجاهات العالمية المعاصرة في الرياضيات المدرسية .
- يتم بناؤه من خلال عمل جماعي تشارك فيه جميع الدول الأعضاء ، مُراعياً فكرها وتطلعاتها وواقعها .
- يؤكد الدور الوظيفي للرياضيات وخاصة فيما يتعلق بحل المشكلات ، ويؤكد على إيجابية ونشاط المتعلم .
- يراعي الفروق الفردية من خلال تنوع الأنشطة ، ويقدم توجيهات عمل في كتاب المعلم .
- يأتي بناؤه في تتابع تطويري ، محاوره : التخطيط والإعداد ، والتجريب ، والتقويم المصاحب والتحسين ، ثم التعميم ، مع المتابعة التطويرية في ضوء التغذية الراجعة .

هذا ويتناول محتوى منهج الصف العاشر الحد الأدنى من المعرفة والثقافة الرياضية اللازم لطالب هذا الصف من أجل المواطنة ومن أجل متابعة دراسته .

وقد جاء كتاب الطالب في جزأين :

- **الجزء الأول** : يتناول موضوعات : حاسبات الجيب الإلكترونية وحساب المثلثات والجمل الرياضية والمصفوفات والمحددات .
- **الجزء الثاني** : يتناول الحدوديات والهندسة الإحداثية والإحصاء وهندسة التحويلات .

أيها المربي الفاضل . .

أيتها المربية الفاضلة . .

إذا كانت كتب الرياضيات الموحدة قد حرصت على تقديم الأفضل ، مادة وطريقة ، فإن الدور الذي تنتظره منك هو الذي يؤكد هذا الإتجاه وينميه ، ويجعله وسيلة لإثارة الدافعية لدى المتعلم ، فيكون تعلمه معتمداً على نشاطه ، ويكون نشاطه منطلقاً من رغبة ذاتية ، ويستطيع المعلم أن يهيئ للرغبة دوافعها ، وإننا لعلى يقين من النجاح والتوفيق لجميع الزملاء من معلمين ومعلمات فيما قصدنا إليه ، متى صحت النية وصدق العزم .

والله من وراء القصد ، وهو يهدي السبيل . . .

مدير المركز

الفصل الأول

الحدوديات
Polynomials

١-١ مقدمة وتعاريف Introduction & Definitions

تعلم أن المقدار الجبري يسمى حدودية إذا كان كل حد من حدوده لا يحتوي على متغير في المقام أو تحت الجذر أو في الأس ، فمثلاً ، كل مما يلي حدودية في المتغير س :

٥ س + ٣	من الدرجة الأولى
٤ س^{٢} − ٢ س + ٧	من الدرجة الثانية
١٩ س^{٣} − ٧ س^{٢} + س − ٤	من الدرجة الثالثة
٦ س^{٥} + ١٣ س^{٣} − ١٥ س + ٢	من الدرجة الخامسة

ولكن كلاً مما يلي ليس حدودية (اذكر السبب) :

س + $\frac{١}{س}$ − ٢

٣ س + ٢ $\sqrt{س}$ − ٥

وعموماً ، الصورة العامة للحدودية من الدرجة ن في المتغير س هي :

$$أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + \ldots + أ_{١} س + أ_{٠}$$

حيث المعاملات $أ_{ن}$ ، $أ_{ن-١}$ ، ... ، $أ_{١}$ ، $أ_{٠}$ ∈ ح ، $أ_{ن}$ ≠ ٠

وحيث ن عدد صحيح غير سالب .

نسمي $أ_{ن}$ بالمعامل الرئيسي ، $أ_{٠}$ بالحد الثابت «الحد المطلق»

أمثلة (Examples) توضيحية :

١ س^{٥} + ٣ س^{٢} − $\sqrt{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ حدودية في المتغير س ،

درجة الحدودية ن = ٥ ،

المعامل الرئيسي $أ_{٥}$ = ١ ،

الحد الثابت $أ_{٠}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ ٤ − $\frac{١}{٢}$ س + س^{٣} − ٩ س^{٦} حدودية من الدرجة السادسة في س ، معاملها الرئيسي − ٩ وحدها الثابت ٤

٣ $٣ س^{٢} - ٥ س^{٤} + \frac{٢}{٣} س - ٧$ حدودية من الدرجة الرابعة .

حالات خاصة :

بفرض أن أ ، ب ، حـ ∈ ح :

$أ س^{٢} + ب س + حـ$ ، أ ≠ ٠ حدودية من الدرجة الثانية في س

$ب س + حـ$ ، ب ≠ ٠ حدودية من الدرجة الأولى في س

حـ حيث حـ ≠ ٠ هي حدودية من درجة صفر (الحدودية الثابتة) .

(٠) هي الحدودية الصفرية (ليس للحدودية الصفرية درجة) .

والحدودية الصفرية هي العنصر المحايد (Identity Element) لعملية الجمع على الحدوديات .

مثال ١

كون حدودية من الدرجة الثالثة في ص معاملاتها :

$أ_{٣} = -١$ ، $أ_{٢} = ٠$ ، $أ_{١} = \frac{١}{٢}$ ، $أ_{٠} = -٤$

الحل

الحدودية هي : $أ_{٣} ص^{٣} + أ_{٢} ص^{٢} + أ_{١} ص + أ_{٠}$

أي $-ص^{٣} + \frac{١}{٢} ص - ٤$ ■

لو تأملنا الحدودية $٤ س^{٢} - ٣ س + \frac{١}{٢}$ فإننا نلاحظ أنه بالتعويض عن المتغير س بعدد حقيقي نحصل على قيمة حقيقية مناظرة للحدودية ، فمثلاً :

عند س = صفراً ، قيمة الحدودية = $\frac{١}{٢}$

وعند س = $\frac{١}{٤}$ ، قيمة الحدودية = $٤ (\frac{١}{٤})^{٢} - ٣ (\frac{١}{٤}) + \frac{١}{٢} = ٠$

وهكذا . .

ويعني ذلك أن الحدودية : $٤ س^{٢} - ٣ س + \frac{١}{٢}$ تعين تطبيقاً :

د : ح ⟵ ح حيث د(س) = ٤ س^{٢} − ٣ س + $\frac{١}{٢}$

في هذه الحالة نسمي د تطبيقاً حدودياً (أو دالة حدودية) قاعدة اقترانه الحدودية

د(س) = ٤ س^{٢} − ٣ س + $\frac{١}{٢}$

وبوجه عام :

نسمي التطبيق د : ح ⟵ ح الذي قاعدة اقترانه :

د(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$ حيث :

أ$_{ن}$ ، أ$_{ن-١}$ ، ... ، أ$_{١}$ ، أ$_{٠}$ ∈ ح ، أ$_{ن}$ ≠ ٠ ، ن = عدد صحيح غير سالب

دالة حدودية من الدرجة ن

مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٦ س^{٣} + ١١ س^{٢} − ٤ س + ٦ فأوجد :

أ د(−٢) ب د($\frac{١}{٢}$ ٢)

الحل

أ حيث إن د(س) = ٦ س^{٣} + ١١ س^{٢} − ٤ س + ٦

∴ د(−٢) = ٦ (−٢)^{٣} + ١١ (−٢)^{٢} − ٤ (−٢) + ٦

= −٤٨ + ٤٤ + ٨ + ٦ = ١٠

ب د($\frac{١}{٢}$ ٢) = ٦ ($\frac{١}{٢}$ ٢)^{٣} + ١١ ($\frac{١}{٢}$ ٢)^{٢} − ٤ ($\frac{١}{٢}$ ٢) + ٦

وباستخدام الآلة الحاسبة نحصل على :

د($\frac{١}{٢}$ ٢) = ١٥٨,٥ ■

تساوي حدوديتين : (Equality of Two polynomials)

إذا كان لدينا الحدوديتان :

$$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \dots + أ_١ س + أ_٠$$

$$، هـ(س) = ب_م س^م + ب_{م-١} س^{م-١} + \dots + ب_١ س + ب_٠$$

فإننا نقول إن الحدودية د(س) تساوي الحدودية هـ(س) ونكتب :

$$د(س) = هـ(س)$$

إذا وإذا فقط تحقق الشَّرْطَيْن :

١ ن = م (أي أن للحدوديتين الدرجة نفسها) .

٢ $أ_ن = ب_م$ ، $أ_{ن-١} = ب_{م-١}$ ، ..... ، $أ_٠ = ب_٠$.
(أي أن المعاملات المتناظرة فيهما متساوية) .

مثال ٣

إذا كانت د(س) = $س^٣ + أ س^٢ + ٥ س + ب + جـ$ فأوجد :

، هـ(س) = $(ب - جـ) س^٣ - ٤ س^٢ + ٥ س + ٣$

فأوجد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل د(س) = هـ(س)

الحل

∵ د(س) = هـ(س)

∴ ب − جـ = ١ ..... (١)

أ = −٤ ..... (٢)

، ب + جـ = ٣ ..... (٣)

وبحل المعادلتين (١) ، (٣) ينتج ب = ٢ ، جـ = ١ ■

١-١ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يأتي :

١ لكل أ ∈ ح ، ق (س) = أ س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٤ حدودية من الدرجة الثالثة .

٢ إذا كانت د(س) = س^{٤} + ١٠ فإن د(س^{٢}) = س^{٨} + ١٠ .

٣ الحدودية د(س) = أ ، أ ∈ ح حدودية من الدرجة الصفرية .

٤ المقدار س^{٢} + $\frac{١}{س}$ حدودية .

٥ إذا كانت هـ(س) = أ س + س^{٢} ، د(س) = س^{٢} − س وكانت هـ(س) = د(س) فإن أ = −١ .

أسئلة مقالية

١ اكتب الحدودية د (س) التي معاملاتها :

أ $أ_{٠}$ = ٠ ، $أ_{١}$ = ١ ، $أ_{٢}$ = −٣ ، $أ_{٣}$ = −٧

ب $أ_{٠}$ = −٤ ، $أ_{١}$ = ٢ ، $أ_{٢}$ = $أ_{٣}$ = صفر ، $أ_{٤}$ = ٢

جـ $ب_{٠}$ = ٣ ، $ب_{١}$ = ١ ، $ب_{٢}$ = −٤ ، $ب_{٣}$ = $ب_{٤}$ = ٠ ، $ب_{٥}$ = $ب_{٦}$ = ٥

د جميع المعاملات أصفار ما عدا $أ_{٠}$ = ٥

٢ في كل حالة من حالات التمرين السابق أوجد درجة د(س) والحد الثابت والمعامل الرئيسي .

٣ أوجد هـ(−٣) لكل مما يأتي :

أ هـ(س) = س^{٢} + ٢س − ١٥

ب هـ(س) = − $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ٢س^{٢} − $\frac{٨}{٣}$ س

جـ ٢ هـ(س) = ٦س^{٢} − ١٥ س + ١٨

٤ أوجد د(س + ١) لكل مما يأتي :

أ د (س) = ٥س − ٣

ب د (س) = $س^{٢}$ − ٤

حـ د (س) = $س^{٢}$ − ٧ س + ١٦

٥ أوجد قيم أ ، ب ، حـ ، ء التي تجعل د(س) = هـ(س) حيث :

د (س) = ٢ $س^{٣}$ − ٥ $س^{٢}$ + حـ

هـ(س) = أ $س^{٢}$ − ب $س^{٢}$ + ٣

٦ أوجد قيمة كل من ب ، حـ التي تجعل د(س) = هـ(س) حيث :

د (س) = ٣ $س^{٢}$ + (ب + حـ) س + ٤

هـ (س) = ٣ $س^{٢}$ − ٢ س + (ب − حـ)

١ – ٢

جمع وطرح وضرب الحدوديات

Adding , Subtracting and Multiplying Polynomials

تعلم أنه لجمع حدوديتين نجمع معاملات الحدود المتشابهة .

مثال ١

أوجد د(س) + هـ(س) حيث :

د(س) = ٢ س^{٤} + ٦ س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٧ س + ٦ ،

هـ(س) = ٢ س^{٤} – ٦ س^{٣} + ٥ س – ٤

الحل

د(س) + هـ(س) = ٢ س^{٤} + ٢ س^{٤} + (٦ – ٦) س^{٣} + ٣ س^{٢} + (–٧ + ٥) س + (٦ – ٤)

= ٢ س^{٤} + ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} – ٢ س + ٢ ■

تعلم كذلك أنه لضرب عدد حقيقي في حدودية نضرب هذا العدد في جميع حدودها .

مثال ٢

إذا كانت د (س) = ٥ س^{٣} – ٧ س^{٢} + ٤ س + ٣

هـ (س) = ٣ س^{٤} – ٢ س^{٣} + س^{٢} – ٧

فأوجد د(س) + ٧ هـ(س)

الحل

٧ هـ (س) = ٧ (٣ س^{٤} – ٢ س^{٣} + س^{٢} – ٧)

= ٢١ س^{٤} – ١٤ س^{٣} + ٧ س^{٢} – ٤٩

∴ د (س) + ٧ هـ(س) = ٢١ س^{٤} + (٥ – ١٤) س^{٣} + (–٧ + ٧) س^{٢} + ٤ س + (٣ – ٤٩)

= ٢١ س^{٤} – ٩ س^{٣} + ٤ س – ٤٦ ■

تعلم أيضاً أن عملية الطرح هي عملية جمع النظير الجمعي ، أي أن :

د(س) – هـ(س) = د(س) + [– هـ(س)] = د(س) + (–١) هـ(س)

مثال ٣

إذا كانت د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧ ،

هـ(س) = ٢س^{٢} − ٥ س + ٢

فأوجد د(س) − هـ(س)

الحل

د(س) − هـ(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧ + (−١) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٢)

= $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧ − ٢ س^{٢} + ٥ س −٢

= $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + (٣ −٢) س^{٢} + ٥ س + (٧ − ٢)

= $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} + س^{٢} + ٥ س + ٥ ■

ملاحظات (Observations) : لعلك تكون قد لاحظت أن :

١ درجة د(س) ± هـ(س) لا يمكن أن تزيد عن درجة د(س) أو هـ(س) .

٢ درجة الحدودية ك د(س) هي درجة الحدودية د(س) ، ك ∈ ح − (٠) وإذا كان ك = ٠

فإن ك د(س) = ٠ = الحدودية الصفرية .

٣ د(س) + هـ(س) = هـ(س) + د(س) ولكن

د(س) − هـ(س) = (−١) [هـ(س) − د(س)] .

سبق لك أيضاً دراسة ضرب حدودية في أخرى ، والمثال الآتي للتذكير .

مثال ٤

إذا كان د(س) = س + ٢ ،

هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤ ،

ر(س) = س^{٣} + ٨ فأوجد :

أ د(س) . هـ(س)

ب هـ(س) . ر(س)

جـ هـ(س) . د(س) ماذا تلاحظ؟

د [د(س) . هـ(س)] . ر(س)

هـ د(س) . [هـ(س) . ر(س)] ماذا تلاحظ؟

و د(س) [هـ(س) + ر(س)]

ز د(س) . هـ(س) + د(س) . ر(س) ماذا تلاحظ؟

الحل

أ د(س) . هـ(س) = (س + ٢) (س^{٢} − ٢س + ٤)

= س (س^{٢} − ٢س + ٤) + ٢(س^{٢} − ٢س + ٤)

= س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س + ٢س^{٢} − ٤س + ٨

= س^{٣} + ٨

ب هـ(س) . ر(س) = (س^{٢} − ٢س + ٤) (س^{٣} + ٨)

= س^{٥} + ٨ س^{٢} − ٢س^{٤} − ١٦س + ٤س^{٢} + ٣٢

= س^{٥} − ٢س^{٤} + ٤س^{٢} + ٨ س^{٢} − ١٦س + ٣٢

جـ هـ(س) . د(س) = (س^{٢} − ٢س + ٤) (س + ٢)

= س^{٣} + ٢س^{٢} − ٢س^{٢} − ٤س + ٤س + ٨

= س^{٣} + ٨

= د(س) . هـ(س)

وهذا يوضح أن :

عملية الضرب على الحدوديات عملية إبدالية (Commutative)

د [د(س) . هـ(س)] . ر(س)

= (س^{٣} + ٨) (س^{٣} + ٨) لماذا؟

= س^{٦} + ٨ س^{٣} + ٨ س^{٣} + ٦٤ = س^{٦} + ١٦ س^{٣} + ٦٤

هـ د(س) [هـ(س) . ر(س)]

= (س + ٢) (س^{٥} − ٢س^{٤} + ٤س^{٢} + ٨س^{٢} − ١٦س + ٣٢)

= س^{٦} − ٢س^{٥} + ٤س^{٤} + ٨ س^{٣} − ١٦س^{٢} + ٣٢س

+ ٢س^{٥} − ٤س^{٤} + ٨ س^{٣} + ١٦ س^{٢} − ٣٢ س + ٦٤

= س^{٦} + ١٦ س^{٢} + ٦٤

= [د (س) . هـ (س)] . ر(س)

وهذا يوضح أن

عملية الضرب على الحدوديات عملية تجميعية (Associative)

و د (س) [هـ (س) + ر (س)]

= (س + ٢) [(س^{٢} − ٢س + ٤) + (س^{٢} + ٨)]

= (س + ٢) (س^{٢} + س^{٢} − ٢س + ١٢)

= س^{٤} + س^{٣} − ٢س^{٢} + ١٢ س + ٢س^{٣} − ٤ س + ٢٤

= س^{٤} + ٣ س^{٣} + ٨ س + ٢٤

ز د (س) . هـ (س) + د (س) . ر (س)

= (س^{٣} + ٨) + (س + ٢) (س^{٢} + ٨) لماذا؟

= س^{٣} + ٨ + س^{٤} + ٨س + ٢س^{٣} + ١٦

= س^{٤} + ٣س^{٣} + ٨ س + ٢٤

= د (س) [هـ (س) + ر (س)] ■

وهذا يوضح أن

عملية ضرب الحدوديات تتوزع على عملية الجمع .

ملاحظة : من المثال السابق يتضح أن :

درجة الحدودية د (س) . هـ (س) تساوي مجموع درجتي الحدوديتين د (س) ، هـ (س)

١-٢ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة .

١ إذا كانت ق (س) = س + ٢ فإن (ق (س))^{٢} =

(أ) س^{٢} + ٤ (ب) س^{٢} + س + ٤ (ج) س^{٢} + ٢س + ٤ (د) س^{٢} + ٤س + ٤

٢ إذا كانت د (س) حدودية من الدرجة السادسة ، هـ (س) حدودية من الدرجة الثالثة فإن درجة الحدودية [هـ (س) - د (س)] هي :

(أ) السادسة (ب) الرابعة (ج) الثالثة (د) الثانية

٣ إذا كانت ت (س) + ق (س) = س^{٢} - ٥س + ٣ ، وكانت ق (س) = ٣ - ٥س فإن ت (س) =

(أ) - س^{٢} (ب) س^{٢} (ج) س^{٢} - ١٠س + ٦ (د) ٦ - ١٠س - س^{٢}

٤ [ق (س) - هـ (س)] × $\frac{١}{٢}$ =

(أ) ق (س) - $\frac{١}{٢}$ هـ (س) (ب) $\frac{١}{٢}$ هـ (س) - ق (س)

(ج) $\frac{١}{٢}$ ق (س) - $\frac{١}{٢}$ هـ (س) (د) $\frac{١}{٢}$ هـ (س) - $\frac{١}{٢}$ ق (س)

أسئلة مقالية

١ إذا كانت د (س) = ٢س^{٢} + ٤س - ٦ ،

هـ (س) = ٢س^{٢} - س + ٤ ،

ر (س) = ٢س^{٢} - س^{٢} + س فأوجد :

أ د (س) + هـ (س)

ب د (س) - ر (س)

جـ هـ(س) − د(س)

د − $\frac{١}{٢}$ هـ(س)

هـ $\frac{١}{٢}$ د(س) + س (س)

٢ حدد درجة الحدودية الناتجة في كل من الفقرات الواردة في (١) ثم قارنها بدرجتي الحدوديتين في كل منها .

٣ إذا كانت د(س) = $\frac{١}{٣}$ هـ(س) + س (س) فأثبت أن :

هـ(س) = ٣ [د(س) − س (س)]

٤ أوجد د(س) . هـ(س) في كل مما يلي ثم حدد درجة الحدودية الناتجة وقارنها بدرجتي د(س) ، هـ(س) :

أ د(س) = ٣ س^{٢} ، هـ(س) = ٢س^{٣} + ٣

ب د(س) = $\sqrt{٢}$ س^{٢} ، هـ(س) = $\sqrt{٢}$ س^{٢} + $\sqrt{٨}$ س

جـ د(س) = س − ٢ ، هـ(س) = س^{٢} + ٢س + ٤

د د(س) = س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = س^{٤} − ٤س^{٢} + ١٦

هـ د(س) = هـ(س) = ٣س^{٢} − س + ٥

و د(س) = $\frac{٣}{٤}$ س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٢ س + ٣ ،

هـ(س) = ٢ س^{٣} − $\sqrt{٣}$ س

٥ قطعة أرض على شكل مستطيل عرضه بالأمتار (٢س − ١) وطوله بالأمتار (٣س^{٢} − ٤س + ١) أوجد محيط ومساحة قطعة الأرض بدلالة س ، ثم أوجد المحيط والمساحة عندما س = ٥ .

١ – ٣

قسمة حدوديتين Dividing of Two Polynomials

إذا كان أ ، ب عددين صحيحين ، وكان أ ≠ صفر ، فإننا نقول إن ب يقبل القسمة على أ إذا تعين عدد صحيح جـ (قد يساوي الصفر) بحيث يكون ب = أ جـ وفي هذه الحالة نسمي كلاً من أ ، جـ عاملاً من عوامل ب ، ونكتب جـ = ب ÷ أ

فمثلاً ، – ٢٠ يقبل القسمة على ٤ لأن :

– ٢٠ = ٤ × (– ٥) ويكون – ٥ = – ٢٠ ÷ ٤

لاحظ أن الصفر يقبل القسمة على أي عدد صحيح ≠ صفر ـ لماذا ؟

بطريقة مشابهة نستطيع تعريف عملية القسمة على الحدوديات :

تعريف

إذا كان د(س) ، هـ(س) حدوديتين اختياريتين ، وكان هـ(س) ≠ صفر ، فإننا نقول إن د(س) تقبل القسمة على هـ(س) إذا تعينت حدودية ق(س) بحيث يكون :

د(س) = هـ(س) . ق(س)

وفي هذه الحالة نسمي كلاً من هـ(س) ، ق(س) عاملاً من عوامل د(س) ، ونكتب :

ق(س) = د(س) ÷ هـ(س)

فمثلاً ، إذا كانت د(س) = س^{٢} – ٤ ، هـ(س) = س – ٢ فإنَّ د(س) تقبل القسمة على هـ(س) ، وذلك لأن :

س^{٢} – ٤ = (س – ٢) (س + ٢) (لماذا؟)

وعليه نقول إن س – ٢ عامل من عوامل س^{٢} – ٤

، س + ٢ عامل من عوامل س^{٢} – ٤

ويمكن أن نكتب :

س – ٢ = (س^{٢} – ٤) ÷ (س + ٢) أو س – ٢ = $\frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢}$ ، س ≠ – ٢

، س + ٢ = (س^{٢} – ٤) ÷ (س – ٢) أو س + ٢ = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

وسنعرض فيما يلي عدداً من الأمثلة تقودنا إلى معرفة خوارزمية القسمة :

مثال ١

إذا علمت أن د (س) = ٣ س^{٢} − ٢٤ تقبل القسمة على :

هـ (س) = ٣ س − ٦ ، فأوجد ق (س) التي تجعل :

د (س) = هـ (س) . ق (س)

الحل

حيث إن د (س) = هـ (س) . ق (س)

∴ ق (س) = د (س) ÷ هـ (س)

= (٣ س^{٢} − ٢٤) ÷ (٣ س − ٦)

ولإجراء عملية القسمة :

١ رتب حدود كل من د (س) ، هـ (س) ترتيباً تنازلياً «أو تصاعدياً» حسب قوى س .

٢ عند الترتيب ، اترك مسافة مكان أي قوة لـ س غير موجودة .

٣ أجرِ عملية قسمة مشابهة لعملية القسمة المطولة على الأعداد وذلك على النحو التالي :

- اقسم ٣ س^{٢} على ٣ س فيكون الناتج س^{١}
- اضرب س^{١} × (٣ س − ٦) فيكون الناتج ٣ س^{٢} − ٦س^{١}
- اطرح ناتج الضرب من ٣ س^{٢} − ٢٤ فيكون الناتج ٦ س^{١} − ٢٤
- كرر ما سبق ، اقسم ٦ س^{١} على ٣ س فيكون الناتج + ٢ س
- اضرب ٢ س × (٣ س − ٦) فيكون الناتج ٦ س^{١} − ١٢ س
- اطرح ناتج الضرب من ٦ س^{١} − ٢٤ فيكون الناتج ١٢ س − ٢٤
- كرر ما سبق ، اقسم ١٢ س على ٣س فيكون الناتج + ٤
- اضرب ٤ × (٣ س − ٦) فيكون الناتج ١٢ س − ٢٤
- اطرح ناتج الضرب من ١٢ س − ٢٤ فيكون الناتج صفراً ، بذلك تنتهي عملية القسمة ويكون :

المقسوم = ٣ س^{٢} − ٢٤

المقسوم عليه = ٣ س − ٦

ناتج القسمة = س^{٢} + ٢ س + ٤ = ق (س)

واختصاراً تتم هذه الخطوات على النحو التالي الموضح فيما يأتي :

ناتج القسمة ← س^{٢} + ٢ س + ٤ المقسوم عليه

المقسوم ← ٣ س^{٣} − ٢٤ | ٣ س − ٦

٣ س^{٣} − ٦ س^{٢}

٦ س^{٢} − ٢٤

٦ س^{٢} − ١٢ س

١٢ س − ٢٤

١٢ س − ٢٤

∴ ٣ س^{٣} − ٢٤ = (٣ س − ٦) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

أي أن : المقسوم = المقسوم عليه × ناتج القسمة . ■

تدريب (١) :

أكمل ، ثم عين كلاً من المقسوم والمقسوم عليه وناتج القسمة في كل مما يلي :

أ

. . .

٣ س^{٢} + ١٢ س | س + ٤

٣ س^{٢} + . . .

. . . . . .

المقسوم = ٣ س^{٢} + ١٢ س ، المقسوم عليه = ...

ناتج القسمة = ...

∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س = (. . . . .) × (س + ٤)

ب

٢ س + ...

٢ س^{٢} + ٥ س − ٧ | س − ١

. . . − . . .

٧ س − ٧

. . . . . .

المقسوم = ... ، المقسوم عليه = س − ١

ناتج القسمة = ...

∴ ٢س^{٢} + ٥س − ٧ = (. . . . .) × (. . . . .) .

مثال ٢

إذا علمت أن د(س) = −٤ س^{٥} + ٢ س^{٢} − ٢٠ س^{٣} + ١٠ تقبل القسمة على هـ(س) = ٥ + س^{٢} ، فأوجد ق(س) التي تجعل :

د(س) = هـ(س) . ق(س)

الحل

بترتيب حدود كل من د(س) ، هـ(س) :

د(س) = −٤ س^{٥} − ٢٠ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١٠

هـ(س) = س^{٢} + ٥ ونجري القسمة المطولة لإيجاد ق(س) :

−٤س^{٣} + ٢	
−٤س^{٥} − ٢٠ س^{٣} + ٢س^{٢} + ١٠	س^{٢} + ٥
−٤س^{٥} − ٢٠س^{٣}	
٢س^{٢} + ١٠	
٢س^{٢} + ١٠	
٠ ٠	

∴ −٤ س^{٥} − ٢٠ س^{٣} + ٢س^{٢} + ١٠ = (س^{٢} + ٥) (−٤ س^{٣} + ٢)

، ق(س) = −٤ س^{٣} + ٢ ■

مثال ٣

إذا كان س + ٢ عاملاً من عوامل س^{٣} − ٥ س − ٢ س^{٢} + ٦ فأوجد العامل الآخر .

الحل

بترتيب حدود المقسوم تنازلياً وإجراء عملية القسمة كما يلي :

س^{٢} − ٤ س + ٣	
س^{٣} − ٢ س^{٢} − ٥ س + ٦	س + ٢
س^{٣} + ٢ س^{٢}	
− ٤ س^{٢} − ٥ س + ٦	
− ٤ س^{٢} − ٨ س	
٣ س + ٦	
٣ س + ٦	
٠ ٠	

∴ العامل الآخر هو س^{٢} − ٤ س + ٣ ■

مثال ٤

إذا كانت ق(س) = ٣ س^{٤} − س^{٣} + ٢ س + ٥

، هـ(س) = س^{٢} + ١

فاختبر قابلية قسمة ق(س) على هـ(س)

الحل

نجري عملية القسمة المطولة كما في المثالين (١) ، (٢) :

٣س^{٢} − س − ٣

٣ س^{٤} − س^{٣} + ٢س + ٥	س^{٢} + ١
٣ س^{٤} + ٣ س^{٢}	
− س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٢ س + ٥	
− س^{٣} − س	
− ٣ س^{٢} + ٣ س + ٥	
− ٣ س^{٢} − ٣	
٣ س + ٨	

وحيث إن ٣ س لا تقبل القسمة على س^{٢} (لماذا ؟)

فإننا نقف عند هذا الحد ونقول إن ق(س) لا تقبل القسمة على هـ(س) ويكون ٣ س + ٨ هو باقي القسمة ، أي أن :

المقسوم = ٣ س^{٤} − س^{٣} + ٢ س + ٥

والمقسوم عليه = س^{٢} + ١ ، وباقي القسمة = ٣ س + ٨

ويكون : ٣ س^{٤} − س^{٣} + ٢ س + ٥

= (س^{٢} + ١) (٣ س^{٢} − س − ٣) + (٣ س + ٨)

يتضح من المثال السابق أننا نستطيع قسمة أي حدودية ق(س) على أي حدودية أخرى هـ(س) ≠ ٠ لنحصل على ناتج قسمة ق(س) وباقي قسمة م(س) حيث درجة م(س) أصغر من درجة هـ(س) .

وبوجه عام نقول :

إذا كانت د(س) ، هـ(س) حدوديتين اختياريتين ، هـ(س) ≠ ٠ ، فإنه يتعين وجود حدوديتين
ق(س) ، ر(س) بحيث يكون :
د(س) = هـ(س) . ق(س) + ر(س) حيث ر(س) ≠ ٠
نسمي د(س) المقسوم ، هـ(س) المقسوم عليه ، ق(س) ناتج القسمة ، ر(س) باقي
القسمة . عندما ر(س) = ٠ نقول إن د(س) تقبل القسمة على هـ(س)

ملاحظة :

إذا كانت درجة المقسوم د(س) أصغر من درجة المقسوم عليه هـ(س) فإننا نأخذ ق(س) = صفراً ويكون باقي القسمة ر(س) = د(س)

مثال ٥

اقسم (س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٥ س + ١٦) على (س^{٢} + ٣) وعين ناتج القسمة والباقي .

الحل

تجري عملية القسمة المطولة كما في المثال السابق :

س + ٥	
س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٥ س + ١٦	س^{٢} + ٣
س^{٣} + ٣ س	
٥ س^{٢} + ٢ س + ١٦	
٥ س^{٢} + ١٥	
٢ س + ١	

ناتج القسمة = س + ٥ وباقي القسمة = ٢س + ١ ■

١-٣ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ د(س) = س^{٢} + ٤ تقبل القسمة على هـ(س) = س + ٢

٢ إذا كانت د(س) تقبل القسمة على (س − ٣) (س + ٣) فإن الحدودية د(س) من الدرجة الثانية .

٣ إذا كانت س^{٢} − ٥ = (س − ٢) (س + ٢) + ر(س) فإن ر(س) = −١

٤ إذا كانت د(س) حدودية من الدرجة الرابعة ، ت(س) حدودية من الدرجة الثانية فإن باقي قسمة د(س) على ت(س) يكون من الدرجة الأولى .

٥ باقي قسمة (س^{٢} + ٨) على (س^{٢} − ٢ س + ٤) هو (س + ٢) .

أسئلة مقالية

١ اقسم د(س) على هـ(س) في كل مما يأتي :

أ د(س) = س^{٢} − ٤ ، هـ(س) = س − ٢

ب د(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = س^{٢} + س + ١

جـ د(س) = ٣ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٦ س + ٦ ، هـ(س) = س^{٢} + ٣

د د(س) = ٤ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٧ س + ٥ ، هـ(س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٥

هـ د(س) = ٩ س^{٤} + ٦ س^{٣} + س^{٢} − ٤ س − ٢ ، هـ(س) = ٣ س^{٢} + ٢

٢ إذا كان س − ٣ عاملاً من عوامل ٣ س^{٣} − ٧ س^{٢} − ١١ س + ١٥ فأوجد العامل الآخر .

٣ إذا كان س^{٢} − ٣ س + ٥ عاملاً من عوامل الحدودية

د(س) = −٣ س^{٤} + ٩ س^{٣} − ١١ س^{٢} − ١٢ س + ٢٠

فأوجد العامل الآخر .

٤ إذا كان ٢ س^{٣} − ٨ س^{٢} + س^{٢} − ٤ = (س^{٢} − ٤) ق (س) فأوجد ق (س) .

٥ أوجد ناتج وباقي قسمة د (س) على هـ (س) في كل مما يلي ثم استنتج فيما إذا كانت د (س) تقبل القسمة على هـ (س) أم لا .

أ د (س) = س^{٢} + ١ ، هـ (س) = س + ١

ب د (س) = س^{٢} + ١ ، هـ (س) = س + ٣

جـ د (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٣ س − ١٠ ، هـ (س) = س^{٢} − ٥

د د (س) = ٢ س^{٥} + ٦ س^{٣} − ٥ س^{٢} − ١٠ ، هـ (س) = ٢ س^{٢} − ٧

هـ د (س) = ٣ س^{٤} + ٢ س^{٣} + ٢ س − ٣ ، هـ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س − ٣

٦ منطقة مستطيلة مساحتها ع (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} + ٣ س^{٢} − ٥ س^{٢} − ٢ س وعرضها ع (س) = س^{٢} − ٢ س أوجد طولها ل (س) .

٧ منطقة مثلثة متطابقة الأضلاع مساحتها :

ع (س) = ٧ س^{٤} − س^{٣} + ١٤ س^{٢} − ٢ وارتفاعها هـ (س) = س^{٢} + ٢

أوجد محيط هذه المنطقة .

٨ إذا علمت أن ر(س) ≠ ٠ هي باقي قسمة الحدودية د (س) على الحدودية هـ(س) = س − ١ فما درجة الحدودية ر (س) ؟

١-٤ نظريتا الباقي والعامل

Factor and Remainder- Theorem

القسمة التركيبية : **Synthetic Division**

إذا قسمنا ق(س) = ٣ س^{٣} - ٤ س^{٢} - ٣ س - ٢ على س - ٣ بطريقة القسمة العادية :

٣س^{٢} + ٥س + ١٢

٣ س^{٣} - ٤ س^{٢} - ٣ س -٢ | س - ٣

٣ س^{٣} - ٩ س^{٢}

٥ س^{٢} - ٣ س - ٢

٥ س^{٢} - ١٥ س

١٢ س - ٢

١٢ س - ٣٦

٣٤

فيكون ناتج القسمة = ٣ س^{٢} + ٥ س + ١٢

وباقي القسمة = ٣٤

نستطيع إجراء عملية القسمة السابقة بطريقة أخرى كالآتي :

٣	٣	-٤	-٣	-٢
		٩	١٥	٣٦
	٣	٥	١٢	٣٤

وذلك باتباع الخطوات التالية :

- اكتب معاملات ق(س) بعد ترتيب حدودها تنازلياً حسب قوى س .
- اكتب ٣ على اليسار (لاحظ أن المقسوم عليه هو س - ٣) .
- انزل أول معامل في ق(س) وهو ٣
- اضرب ٣ × ٣ واكتب الناتج ٩ أسفل المعامل الثاني .
- اجمع لتحصل على ٥ .
- اضرب ٣ × ٥ واكتب الناتج ١٥ أسفل المعامل الثاني .

- اجمع لتحصل على ١٢

- اضرب ٣ × ١٢ واكتب الناتج ٣٦ أسفل المعامل الثالث .

- اجمع لتحصل على ٣٤

فيكون ناتج القسمة ٣ س^{٢} + ٥ س + ١٢ وباقي القسمة ٣٤

تسمى طريقة القسمة السابقة « القسمة التركيبية » . مع مراعاة أن تكون درجة المقسوم عليه من الدرجة الأولى معامل س = ١

في المثال السابق ، أوجد د (٣) . . ماذا تلاحظ ؟

مثال ١

اقسم د (س) = س^{٤} - ٢ س^{٣} - س^{٢} - ١٥ س + ٢ على س + ٢ مستخدماً طريقة القسمة التركيبية وعين ناتج وباقي القسمة .

الحل

١	-٢	-١	-١٥	+٢	-٢
	-٢	٨	-١٤	٥٨	
١	-٤	٧	-٢٩	٦٠	

∴ خارج القسمة = س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٧ س - ٢٩ وباقي القسمة = ٦٠

يمكن التحقق من صحة الناتج كالتالي :

اضرب س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٧ س - ٢٩ في س + ٢

ثم أضف ٦٠ إلى الناتج لتحصل على د (س)

في المثال السابق ، أوجد د (-٢) . . ماذا تلاحظ؟

مثال ٢

اقسم د (س) = ٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٤ س - ٢ على ٣ س + ١ مستخدماً طريقة القسمة التركيبية .

الحل

$$\frac{٣\,س^{٤} - ٢\,س^{٣} + ٥\,س^{٢} - ٤\,س - ٢}{٣\,س + ١} = \frac{س^{٣} - \frac{٢}{٣}\,س^{٢} + \frac{٥}{٣}\,س^{١} + \frac{٤}{٣}\,س - \frac{٢}{٣}}{س + \frac{١}{٣}}$$

	$١ - \frac{٢}{٣}$	$+ \frac{٥}{٣}$	$- \frac{٤}{٣}$	$- \frac{٢}{٣}$
$\frac{١}{٣}$	$- \frac{١}{٣}$	$- \frac{١}{٣}$	$+ \frac{٢}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$
	$١ - ١$	٢	$- ٢$	٠

∴ خارج القسمة = $س^{٣} - س^{٢} + ٢\,س - ٢$ وباقي القسمة صفر ■

مثال ٣

اقسم $د(س) = ٢\,س^{٤} - ٥\,س^{٣} + ٢\,س^{٢} - س + ١$ على $٢\,س - ١$ مستخدماً طريقة القسمة التركيبية .

الحل

$$\frac{٢\,س^{٤} - ٥\,س^{٣} + ٢\,س^{٢} - س + ١}{٢\,س - ١} = \frac{س^{٤} - \frac{٥}{٢}\,س^{٣} + س^{٢} - \frac{١}{٢}\,س + \frac{١}{٢}}{س - \frac{١}{٢}}$$

	١	$- \frac{٥}{٢}$	$+ ١$	$- \frac{١}{٢}$	$+ \frac{١}{٢}$
$\frac{١}{٢}$		$+ \frac{١}{٢}$	$- ١$	٠	$- \frac{١}{٤}$
	١	$- ٢$	٠	$- \frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

∴ خارج القسمة = $س^{٣} - ٢\,س^{٢} - \frac{١}{٢}$

نلاحظ أننا قسمنا المقسوم والمقسوم عليه على ٢ ، لذلك فإنَّ باقي القسمة الناتج من عملية القسمة التركيبية هو أيضاً مقسوم على ٢

∴ باقي القسمة = $٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ ■

تحقق من ذلك باستخدام القسمة العادية .

نظرية الباقي

باقي قسمة الحدودية د(س) على (س - أ) حيث أ ∈ ح يساوي د(أ)

البرهان :

نفرض أن ناتج قسمة د(س) على (س - أ) يساوي ق(س)

∴ د(س) = (س - أ) ق(س) + ر(س) ..... (١)

حيث ر(س) هو باقي القسمة .

وحيث إن المقسوم عليه (س - أ) من الدرجة الأولى .

∴ باقي القسمة ر(س) يكون من درجة صفر .

أي أن ر(س) حدودية ثابتة

∵ ر(س) = حـ ، حـ ∈ ح

بوضع س = أ في كل من طرفي المعادلة (١)

∴ د(أ) = صفر × ق(أ) + حـ

∴ حـ = د(أ)

أي أن باقي قسمة د(س) على س - أ هو د(أ)

ملاحظات :

١ باقي قسمة د(س) على س + ب هو د(- ب) ذلك لأن : س + ب = س - (- ب)

٢ باقي قسمة د(س) على أ س - ب ، أ ≠ ٠ هو د($\frac{ب}{أ}$) ،

ذلك لأن أ س - ب = أ (س - $\frac{ب}{أ}$)

مثال ٤

أوجد باقي قسمة د(س) = ٢ س^{٥} − ٣ س^{٤} + ٧ س − ١١ على س − ١ باستخدام القسمة ثم باستخدام نظرية الباقي وقارن بين الطريقتين .

الحل

أولاً : بطريقة القسمة : Division Method

١	١١−	٧	٠	٠	٣−	٢
	٦	١−	١−	١−	٢	
	٥−	٦	١−	١−	١−	٢

باقي القسمة = −٥

ثانياً : باستخدام نظرية الباقي : Remainder Theory

باقي القسمة : = د(١) = ٢ − ٣ + ٧ − ١١ = −٥

ويلاحظ أن الطريقة الثانية أسهل . ■

مثال ٥

أوجد باقي قسمة د(س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١٢ على كل من :

أ) س + ٢

ب) ٢ س + ٣

الحل

أ) باقي قسمة د(س) على س + ٢ هو د(−٢) = −٦٤ − ١٢ + ١٢ = −٦٤

ب) باقي قسمة د(س) على ٢ س + ٣ هو د(−$\frac{٣}{٢}$) = −$\frac{١٥٩}{١٦}$ ■

مثال ٦

أوجد باقي قسمة د(س) = س^{٣} + ٧ س^{٢} + ٢ س − ٤٠ على س − ٢ ، ماذا تلاحظ؟

الحل

باستخدام القسمة التركيبية :

٢	١	٧	٢	−٤٠
		٢	١٨	٤٠
	١	٩	٢٠	٠

خارج القسمة = س^{٢} + ٩ س + ٢٠

وباقي القسمة = ٠

باستخدام القسمة التركيبية :

خارج القسمة = س^{٢} + ٩ س + ٢٠

وباقي القسمة = ٠

وأيضاً باستخدام نظرية الباقي :

باقي القسمة = د (٢) = ٨ + ٢٨ + ٤ − ٤٠ = ٠

∴ د(س) = (س − ٢) (س^{٢} + ٩ س + ٢٠)

أي أن (س − ٢) عامل من عوامل د(س) . ■

المثال السابق يقودنا إلى التعميم التالي :

نظرية العامل

يكون (س − أ) عاملاً من عوامل د(س) إذا وفقط إذا كان د(أ) = صفراً ، حيث أ ∈ ح

التعبير «إذا وفقط إذا» الوارد في منطوق النظرية يعني أنه :

إذا كان د(أ) = صفراً فإن (س − أ) عامل من عوامل د(س) ، وإذا كان (س − أ) عاملاً من عوامل د(س) فإنّ د(أ) = ٠

«إذا وفقط إذا» يرمز له عادة بالرمز ⟷

مثال ٧

بدون إجراء عملية القسمة بين أن س − ٤ عامل من عوامل :

د(س) = س^{٤} + س^{٣} − ١٣ س^{٢} − ٢٥ س − ١٢

الحل

تطبيقاً لنظرية العامل ، يلزم تعيين د (٤)

ويكون س − ٤ عاملاً من عوامل د(س) إذا كان د(٤) = ٠

د(٤) = $٤^{٤}$ + $٤^{٣}$ − ١٣ × $٤^{٢}$ − ٢٥ × ٤ − ١٢ = صفراً

∴ (س − ٤) عامل من عوامل د(س) ■

مثال ٨

هل تقبل الحدودية د(س) = $س^{٤}$ − ٣ $س^{٣}$ + ٢ $س^{٢}$ − س − ١٥ القسمة على :

أ س − ٣ ؟ ب س + ٣ ؟

الحل

أ د(٣) = ٨١ − ٨١ + ١٨ − ٣ − ١٥ = ٠

∴ س − ٣ عامل من عوامل د(س) من نظرية العامل

∴ د(س) تقبل القسمة على س − ٣

ب د(−٣) = ٨١ + ٨١ + ١٨ + ٣ − ١٥ ≠ ٠

∴ س + ٣ ليس عاملاً من عوامل د(س) .

أي أن د(س) لا تقبل القسمة على س + ٣ ■

مثال ٩

لتكن د(س) = −٣ $س^{٢}$ + ب س + ٥ حيث ب ∈ ح أوجد قيمة ب التي تجعل د(س) تقبل القسمة على س − ١

الحل

د(س) تقبل القسمة على س − ١ إذا كان د(١) = صفراً

د(١) = −٣ + ب + ٥ = صفراً

∴ ب = −٢ ■

١-٤ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة

١ إذا كانت (س + ١) عامل من عوامل الحدودية هـ(س) = ٥ س^{٢} + م س + ٢ فإن م =

(أ) -٧ (ب) -٣ (ج) ٣ (د) ٧

٢ إذا كان باقي قسمة الحدودية د(س) = س^{٢} - ٤ س + حـ على (س - ١) يساوي ٣ فإن حـ =

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) صفر (د) -٦

٣ الحدودية التي تقبل القسمة على س (س - ١) هي د(س) =

(أ) س^{٢} + س (ب) س^{٢} - ١ (ج) س^{٢} + س (د) س^{٢} - س

٤ إذا كانت د(س) حدودية فإن باقي قسمة د(س) على (٢ س - ١) يساوي

(أ) د(١) (ب) د(-١) (ج) د($\frac{١}{٢}$) (د) د(-$\frac{١}{٢}$)

أسئلة مقالية

١ بطريقتين مختلفتين بين أن د(س) تقبل القسمة على هـ(س) فيما يلي :

أ د(س) = س^{٢} - ٤ س + ٤ ، هـ(س) = س - ٢

ب د(س) = ٢ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ٩ ، هـ(س) = س + ٣

ج د(س) = ٣ س^{٣} - ٤ س^{٢} - س + ٢ ، هـ(س) = ٣ س + ٢

٢ بطريقتين مختلفتين أوجد باقي قسمة د(س) على هـ(س) فيما يلي :

أ د(س) = س^{٢} + ٥ س - ٣ ، هـ(س) = س - ٣

ب د(س) = ٢ س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = س + ٢

ج د(س) = -٥ س^{٢} + ٢ س + ٧ ، هـ(س) = ٢ س - ٢

٣ أوجد قيمة أ التي تجعل س + ٢ عاملاً من عوامل الحدودية :

د(س) = س^{٣} + ٨ س^{٢} + أ س + ٤

ثم أوجد العامل الآخر .

٤ أوجد قيمة ب التي تجعل باقي قسمة الحدودية :

د(س) = ب س^{٢} - (ب + ١) س + ٣ على س - ٢ هو ٩

٥ أوجد قيمة حـ التي تجعل باقي قسمة الحدودية :

د(س) = س^{٣} + ٤ س^{٢} - حـ س + ١ على (س + ١) هو ٣

١ – ٥

أصفار الحدودية Polynomial Zeros

علمنا في السابق أنه بالتعويض عن س بعدد حقيقي في الحدودية د (س) نحصل على قيمة حقيقة مناظرة ، فمثلاً ، بوضع س = أ في الحدودية د (س) نحصل على القيمة د (أ)

ماذا لو كان د (أ) = صفراً ؟

قيم س التي تجعل د (س) = صفراً تسمى أصفار الحدودية د (س)

مثلاً ، لو اعتبرنا : د (س) = س^{٢} – ٥ س + ٦

د (٢) = ٤ – ١٠ + ٦ = صفراً

∴ ٢ صفر من أصفار الحدودية ،

د (٣) = ٩ – ١٥ + ٦ = صفراً

∴ ٣ صفر آخر للحدودية .

ويلاحظ أيضاً أن ٢ ، ٣ هما جذرا المعادلة : د (س) = صفراً .

وعموماً :

أصفار الحدودية د (س) هي جذور المعادلة د (س) = ٠

مثال ١

إذا علمت أن ٢ صفر من أصفار الحدودية :

د (س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٩ س + ١٨ فأوجد باقي الأصفار .

الحل

٢ صفر للحدودية د (س)

∴ د (٢) = صفراً .

∴ (س – ٢) عامل من عوامل د (س) لماذا ؟

ولإيجاد العامل الآخر ، سنستخدم القسمة التركيبية :

٢	١	٢-	٩-	١٨
		٢	٠	١٨-
	١	٠	٩-	٠

العامل الآخر : = س^{٢} − ٩

∴ د(س) = (س − ٢) (س^{٢} − ٩)

= (س − ٢) (س − ٣) (س + ٣)

ومن الواضح أن د(٣) = د(−٣) = صفراً

∴ ٣ ، −٣ صفران آخران للحدودية .

مثال ٢

إذا علمت أن ١ ، −٢ صفران للحدودية :

د(س) = س^{٤} − ٧ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣١ س − ٣٠

فعين باقي الأصفار ومن ثم حل المعادلة :

س^{٤} − ٧ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٣١ س − ٣٠ = ٠

الحل

د(١) = صفراً (لماذا؟)

∴ (س − ١) عامل (لماذا؟)

د(−٢) = صفراً

∴ (س + ٢) عامل

∴ د(س) = (س − ١) (س + ٢) . ق(س)

ولتعيين ق(س)

نجري القسمة التركيبية على س − ١

١	١	−٧	٥	٣١	−٣٠
		١	−٦	−١	٣٠
	١	−٦	−١	٣٠	٠

ثم نقسم الناتج على س + ٢

فيكون ناتج القسمة :

ق(س) = س^{٢} − ٨ س + ١٥

= (س − ٣) (س − ٥) (بالتحليل)

−٢	١	−٦	−١	٣٠	
		−٢	١٦	−٣٠	
	١	−٨	١٥	٠	

∴ د(س) = (س − ١) (س + ٢) (س − ٣) (س − ٥)

وواضح أن د(٣) = ٠ ، د(٥) = ٠

∴ ٣ ، ٥ صفران آخران للحدودية .

ومجموعة حل المعادلة :

$س^{١} - ٧س^{٢} + ٥س^{٣} + ٣١س - ٣٠ = ٠$

هي : {١ ، -٢ ، ٣ ، ٥}

لاحظ أن ١ ، -٢ ، ٣ ، ٥ هي عوامل للعدد (-٣٠) ■

نظرية

إذا كانت الحدودية $د(س) = س^{ن} + أ_{١} س^{ن-١} + \ldots + أ_{ن}$

فإن كل صفر من أصفارها الصحيحة هو عامل من عوامل حدها المطلق $أ_{ن}$

ملاحظة :

النظرية السابقة اقتصرت على أن معامل $س^{ن}$ هو الوحدة .

مثال ٣

عين أصفار الحدودية :

$د(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧س + ١٠$

ومن ثم عين جذور المعادلة :

$س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧س + ١٠ =$ صفراً

الحل

جرّب س = ١ (أحد عوامل العدد ١٠)

$د(١) = ١ - ٤ - ٧ + ١٠ =$ صفراً

∴ ١ صفر للحدودية .

∴ س - ١ عامل من عوامل الحدودية .

وبالقسمة التركيبية لعين العامل الآخر .

١	١	-٤	-٧	١٠
	١	-٣	-١٠	
	١	-٣	-١٠	٠

∴ $د(س) = (س - ١)(س^{٢} - ٣س - ١٠)$

$= (س - ١)(س - ٥)(س + ٢)$

∴ أصفار الحدودية هي ١ ، ٥ ، -٢

(لاحظ أن ١ ، ٥ ، -٢ عوامل للعدد ١٠)

∴ جذور المعادلة $د(س) = ٠$ هي ١ ، ٥ ، -٢ ■

١ – ٥ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة

١ إذا كان باقي قسمة ق (س) = ٣ س^{٢} + ب س على (س – ١) يساوي ٥ فإن ب =

(أ) –٨ (ب) –٢ (ج) ٢ (د) ٨

٢ الحدودية هـ (س) = س^{٢} – ٤ عامل من عوامل الحدودية د (س)=

(أ) س^{٤} – ٣ س^{٢} – ٤ (ب) س^{٤} – ٣ س – ٤ (ج) س^{٢} – ٣ س – ٤ (د) س^{٤} + ٢

٣ مجموعة حل المعادلة س^{٣} – س^{٢} – ٦ س = ٠ هي

(أ) { ٠ ، – ٣ ، ٢ } (ب) { ٠ ، ٣ ، – ٢ } (ج) { – ٣ ، ٢ } (د) { – ٢ ، ٣ }

٤ عدد الأصفار الحقيقية المختلفة للحدودية د (س) = (س + ٣)^{٢} (س^{٢} – ٤) هي

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

أسئلة مقالية

١ أوجد أصفار كل من الحدوديات التالية :

أ س^{٢} + ٥ س – ٦ ب ٢ س^{٢} + ٥ س – ٣

ج ٢ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٢ س د (س + ٢) (س – ٣) (س^{٢} – ٢٥)

٢ إذا علمت أن ٧ صفر للحدودية :

د (س) = س^{٣} – ٦ س^{٢} – ١٣ س + ٤٢ فأوجد باقي الأصفار .

٣ إذا علمت أن –٤ صفراً للحدودية :

د (س) = س^{٣} + ١٠ س^{٢} + ٢٩ س + ٢٠ فأوجد باقي الأصفار ،

ثم عين مجموعة حل المعادلة د (س) = صفراً

٤ إذا علمت أن ١ ، –١ صفران للحدودية د (س) = س^{٤} –٣ س^{٢} + ٢ فأوجد باقي الأصفار ، وعين جذور المعادلة د (س) = ٠

٥ حل المعادلة : ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٨ س + ٣ = ٠

٦ حل المعادلة : س^{٤} + س^{٣} – ١٣ س^{٢} – ٢٥ س – ١٢ = ٠

١ – ٦

إشارة الحدودية

Polynomials Sing

١ – ٦ أ إشارة الحدودية

د(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + . . . + أ$_{١}$ س + أ$_{٠}$

نعلم أن د(س) = ٠ إذا كانت س = أ حيث أ صفر من أصفار الحدودية د(س) .

متى تكون د(س) > ٠ ؟ ومتى تكون د(س) < ٠ ؟

هذا ما سنوضحه من خلال الأمثلة الآتية :

مثال ١

ادرس إشارة الحدودية د(س) = ٢ س – ٦

الحل

٢س – ٦ = ٠ عندما س = ٣ (لماذا ؟)

متى تكون الحدودية : د(س) = ٢ س – ٦ > ٠ ؟

٢س – ٦ > ٠ ∴ ٢ س > ٦

∴ س > ٣

أي أن الحدودية د(س) = ٢س – ٦ تكون موجبة إذا وفقط إذا كانت س ∈ (٣ ، ∞)

ومتى تكون الحدودية : د(س) = ٢ س – ٦ < ٠ ؟

٢س – ٦ < ٠ ∴ ٢ س < ٦

∴ س < ٣

∴ الحدودية د(س) = ٢ س – ٦ تكون سالبة إذا وفقط إذا كانت س ∈ (–∞ ، ٣) ■

لاحظ في المثال السابق أن صفرالحدودية الوحيد هو ٣ جزأ ح إلى (–∞ ، ٣) ، {٣} ، (٣ ، ∞) ، وإن إشارة الحدودية ثابتة لا تتغير في أي من الفترتين (–∞ ، ٣) ، (٣ ، ∞)

مثال ٢

ادرس إشارة الحدودية د(س) = س^{٢} − ١

الحل

د(س) = س^{٢} − ١ = (س − ١) (س + ١)

∴ ١ ، −١ هما أصفار الحدودية .

سندرس إشارة الحدودية في الفترات

(−∞ ، −١) ، (−١ ، ١) ، (١ ، ∞)

د(س) = س^{٢} − ١ > ٠ لجميع قيم س ∈ (−∞ ، −١) لماذا ؟

د(س) = س^{٢} − ١ < ٠ لجميع قيم س ∈ (−١ ، ١) لماذا ؟

د(س) = س^{٢} − ١ > ٠ لجميع قيم س ∈ (١ ، ∞) لماذا ؟

تعميم

إشارة الحدودية د (س) تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (أ ، ب) إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية د (س) .

ولتعيين إشارة الحدودية في هذه الفترة ، نعوض عن س بأية قيمة ح ∈ (أ ، ب)

مثال ٣

ادرس إشارة الحدودية د(س) = ٢ س^{٢} + س − ١

الحل

د(س) = ٢ س^{٢} + س − ١

= (٢ س − ١) (س + ١)

صفرا الحدودية هما $\frac{١}{٢}$ ، −١

ولدراسة إشارة الحدودية نتبع الخطوات التالية :

- نختار س ∈ (−∞ ، −١) ولتكن س = −٢ ⟸ د(−٢) = ٥ > ٠
- نختار س ∈ (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ولتكن س = ٠ ⟸ د(٠) = −١ < ٠
- نختار س ∈ ($\frac{١}{٢}$ ، ∞) ولتكن س = ١ ⟸ د(١) = ٢ > ٠

والجدول الآتي يوضح إشارة الحدودية :

الفترة	(−∞ ، −١)	(−١ ، $\frac{١}{٢}$)	($\frac{١}{٢}$ ، ∞)
إشارة الحدودية	+	−	+

∴ إشارة الحدودية : موجبة في كل من (−∞ ، −١) ، ($\frac{١}{٢}$ ، ∞) وسالبة في (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ■

ملاحظات :

١ إذا كانت د(س) = هـ(س) . ق(س) فإن إشارة د(س) في أي فترة (أ ، ب) تنتج من ضرب إشارة هـ(س) في إشارة ق(س) في الفترة ذاتها .

٢ إذا لم يكن للحدودية د(س) أصفار حقيقية فإن إشارة الحدودية تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (−∞ ، ∞) ويمكن تحديد الإشارة بالتعويض عن س في الحدودية بأية قيمة حقيقية ولتكن س = صفراً وتعيين إشارة الناتج .

٣ من الملاحظة (٢) يتضح أنه إذا لم يكن للحدودية د(س) أصفار حقيقية فإن إشارتها تكون مثل إشارة أ$_{ن}$ معامل س^{ن} (أو مثل إشارة الحد المطلق) .

مثال ٤

ادرس إشارة كلٍّ من الحدوديات الآتية :

أ د(س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − س − ٣

ب د(س) = −٢ س^{٢} + ٣ س − ٣

جـ د(س) = س^{٣} + س^{٢} + ٢ س + ٢

الحل

أ د(س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − س − ٣

= (س^{٣} + ٣ س^{٢}) + (− س − ٣)

= س^{٢} (س + ٣) − (س + ٣)

= (س + ٣) (س^{٢} − ١) (بالتحليل)

= (س + ٣) (س + ١) (س − ١)

∴ أصفار الحدودية هي −٣ ، −١ ، ١

ولدراسة إشارة الحدودية نتبع الخطوات التالية :

- نختار س ∈ (-∞ ، -٣) ولتكن س = -٤ ⟸ د(-٤) = -١٥ < ٠
- نختار س ∈ (-٣ ، -١) ولتكن س = -٢ ⟸ د(-٢) = ٣ < ٠
- نختار س ∈ (-١ ، ١) ولتكن س = ٠ ⟸ د(٠) = -٣ < ٠
- نختار س ∈ (١ ، ∞) ولتكن س = ٢ ⟸ د(٢) = ١٥ < ٠

والجدول الآتي يوضح إشارة الحدودية :

الفترة	(-∞ ، -٣)	(-٣ ، -١)	(-١ ، ١)	(١ ، ∞)
إشارة الحدودية	-	+	-	+

حل آخر :

يمكن تحديد إشارة د(س) من خلال تحديد إشارة كل من عواملها :

(س + ٣) ، (س + ١) ، (س - ١) ثم تحديد إشارة حاصل ضربها :

الفترة	(-∞ ، -٣)	(-٣ ، -١)	(-١ ، ١)	(١ ، ∞)
إشارة س + ٣	-	+	+	+
إشارة س + ١	-	-	+	+
إشارة س - ١	-	-	-	+
إشارة الحدودية	-	+	-	+

∴ إشارة الحدودية : موجبه في كل من (-٣ ، -١) ، (١ ، ∞)

وسالبة في كل من (-∞ ، -٣) ، (-١ ، ١)

ونحصل على نفس النتيجة السابقة

ب د(س) = -٢ س^{٢} + ٣ س - ٣ غير قابلة للتحليل

المميز = ب^{٢} - ٤ أ جـ = -١٥ < ٠

∴ لا تتعين جذور حقيقية للمعادلة -٢ س^{٢} + ٣ س - ٣ = ٠

∴ لا تتعين أصفار حقيقية للحدودية د(س) = -٢ س^{٢} + ٣ س - ٣

∴ إشارة الحدودية مثل إشارة الحد المطلق .

أي أن د(س) سالبة لكل س ∈ ح

جـ $د(س) = س^٣ + س^٢ + ٢س + ٢ = (س^٣ + س^٢) + (٢س + ٢)$

$= س^٢ (س + ١) + ٢ (س + ١)$

$= (س + ١) (س^٢ + ٢)$

الحدودية $س^٢ + ٢$ موجبة لكل $س \in ع$ (لماذا ؟)

ويوضح الجدول الآتي إشارة الحدودية المعطاة :

الفترة	$(-\infty ، -١)$	$(-١ ، \infty)$
إشارة $س + ١$	−	+
إشارة $س^٢ + ٢$	+	+
إشارة الحدودية	−	+

∴ إشارة الحدودية : موجبة في $(-١ ، \infty)$ وسالبة في $(-\infty ، -١)$ ■

مثال ٥

أوجد مجموعة حل المتباينة :

$س^٣ + ٣س^٢ - س > ٣$

الحل

$س^٣ + ٣س^٢ - س > ٣$

∴ $س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣ > ٠$

والمطلوب هو تحديد متى تكون الحدودية :

$د(س) = س^٣ + ٣س^٢ - س - ٣ > ٠$

من المثال السابق الجزء (أ) تبين أن هذه الحدودية تكون موجبة في الفترتين

$(-٣ ، -١) ، (١ ، \infty)$

∴ مجموعة حل المتباينة المعطاة هي :

$(-٣ ، -١) \cup (١ ، \infty)$ ■

١-٦ م

تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة :

١ مجموعة حل المتباينة $(س - ٢)^٢ > ٠$ هي

(أ) ح (ب) ح / {٢} (جـ) {٢} (د) ϕ

٢ مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ٤ \leqslant ٠$ هي

(أ) ح (ب) ح / (-٢ ، ٢) (جـ) [-٢ ، ٢] (د) ϕ

٣ إذا كانت إشارة د(س) سالبة لكل س ∈ ح فإن د(س) يمكن أن تساوي

(أ) $(٢ - س^٢)$ (ب) $٦ - ٥ س + س^٢$ (جـ) $س + س^٢ - ١$ (د) $١ - ٢ س - س^٢$

٤ إذا كانت $د(س) = (س^٢ + ١)(س - ١)^٢$ فإن د(س) موجبة في

(أ) (-∞ ، ∞) (ب) (١ ، ∞) (جـ) (-∞ ، ١) (د) (-١ ، ∞)

بنود مقالية

أولاً : ادرس إشارة كل من الحدوديات التالية :

١ $د(س) = (س - ٢)^٢$

٢ $د(س) = ٢ س^٢ - ٢ س - ١٢$

٣ $د(س) = س^٣ - ٤ س^٢ - س + ٤$

٤ $د(س) = س^٢ + ٢ س + ٣$

٥ $د(س) = ٥ س^٣ - ٥ س^٢ + س - ١$

ثانياً : أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ $س^٢ > ٤$

٢ $س^٢ \leqslant ٩$

٣ $س^٢ - ٣ س - ٤ \geqslant ٠$

٤ $س^٢ - ٢ س > ٣$

٥ $س^٢ - ٤ س > -٣$

٦ $س^٢ (س - ٣) > س - ٣$

١ - ٦ ب إشارة الحدودية النسبية د (س) = $\frac{\text{ق (س)}}{\text{ر (س)}}$

بديهي أن إشارة الحدودية د (س) تعتمد على إشارة البسط ق(س) وإشارة المقام ر(س) والأمثلة الآتية توضح ذلك .

مثال ١

ادرس إشارة الحدودية النسبية د(س) = $\frac{\text{س + ٣}}{\text{٢ - س}}$ ، س ≠ ٢

الحل

- ٣ هو صفر حدودية البسط ،

٢ هو صفر حدودية المقام

∴ يلزم دراسة إشارة الحدودية النسبية في الفترات

(- ∞ ، - ٣) ، (-٣ ، ٢) ، (٢ ، ∞) وذلك كما في الجدول التالي :

الفترة	(- ∞ ، -٣)	(-٣ ، ٢)	(٢ ، ∞)
إشارة س + ٣	-	+	+
إشارة ٢ - س	+	+	-
إشارة الحدودية النسبية	-	+	-

∴ إشارة الحدودية النسبية : موجبة في (-٣ ، ٢)

وسالبة في كل من (- ∞ ، -٣) ، (٢ ، ∞)

مثال ٢

ادرس إشارة الحدودية النسبية د(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{٤س + ٣}}{\text{س}^{٢} - \text{١}}$ ، س ≠ ± ١

الحل

س^{٢} - ٤ س + ٣ = (س - ١) (س - ٣)

∴ ١ ، ٣ هما صفرا حدودية البسط

، س^{٢} - ١ = (س - ١) (س + ١)

∴ ١ ، -١ هما صفرا حدودية المقام .

∴ يلزم دراسة إشارة الحدودية النسبية في الفترات :

(- ∞ ، -١) ، (-١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ∞)

وذلك كما في الجدول التالي :

الفترة	(−∞ ، −١)	(−١ ، ١)	(١ ، ٣)	(٣ ، ∞)
إشارة البسط	+	+	−	+
إشارة المقام	+	−	+	+
إشارة الحدودية النسبية	+	−	−	+

∴ إشارة الحدودية النسبية : موجبه في كل من (−∞ ، −١) ، (٣ ، ∞)

وسالبة في كل من (−١ ، ١) ، (١ ، ٣) ■

مثال ٣

أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{٥ \text{ س}}{\text{س} - ٤} > ٦$

الحل

$\frac{٥ \text{ س}}{\text{س} - ٤} > ٦$ ∴ $\frac{٥ \text{ س}}{\text{س} - ٤} - ٦ > ٠$

∴ $\frac{-\text{س} + ٢٤}{\text{س} - ٤} > ٠$

∴ مجموعة حل المتباينة هي الفترة التي تكون فيها الحدودية النسبية $\frac{-\text{س} + ٢٤}{\text{س} - ٤}$ موجبة .

لنبحث إشارة الحدودية النسبية $\frac{-\text{س} + ٢٤}{\text{س} - ٤}$

٢٤ هو صفر حدودية البسط ،

٤ هو صفر حدودية المقام .

والجدول الآتي يوضح إشارة هذه الحدودية :

الفترة	(−∞ ، ٤)	(٤ ، ٢٤)	(٢٤ ، ∞)
إشارة −س + ٢٤	+	+	−
إشارة س − ٤	−	+	+
إشارة الحدودية النسبية	−	+	−

أي مجموعة حل المتباينة هي (٤ ، ٢٤) ■

١-٦ ب تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ إشارة الحدودية النسبية $ق(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س^٢ + ٤}$ موجبة لكل $س \in (١ ، ٤)$.

٢ مجموعة حل المتباينة $\frac{٨}{س} \geq ١$ هي $(٠ ، ٨]$.

٣ مجموعة حل المتباينة $\frac{س^٢ + ٥}{١ - س} < ٠$ هي $(١ ، \infty)$.

٤ الحدودية النسبية $د(س) = \frac{-١}{س^٢}$ سالبة لكل $س \in ح$

بنود مقالية

أولاً : ادرس إشارة كل من الحدوديات النسبية التالية حيث المقام $\neq ٠$

١ $د(س) = \frac{٥ - س}{س - ١}$

٢ $د(س) = \frac{٢س + ٤}{س}$

٣ $د(س) = \frac{(س - ١)(س - ٣)}{س + ٢}$

٤ $د(س) = \frac{٢س + ٦}{٤س^٢ - ٨س}$

٥ $د(س) = \frac{٢س^٢ - ٤س - ٦}{س^٣ + ٤س^٢ + ٤س}$

٦ $د(س) = \frac{٣س^٢ - ٧س + ٤}{س^٢ - ٢س + ٣}$

ثانياً : أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية :

١ $\frac{٣س - ٦}{س + ١} \geq ٠$

٢ $\frac{٢س^٢ - ١٠}{س - ١} < ٤$

٣ $\frac{س^٢}{س - ٣} < \frac{١}{س - ٣}$

٤ $\frac{٤٥}{س - ٧} > -(س + ٧)$

٥ $\frac{س^٢ - ٣}{س - ١} < ٠$

٦ $\frac{س^٢ - ١}{س - ٢} \geq ٠$

١-٧ ملخص وتمارين عامة

Summary

★ الصورة العامة للحدودية من الدرجة ن في المتغير س هي :

$$د(س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + \ldots + أ_١ س + أ_٠ \text{ حيث :}$$

$أ_ن ، أ_{ن-١} ، \ldots ، أ_١ ، أ_٠ \in ع$ ، $أ_ن \neq ٠$ ، ن عدد صحيح غير سالب ،

$أ_ن$ يسمى المعامل الرئيسي ، $أ_٠$ يسمى الحد الثابت (الحد المطلق) .

★ $د(س) = جـ$ ، $جـ \in ع$ حدودية من درجة صفر ، وتعرف بالحدودية الثابتة .

★ $د(س) = ٠$ ، حالة خاصة من الحدودية الثابتة ، وتعرف بالحدودية الصفرية .

★ تتساوى الحدوديتان فقط إذا تساوت درجتاهما وتساوت معاملاتهما المتناظرة .

★ درجة الحدودية $ك\ د(س)$ ، $ك \in ع^*$ هي درجة الحدودية $د(س)$.

★ درجة الحدودية $د(س) \pm هـ(س)$ لا يمكن أن تزيد عن درجة $د(س)$ أو $هـ(س)$.

★ درجة الحدودية $د(س) \cdot هـ(س)$ تساوي مجموع درجتي الحدوديتين $د(س)$ ، $هـ(س)$.

★ $د(س)$ تقبل القسمة على $هـ(س) \neq ٠$ إذا وجدت حدودية $ق(س)$ بحيث يكون $د(س) = هـ(س)\ ق(س)$

★ إذا كانت $د(س)$ ، $هـ(س)$ حدوديتين اختياريتين ، $هـ(س) \neq ٠$ فإنه يتعين إيجاد حدوديتين

$ق(س)$ ، $ر(س)$ بحيث يكون :

$$د(س) = هـ(س) \cdot ق(س) + ر(س)$$

حيث $ر(س) = ٠$ أو درجة $ر(س)$ أصغر من درجة $هـ(س)$

★ باقي قسمة الحدودية د(س) على (س - أ) حيث أ ∈ ح يساوي د(أ)

★ يكون (س - أ) عاملاً من عوامل د(س) إذا وفقط إذا كان د(أ) = صفر حيث أ ∈ ح

★ قيم س التي تجعل د(س) = ٠ تسمى أصفار الحدودية د(س)

★ أصفار الحدودية د(س) هي جذور المعادلة د(س) = ٠

★ إشارة الحدودية د(س) تكون ثابتة لا تتغير في الفترة (أ ، ب) إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية د(س) .

★ إشارة د(س) = هـ(س) . ق(س) في فترة ما (أ ، ب) تنتج من ضرب إشارة هـ(س) في إشارة ق(س) في ذات الفترة (أ ، ب)

★ إذا لم يكن للحدودية د(س) أصفار حقيقية فإنّ إشارة د(س) تتبع إشارة الحد الثابت « الحد المطلق » .

★ إشارة الحدودية النسبية د(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ر(س)}}$ تنتج من قسمة إشارة هـ(س) على إشارة ر(س) ، حيث ر(س) ≠ ٠

١-٧ تمارين عامة

بنود موضوعية

أولاً : ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ إذا كانت د(س) حدودية فإن د(٢س) = ٢ د(س) .

٢ إذا كانت هـ(س) = (س^{٢} + ١)^{٢} (س − ١) × ق(س) وكانت هـ(س) من الدرجة السابعة فإن ق(س) من الدرجة الأولى .

٣ إذا كان كل من د(س) ، هـ(س) حدودية من الدرجة الرابعة ، د(س) ≠ هـ(س) فإن [د(س) + هـ(س)] يمكن أن تكون من الدرجة الصفرية .

٤ إذا كانت مجموعة أصفار الحدودية د(س) هي { −٥ ، −١ ، ٣ } فإن د(س) حدودية من الدرجة الثالثة .

٥ باقي قسمة هـ(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣ على (١ + ٢س) هو هـ(− $\frac{١}{٢}$)

٦ مجموعة حل المتباينة (س − ٤)^{٢} > ٠ هي [٤ ، ∞) .

٧ عدد أصفار الحدودية د(س) = (س^{٢} − ١) (س^{٢} + ١) (س − ١) هو ٦ .

ثانياً : في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة :

إذا كانت د(س) حدودية من الدرجة السادسة ، هـ(س) حدودية من الدرجة الثانية وكانت د(س) تقبل القسمة على هـ(س) فإن درجة الحدودية :

القائمة (١)	القائمة (٢)
١ هـ(س) − د(س) هي	أ الثالثة
٢ هـ(س) × د(س) هي	ب الرابعة
٣ $\frac{\text{د(س)}}{\text{هـ(س)}}$ هي	جـ السادسة
	د الثامنة
	هـ الثانية عشر

مجموعة حل المتباينة :

القائمة (١)	القائمة (٢)
٤ $\text{س}^2 + \text{س}^4 > 0$ هي	أ ح
٥ $\text{س}^2 + \text{س} + 1 > 0$ هي	ب ح*
٦ $-\text{س}^4 + \text{س}^2 - 1 \geq 0$ هي	جـ ح+
	د {٠}
	هـ ϕ

أسئلة مقالية

١ أوجد قيمة كل من ب ، جـ ، ء التي تجعل د(س) = هـ(س) حيث

د(س) = (ب + جـ) س^2 + ٣ س + ٥ ،

هـ(س) = ٣ س^2 + ء س + جـ

٢ إذا كانت د(س) = ٤ س^{٣} + ٥ س + ١ ،

هـ(س) = −٤س^{٢} + س^{٢} + ٣ ،

ر(س) = $\frac{٥}{٣}$ س + ١ فأوجد :

أ [د(س) + هـ(س)] − ر(س)

ب ر(س) [٥ د(س) − ١٠ هـ(س)]

جـ درجة كل من الحدوديتين الناتجتين في (أ) ، (ب) والمعامل الرئيسي لكل منهما .

٣ منطقة على شكل مثلث طول قاعدته (٢س^{٢} + ٤) سم وارتفاعه (٤س^{٢} + ٢ س + ٦) سم .
أوجد مساحتها .

٤ اكتب د(س) على الصورة :

د(س) = هـ(س) . ق(س) + ر(س)

في كل مما يلي :

أ د(س) = س^{٤} − ٢ س^{٢} + ٢ ، هـ(س) = ٣ س − ٦

ب د(س) = ٣ س^{٢} + س − ٥ ، هـ(س) = س + ١

جـ د(س) = ٢ س^{٣} + س^{٢} − ٤ ، هـ(س) = ٢ س^{٢} + ٣

٥ حدد ما إذا كان أ صفراً من أصفار الحدودية المعطاة في كل مما يلي :

أ د(س) = ٢ س^{٤} − ٤ س^{٣} + ٢ س − ٤ ، أ = ٢

ب د(س) = ٣ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ ، أ = ١

جـ د(س) = س^{٣} + ١ ، أ = −١

د د(س) = س^{٤} − ٢ ، أ = −$\sqrt{٢}$

٦ أوجد قيمة كل من جـ ، د التي تجعل د(س) تقبل القسمة على هـ(س) في كل مما يلي :

أ د(س) = ٢ س^{٣} + س^{٢} − ٢ د س + جـ ، هـ(س) = س^{٢} − ١

ب د(س) = س^{٤} + جـ س + د ، هـ(س) = س (س − ٢)

٧ أوجد أصفار كل من الحدوديات التالية :

أ د(س) = س^{٢} + س − ٦

ب د(س) = ٦س^{٢} − س − ١

جـ د(س) = س^{٣} + ٥ س^{٢} − س − ٥

د د(س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − س + ٢

هـ د(س) = س^{٣} + ٦ س^{٢} + ١١ س + ٦

٨ ادرس إشارة كل من الحدوديات التالية :

أ د(س) = ٢ س^{٢} − ٢ س − ٤

ب د(س) = ٢ س^{٢} + ٤

جـ د(س) = (س^{٢} − ١) (س^{٢} + ١)

٩ ادرس إشارة كل من الحدوديات النسبية التالية :

أ د(س) = $\frac{٣ س + ١٢}{س^{٢} - ٤ س + ٣}$

ب د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{٢س + ٢}$

جـ د(س) = $\frac{٢س^{٢} - ٨ س + ٦}{س^{٢} + ٤ س}$

١٠ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

أ س^{٣} + س^{٢} − ٤ س − ٤ = ٠

ب س^{٤} − س^{٣} − ٣ س^{٢} + س + ٢ = ٠

١١ خزان على شكل شبه مكعب حجمه (٢س^{٣} + ٢٩ س + ١٤) متراً مكعباً وارتفاعه (٢س + ١) متراً أوجد قيمة س التي تجعل مساحة أرضية الخزان تساوي ٢٠ متراً مربعاً .

الفصل الثاني

الهندسة الإحداثية
Coordinate Geometry

٢-١

نقطة تقسيم قطعة مستقيمة

Dividing Point of Straight Segment

تعلم أن نقطة تنصيف القطعة المستقيمة أب حيث أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، ب (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) هي النقطة :

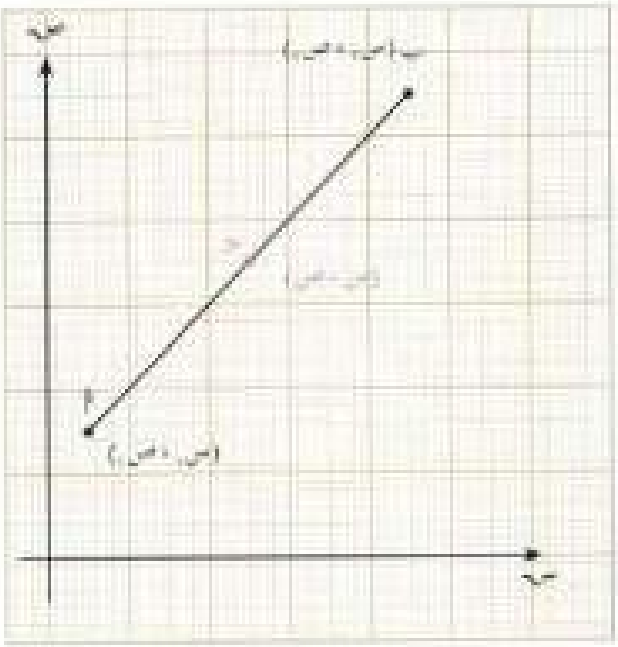
$$\left(\frac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}\right) \quad (١)$$

انظر الشكل (٢ - ١) .

ماذا لو كانت النقطة حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة معينة ل$_{١}$: ل$_{٢}$ من جهة أ ؟

نرسم كلاً من $\overline{\text{أ ى}}$ ، $\overline{\text{حـ ط}}$ ، $\overline{\text{ب ج}}$ توازي المحور الصادي (Y-Axis)

ونرسم كلاً من $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{أ و}}$ توازي المحور السيني (X-Axis) كما في شكل (٢ - ٢)



شكل (٢-١)

واضح أن :

و أ = ط ى

= ط و - ى و

= س - س$_{١}$ (لماذا ؟)

، هـ حـ = ج ط

= ج و - ط و

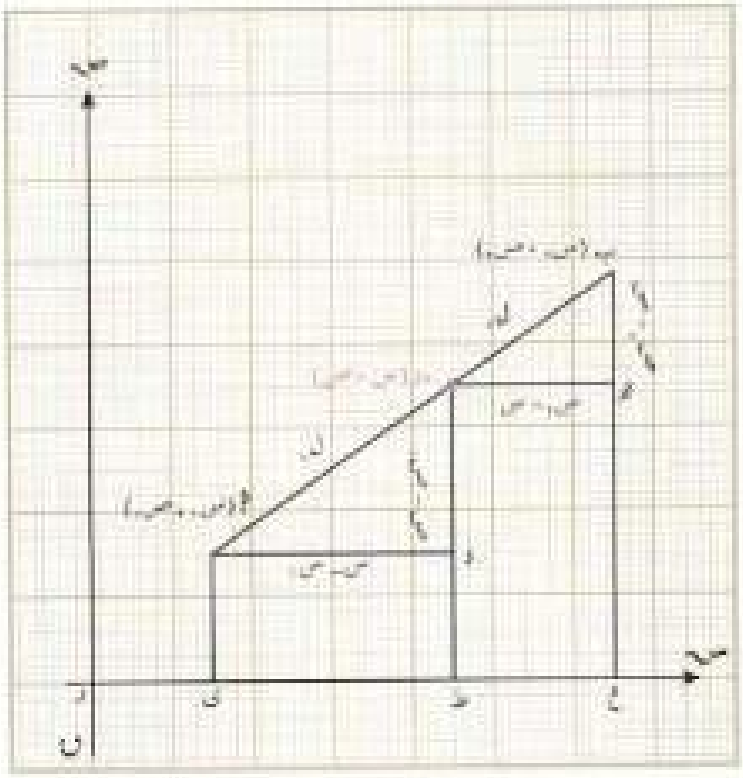
= س$_{٢}$ - س

كذلك ، حـ و = حـ ط - و ط

= ص - ص$_{١}$

، ب هـ = ب ج - هـ ج

= ص$_{٢}$ - ص



شكل (٢-٢)

ولكن المثلثين حـ و أ ، ب هـ حـ متشابهان (لماذا ؟)

$$\therefore \frac{\text{حـ و}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{و أ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ص}_2 - \text{ص}} = \frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{س}_2 - \text{س}} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$$

بأخذ $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{س}_2 - \text{س}} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$

$\therefore$ ل$_2$ (س − س$_1$) = ل$_1$ (س$_2$ − س)

$\therefore$ س(ل$_1$ + ل$_2$) = س$_2$ ل$_1$ + س$_1$ ل$_2$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{س}_2 \text{ل}_1 + \text{س}_1 \text{ل}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

وبأخذ $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ص}_2 - \text{ص}} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2}$ نحصل على

$$\text{ص} = \frac{\text{ص}_2 \text{ل}_1 + \text{ص}_1 \text{ل}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}$$

$\therefore$ **نقطة التقسيم هي** $\left(\frac{\text{س}_2 \text{ل}_1 + \text{س}_1 \text{ل}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} ، \frac{\text{ص}_2 \text{ل}_1 + \text{ص}_1 \text{ل}_2}{\text{ل}_1 + \text{ل}_2} \right)$ (٢)

لعلك تلاحظ أن (١) حالة خاصة من (٢) عندما ل$_1$ = ل$_2$

مثال ١

عين النقطة التي تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ حيث أ (٨ ، −١) ، ب (٣ ، ٤)

الحل

نفرض أن نقطة التقسيم هي حـ (س ، ص)

باستخدام القانون حيث :

س$_1$ = ٨ ، س$_2$ = ٣

ص$_1$ = −١ ، ص$_2$ = ٤

ل$_1$ = ٣ ، ل$_2$ = ٢

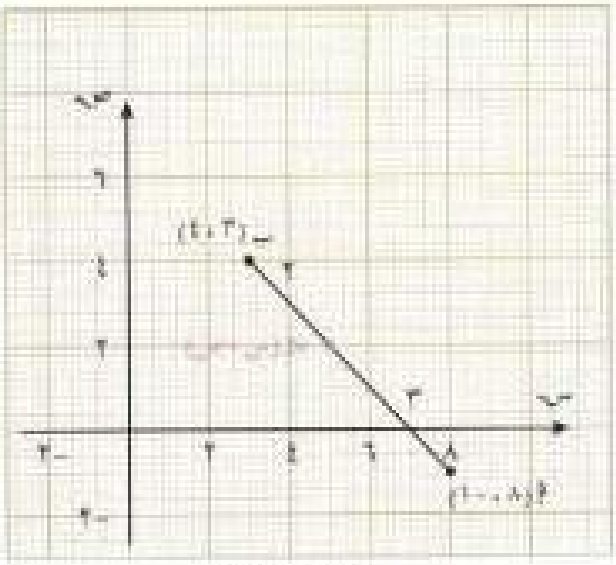
$$\text{س} = \frac{\text{س}_٢\text{ل}_١ + \text{س}_١\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$$

$$= \frac{٣ \times ٨ + ٢ \times ٣}{٣ + ٢} = ٥$$

$$\text{ص} = \frac{\text{ص}_٢\text{ل}_١ + \text{ص}_١\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$$

$$= \frac{٤ \times ٣ + (-١) \times ٢}{٣ + ٢} = ٢$$

∴ نقطة التقسيم هي (٥ ، ٢)



شكل (٢-٣)

مثال ٢

أوجد النسبة التي يقسم بها محور السينات القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٥ ، ٢) ، ب (٢ ، -١) ثم أوجد نقطة التقسيم .

الحل

نفرض أن نقطة التقسيم هي ح (س ، ص)

∴ ص = ٠ (لماذا ؟)

$$\therefore ٠ = \frac{\text{ص}_٢\text{ل}_١ + \text{ص}_١\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} = \frac{(-١)\text{ل}_١ + ٢\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$$

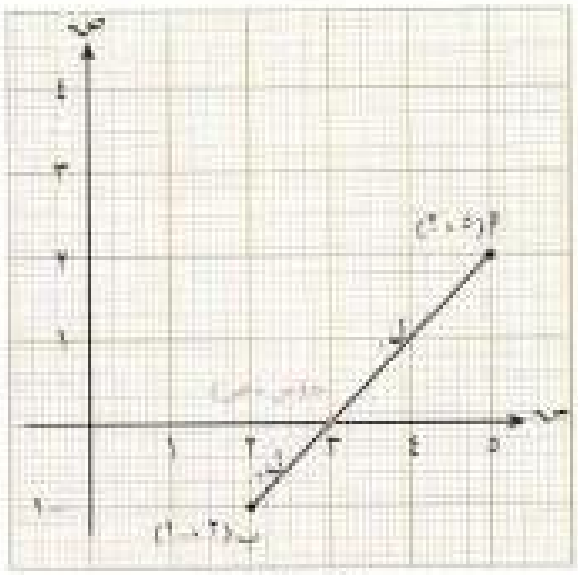
∴ $-\text{ل}_١ + ٢\text{ل}_٢ = ٠$ (لماذا ؟)

∴ $\text{ل}_١ = ٢\text{ل}_٢$ ومنها $\text{ل}_١ : \text{ل}_٢ = ٢ : ١$

لتعيين نقطة التقسيم يلزم معرفة س

$$\text{س} = \frac{\text{ل}_٢\text{س}_١ + \text{ل}_١\text{س}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} = \frac{٢ \times ٥ + ١ \times ٢}{٢ + ١} = ٣$$

∴ نقطة التقسيم هي ح (٣ ، ٠)

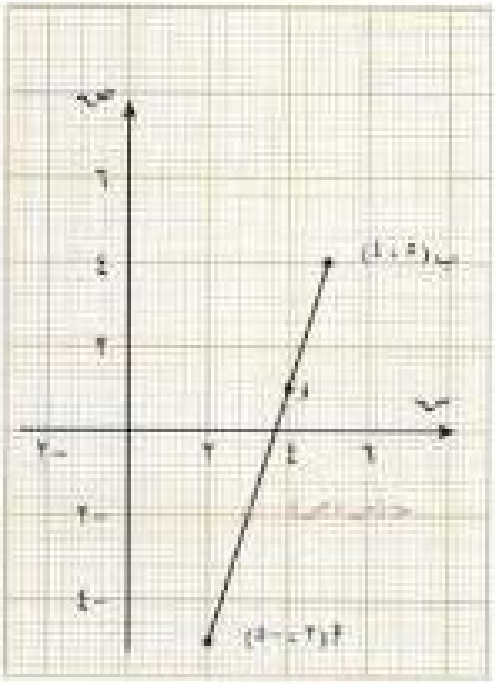


شكل (٢-٤)

مثال ٣

إذا كانت أ (٢ ، −٥) ، ب (٥ ، ٤) فأوجد النقطتين اللتين تقسمان $\overline{\text{أب}}$ إلى ثلاث قطع متطابقة .

الحل



شكل (٢-٥)

نفرض أن نقطتي التقسيم هما حـ ، ء

∴ حـ تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ من جهة أ

وبفرض أن حـ (س ، ص) :

$$\text{س} = \frac{\text{س}_{١}\text{ل}_{١} + \text{س}_{٢}\text{ل}_{٢}}{\text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢}}$$

$$= \frac{٥ \times ١ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = ٣$$

$$\text{، ص} = \frac{\text{ص}_{١}\text{ل}_{١} + \text{ص}_{٢}\text{ل}_{٢}}{\text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢}} = \frac{٤ \times ١ + (-٥) \times ٢}{١ + ٢} = -٢$$

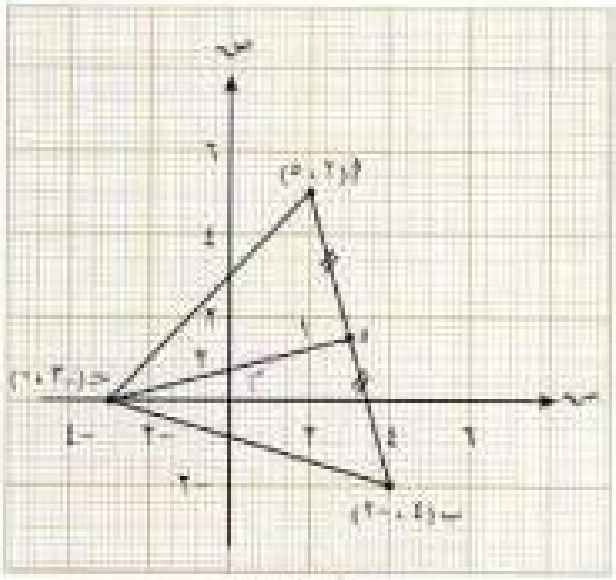
∴ حـ هي النقطة (٣ ، −٢) وحيث إن ء منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

∴ ء هي النقطة $\left(\frac{٥ + ٣}{٢} ، \frac{٤ + (-٢)}{٢} \right) = (٤ ، ١)$ ■

مثال ٤

أوجد نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب حـ حيث أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، −٢) ، حـ (−٣ ، ٠)

الحل



شكل (٢-٦)

القطع المتوسطة للمثلث تتقاطع في نقطة تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

بفرض أن ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ ء = $\left(٣ ، \frac{٣}{٢}\right)$ ، (لماذا ؟)

وبفرض أن م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة

∴ م تقسم $\overline{\text{حـء}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة حـ .

$$\text{∴ م} = \left(\frac{٣ \times ٢ + (-٣) \times ١}{٢ + ١} ، \frac{\frac{٣}{٢} \times ٢ + ٠ \times ١}{٢ + ١} \right) = (١ ، ١)$$ ■

مثال ٥

إذا كانت أ (١ ، -٥) ، ب (٤ ، ١) ، حـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ وكان ٢ أ حـ = حـ ب فأوجد إحداثي نقطة حـ .

الحل

واضح أن حـ تقع على امتداد $\overline{\text{أ ب}}$

نفرض أن حـ هي النقطة (س ، ص)

∵ ٢ أ حـ = حـ ب

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{١}{٢}$

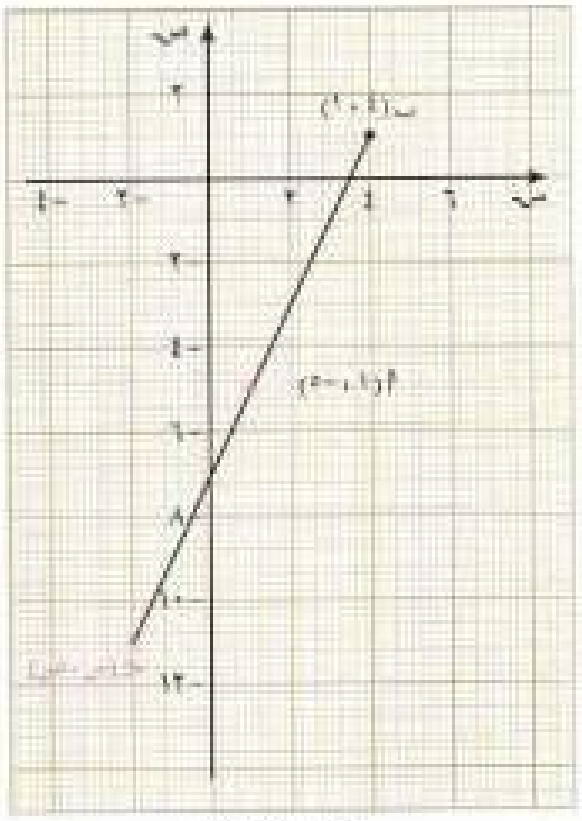
∴ أ هي منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ١ = $\frac{٤ + \text{س}}{٢}$

ومنها س = -٢

، -٥ = $\frac{١ + \text{ص}}{٢}$

ومنها ص = -١١



شكل (٢-٧)

٢-١ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ إذا كانت حـ (٢ ، ٠) منتصف $\overline{\text{أب}}$ وكانت أ (-٢ ، ٣) فإن ب (٦ ، -٣)

٢ إذا كانت س (٤ ، ٠) ، ص (-٢ ، ٠) فإن نقطة الأصل تقسم $\overline{\text{س ص}}$ بنسبة ٢ : ١

٣ إذا كان أ (-٥ ، ١) ، ب (١ ، -١) فإن نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ هي (-٣ ، ٠)

٤ إذا كانت حـ هي نقطة تقسيم $\overline{\text{ءهـ}}$ بنسبة ١ : ٢ من الداخل حيث ء (٠ ، ٣) ، هـ (-٣ ، ٠) فإن حـ (-١ ، ٢)

٥ نقطة الأصل هي مركز الدائرة وطرفي قطر فيها أ (-٥ ، ١) ، ب (٥ ، -١)

أسئلة مقالية

١ عين نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل في كل مما يأتي :

أ أ (٥ ، ٦) ، ب (-١ ، -٢) ونسبة التقسيم ٥ : ٣

ب أ (٧ ، -١) ، ب (-٨ ، ٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢

حـ أ (-٥ ، ٣) ، ب (-$\frac{٢}{٣}$ ٢ ، ١٠) ونسبة التقسيم ٣ : ٤

د أ (-٢ ، ٣) ، ب (-٥,٦ ، ٧,٥) ونسبة التقسيم ٢ : ٧

٢ عين النقط التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ إلى أربع قطع مستقيمة متطابقة حيث أ (٢ ، -٣) ، ب (-٢ ، ١)

٣ إذا كانت أ (-٢ ، ٢) ، حـ (٨ ، -٣) فعين النقطة ب ∈ $\overline{\text{أحـ}}$ التي تجعل أب : ب حـ = ٢ : ٣

٤ إذا كانت أ (٣ ، -٦) ، ب (٥ ، -٤) ، حـ (س ، ص) ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ فعين النقطة حـ علماً بأن أب : ب حـ = ٢ : ٣

٥ أوجد النسبة التي يقسم بها محور السينات $\overline{\text{أب}}$ حيث أ (٦ ، ٤) ، ب (٣ ، -٢) ، ثم عين إحداثي نقطة التقسيم .

٦ عين النسبة التي يقسم بها محور الصادات $\overline{حـ و}$ حيث حـ (٤ ، ٨) ، و (-٦ ، ٢) ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم .

٧ إذا قطع $\overleftrightarrow{حـ ب}$ محور السينات في النقطة أ فأوجد أ ب : ب حـ علماً بأن حـ (-٦ ، ٦) ، ب (-١ ، ٢)

٨ لتكن حـ ، و نقطتي تقاطع $\overline{أ ب}$ مع المحورين السيني والصادي على الترتيب حيث أ (٨ ، ٦) ، ب (-٦ ، -٣) أوجد :

أ أحـ : حـ ب

ب أو : و ب

٩ أ ب حـ مثلث فيه أ (١ ، -٢) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (-٣ ، ٦) عين م ملتقى القطع المتوسطة للمثلث أ ب حـ .

١٠ أ ب حـ مثلث فيه أ (١ ، ٥) ، ب (-٣ ، ٤) ، م ملتقى القطع المتوسطة ، إذا كانت م (-٢ ، ٣) فعين النقطة حـ .

١١ أ ب حـ و متوازي أضلاع فيه أ (٢ ، -١) ، ب (١ ، ٠) ، حـ (-٣ ، ٢) ، عين الرأس الرابع و .

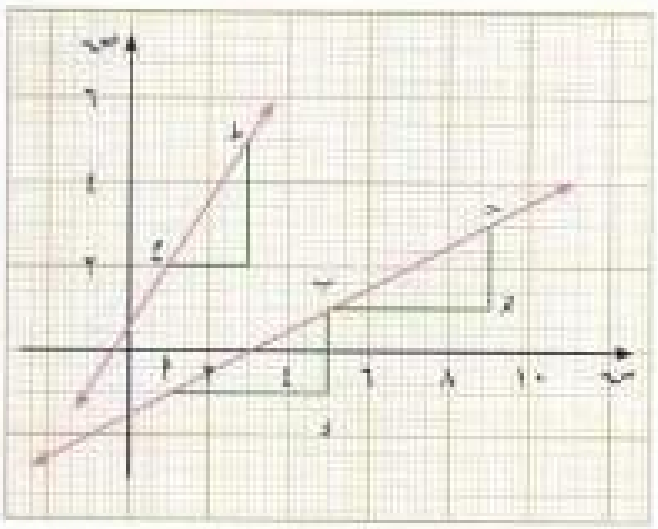
١٢ أ ب حـ و متوازي أضلاع فيه حـ (٥ ، -٧) ، و (١ ، ١) ، م (٣ ، -١) حيث م ملتقى القطرين . عين كلاً من الرأسين أ ، ب .

١٣ أ ب حـ مثلث فيه أ (٤ ، -٣) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (-٤ ، -٧) . و تقسم $\overline{ب حـ}$ من الداخل بنسبة ٢ : ١ عين النقطة و ، ثم أثبت أن أ ب = أ و

٢-٢

ميل المستقيم

Slop of Straight Line



شكل (٢-٨)

التحرك على المستقيم أ ب من أ إلى ب يكافئ التحرك من أ إلى ء ثم من ء إلى ب .

∴ التحرك على $\overleftrightarrow{أب}$ من أ إلى ب يتبعه تغير أفقي قدره (٤) وحدات وتغير رأسي قدره (٢) وحدة ، ويكون :

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{ب} - \text{ء}}{\text{ء} - \text{أ}} = \frac{١ - (-١)}{٥ - ١} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

كذلك التحرك على $\overleftrightarrow{أب}$ من أ إلى جـ يتبعه تغير أفقي قدره (٨) وحدات وتغير رأسي قدره (٤) وحدات ، ويكون :

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{ء ب} + \text{هـ جـ}}{\text{أ ء} + \text{ب هـ}} = \frac{٢ + ٢}{٤ + ٤} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

بالمثل ، التحرك على $\overleftrightarrow{أب}$ من ب إلى جـ يتبعه تغير أفقي قدره ( ) وتغير رأسي قدره ( ) ، ويكون :

$$\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\quad}{\quad} = \quad$$

ويلاحظ أن النسبة بين التغير الرأسي والتغير الأفقي الناتجين من التحرك بين نقطتين على $\overleftrightarrow{أب}$ نسبة ثابتة مهما كانت هاتان النقطتان . سنسمي هذه النسبة « ميل المستقيم » .

أي أن : $\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$

مثال (١)

في شكل (٢ - ٨) عين ميل $\overleftrightarrow{ع ط}$

الحل

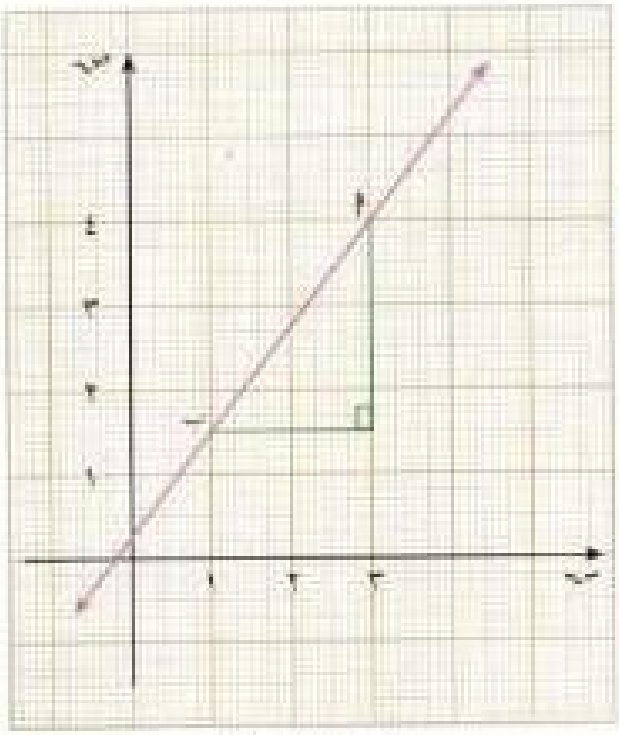
نختار نقطتين على $\overleftrightarrow{ع ط}$ هما ع ، ط

مثلاً نعين التغير في ص والتغير في س عند التحرك من ع إلى ط .

التغير في ص = ٣ وحدات

التغير في س = ٢ وحدة ،

ميل المستقيم = $\frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}} = \frac{٣}{٢}$



شكل (٢-٩)

تدريب (١) :

أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ في شكل (٢ - ٩) .

عند التحرك من ب إلى أ :

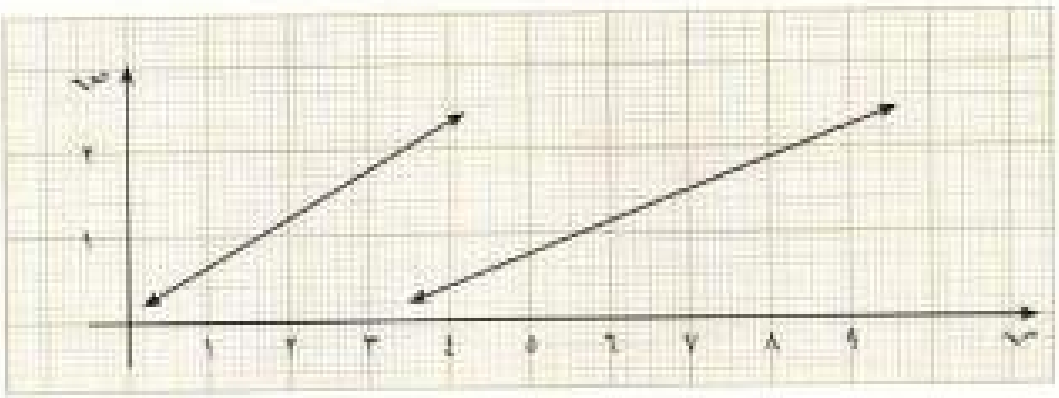
التغير في ص =

التغير في س =

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ =

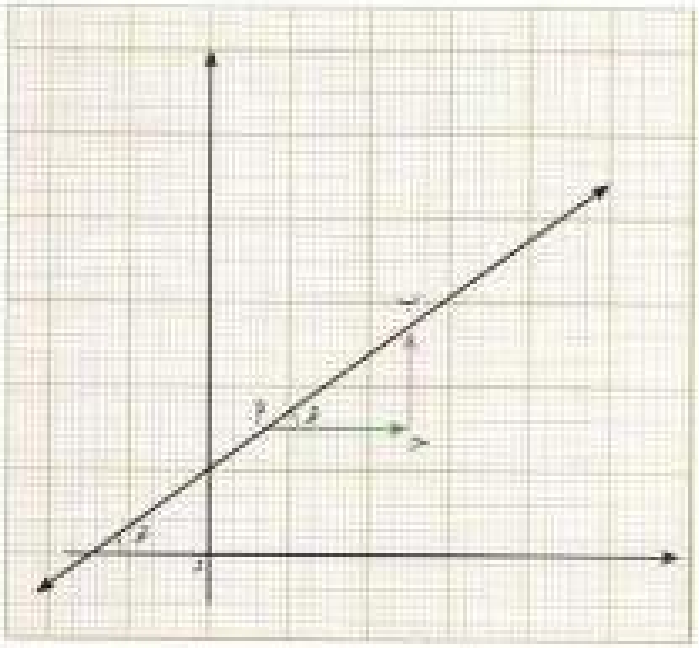
تدريب (٢) :

اختر نقطتين مناسبتين على كل من المستقيمين ، وعين ميل كل منهما :



شكل (٢-١٠)

وعموماً ، إذا كان ل أحد المستقيمات في المستوى الإحداثي ، وكانت أ ، ب ∈ ل نقطتين اختياريتين فإنّ :



شكل (٢-١١)

ميل المستقيم ل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

= $\frac{\text{ب ص}}{\text{ب س}}$

= طا هـ

أي أن :

ميل المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

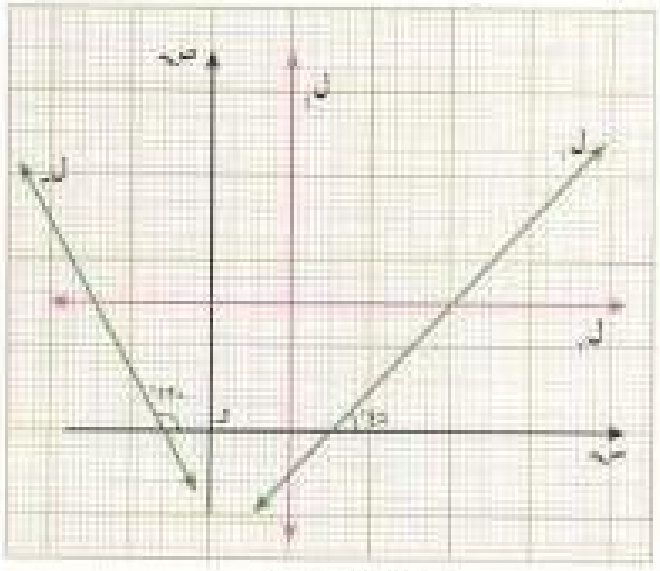
وإذا كان قياس هذه الزاوية هـ فإن :

ميل المستقيم = م = طا هـ ، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠° ، هـ ≠ ٩٠°

نلاحظ أن المستقيم الرأسي ليس له ميل :

مثال ٢

أوجد ميل كل من المستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، $ل_٤$ المبينة في شكل (٢ - ١٢) إن أمكن .



شكل (٢-١٢)

الحل

حسب التعريف الأخير :

ميل المستقيم $ل_١$ = طا ٤٥° = ١

ميل المستقيم $ل_٢$ = طا ١٢٠° ≈ - ١,٧٣٢

ميل المستقيم $ل_٣$ = طا ٠° = ٠

ميل المستقيم $ل_٤$ غير معرف

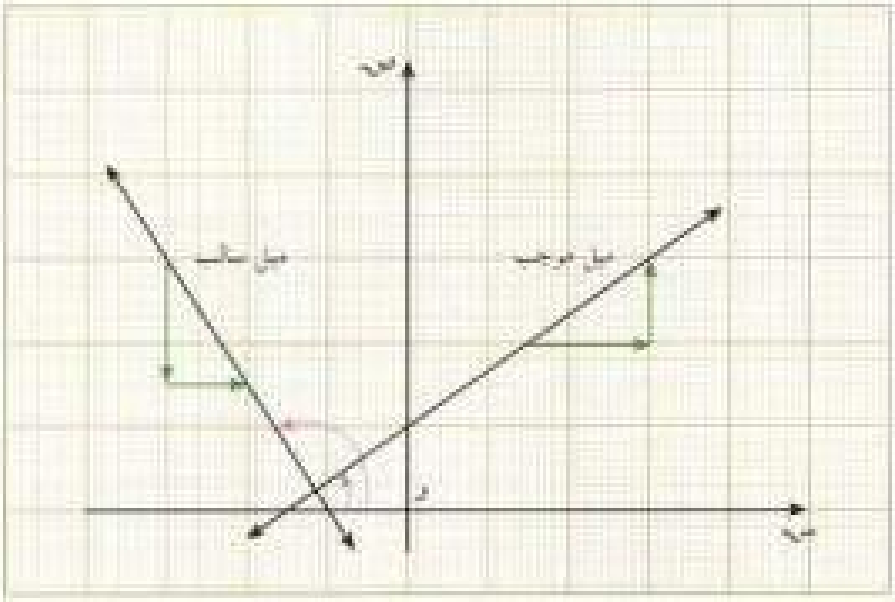
(لأن ظا ٩٠° غير معرّف) ■

لاحظ ما يأتي :

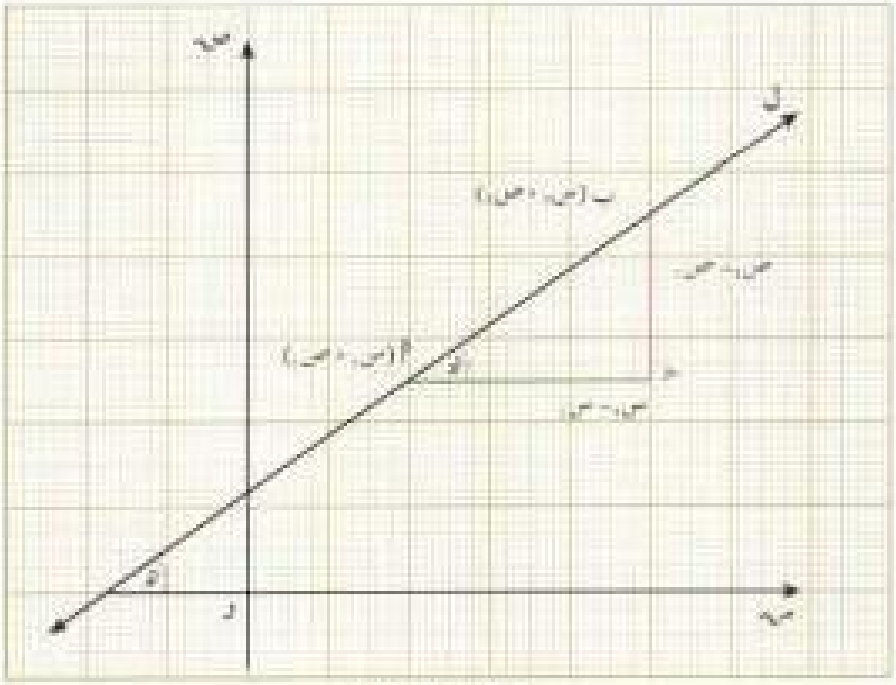
١ ميل محور السينات وأي مستقيم يوازيه يساوي صفراً .

٢ ميل محور الصادات وأي مستقيم يوازيه غير معرف .

٣ يكون ميل المستقيم موجباً إذا صنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، وسالباً إذا صنع زاوية منفرجة . انظر شكل (٢ - ١٣)



شكل (٢-١٣)



شكل (٢-١٤)

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين من نقاطه

ل مستقيم ما في المستوى الإحداثي ،

أ (س١ ، ص١) ∈ ل ،

ب (س٢ ، ص٢) ∈ ل ،

ميل المستقيم ل هو :

م = ظا θ

$= \frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ أ}}$

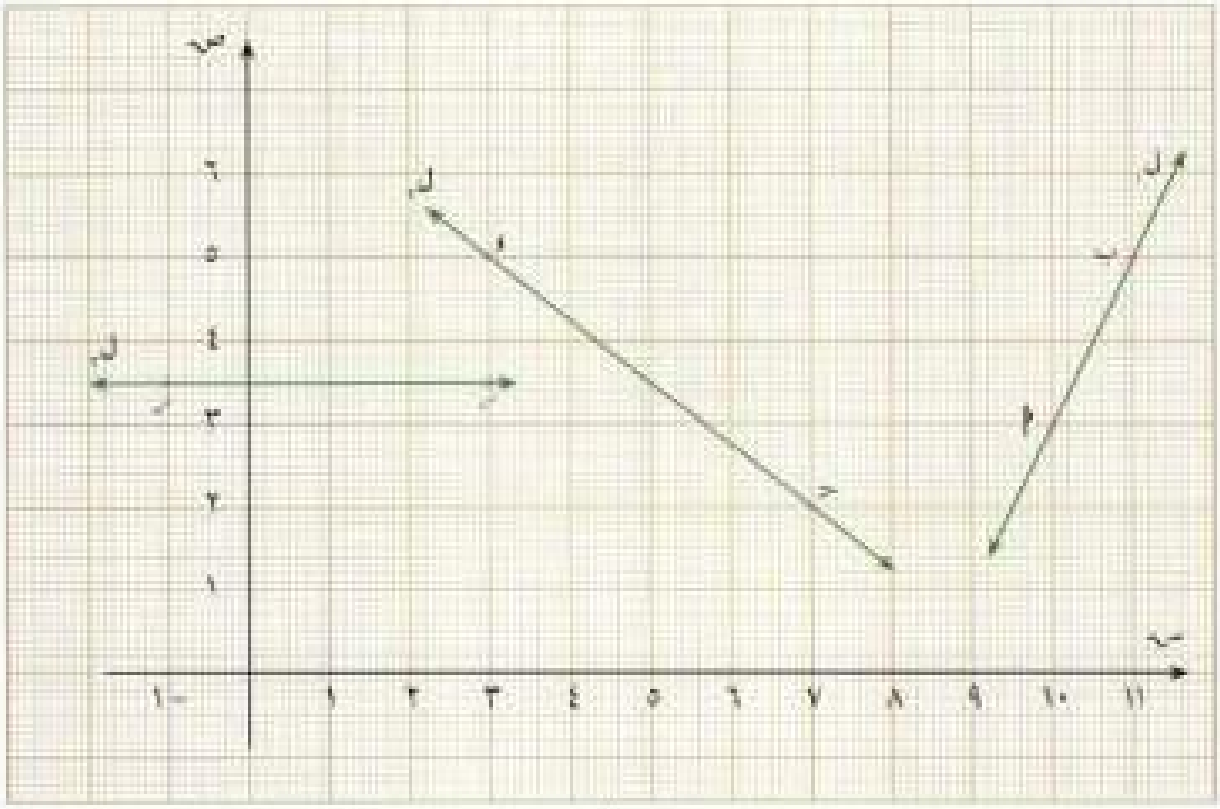
$$\therefore \quad م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ ، بشرط } س_١ \neq س_٢$$

لاحظ أن إحداثيي نقطة ب (أو نقطة أ) تظهر أولاً في كل من البسط والمقام أو تظهر ثانياً في كل من البسط والمقام والنتيجة واحدة في كل حالة ، وذلك لأن :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} \text{ ، } س_١ \neq س_٢$$

مثال (٣)

أوجد ميل كل من المستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ الموضحة في شكل (٢ - ١٥)



شكل (٢-١٥)

الحل

نأخذ أي نقطتين على $ل_١$: أ (١٠ ، ٣) ، ب (١١ ، ٥)

$\therefore$ ميل $ل_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{١١ - ١٠} = ٢$

نأخذ أي نقطتين على $ل_٢$: حـ (٧ ، ٢) ، ء (٣ ، ٥)

$\therefore$ ميل $ل_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ٧} = \frac{٣}{-٤}$

نأخذ أي نقطتين على $ل_٣$: ر (٣ ، ٣,٥) ، ز (-١ ، ٣,٥)

$\therefore$ ميل $ل_٣ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣,٥ - ٣,٥}{-١ - ٣} = ٠$

لاحظ أن :

إذا كان $ص_١ = ص_٢$ فإن المستقيم يوازي محور السينات وميله يساوي صفراً

مثال ٤

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ في كل من الحالات التالية :

(أولاً) أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٥)

(ثانياً) أ (٢ ، ٧) ، ب (-٣ ، ٦)

(ثالثاً) أ (٥ ، ٣) ، ب (٤ ، ٠)

(رابعاً) أ (-٥ ، ١١) ، ب (-٥ ، -٧)

(خامساً) أ (٠ ، حـ) ، ب (حـ ، ٠)

الحل

(أولاً) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ٢} = ١$

(ثانياً) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٦ - ٧}{-٣ - ٢} = \frac{١}{٥}$

(ثالثاً) ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٠ - ٣}{٤ - ٥}$ = ٣

(رابعاً) ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ غير معرف ، لماذا ؟

(خامساً) ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٠ - حـ}{حـ - ٠}$ = ـ١

مثال ٥

أثبت أن أ (٥ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (١ ، ٤) على استقامة واحدة .

الحل

ميل $\overline{\text{أب}}$ (لاحظ أن ميل $\overline{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$)

= $\frac{٣ - ٠}{٢ - ٥}$ = $\frac{٣}{-٣}$ = ـ١

ميل $\overline{\text{بحـ}}$ = $\frac{٤ - ٣}{١ - ٢}$ = ـ١ ،

ميل $\overline{\text{حـأ}}$ = $\frac{٤ - ٠}{١ - ٥}$ = ـ١

∴ النقط الثلاث أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة .

ملاحظة :

يمكن الاكتفاء باختيار ميل قطعتين فقط من القطع الثلاث لإثبات أن النقاط الثلاث على استقامة واحدة .

٢-٢ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

٢ إذا كانت النقاط (١ ، ٢) ، (٠ ، ص) ، (-١ ، ٤) على استقامة واحدة فإن ص = ٣

٣ المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٣) ، (١ ، ٣) يوازي محور الصادات

٤ المستقيم الرأسي ميله يساوي صفراً

أسئلة مقالية

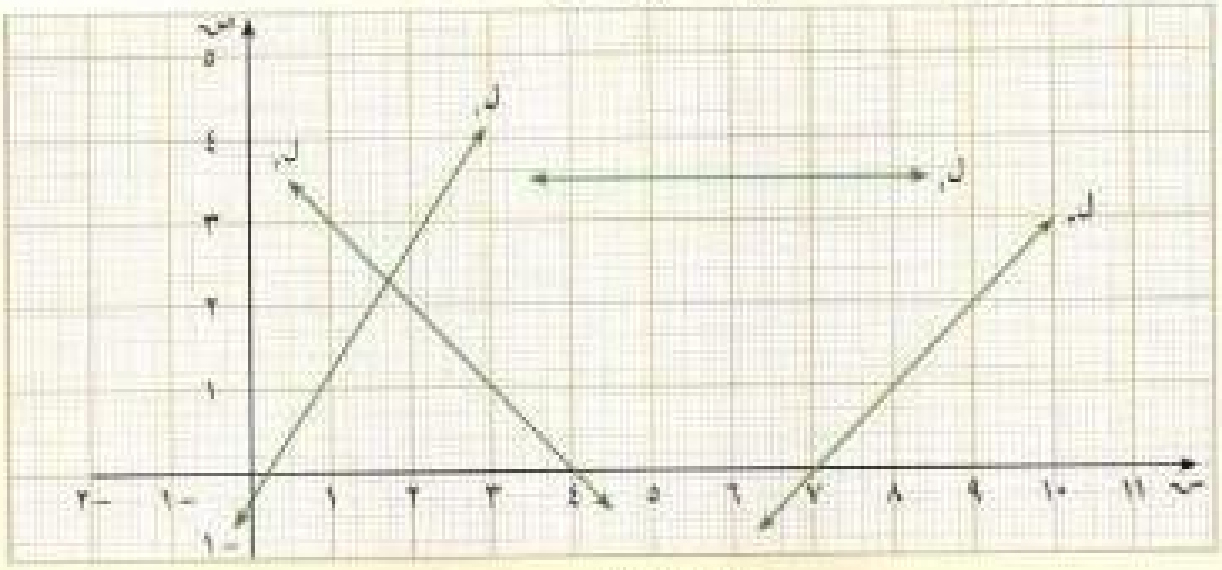
١ أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين الآتيتين ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في أولاً وثانياً :

(أولاً) أ (٠ ، ٢) ، ب (√٣ ، ٣)

(ثانياً) حـ (-٣ ، ٤) ، د (٧ ، -٦)

(ثالثاً) و (٠ ، ٠) ، حـ (أ ، ب)

٢ أوجد ميل كل من المستقيمات الموضحة في شكل (٢-١٦)



شكل (٢-١٦)

٣ أثبت أن النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (-١ ، -٩) تقع على استقامة واحدة .

٤ إذا كانت النقط أ (٣ ، ٧) ، ب (س ، ص) ، حـ (-١ ، ١) تقع على استقامة واحدة فأثبت أن ٣س - ٢ص + ٥ = ٠

٢ـ٣

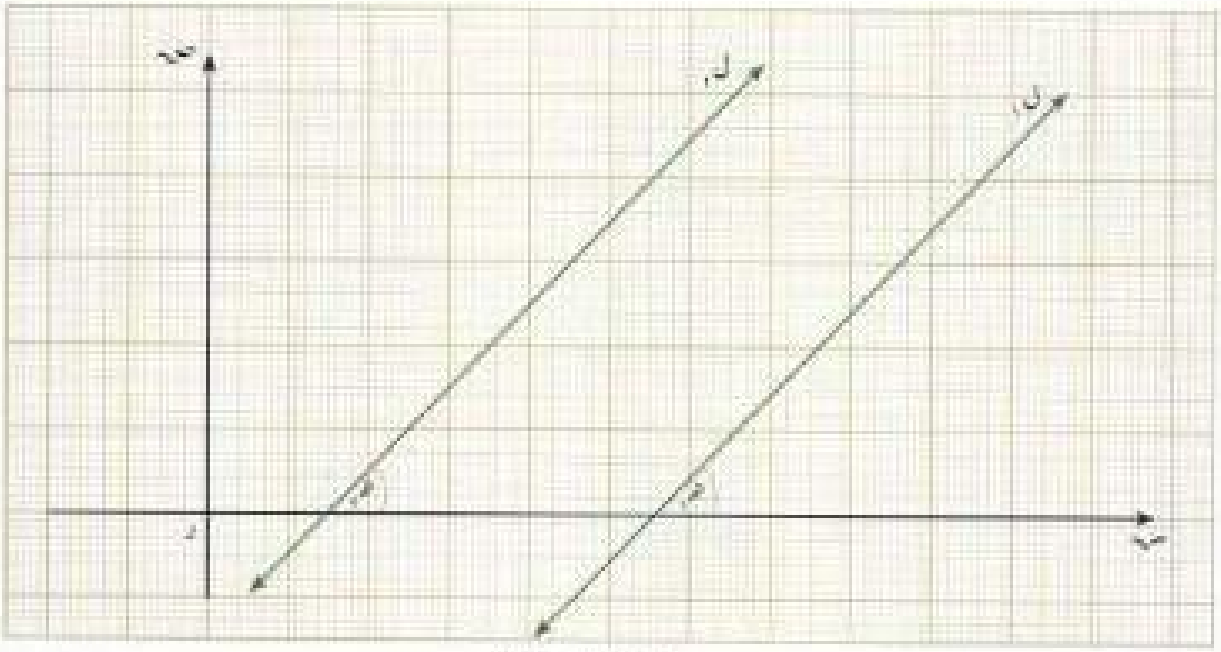
التوازي والتعامد Paralle & PerPendicular

شرط توازي مستقيمين : (Condition of Paralle Two Lines)

بفرض أن ل$_١$ // ل$_٢$ شكل (٢ - ١٧)

∴ الزاوية التي قياسها موجب والتي يصنعها ل$_١$ مع الاتجاه لمحور السينات تطابق الزاوية التي قياسها موجب والتي يصنعها ل$_٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (لماذا ؟)

أي أن هـ$_١$ = هـ$_٢$



شكل (٢ - ١٧)

وبفرض أن ميل ل$_١$ هو م$_١$ ، وميل ل$_٢$ هو م$_٢$

∴ م$_١$ = طا هـ$_١$ ، م$_٢$ = طا هـ$_٢$

وحيث إن هـ$_١$ = هـ$_٢$ فإن م$_١$ = م$_٢$

أي أن : **شرط توازي مستقيمين ميلاهما م$_١$ = م$_٢$ هو : م$_١$ = م$_٢$**

هل العكس صحيح؟ بمعنى أنه إذا كان لدينا مستقيمان لهما الميل نفسه فهل هما متوازيان؟

إذا كان ميل ل$_١$ هو م$_١$ وميل ل$_٢$ هو م$_٢$ وكان م$_١$ = م$_٢$ فإنّ :

ظا هـ$_{١}$ = م$_{١}$ حيث ٠° ≤ هـ$_{١}$ ≤ ١٨٠° ، هـ$_{١}$ ≠ ٩٠°

ظا هـ$_{٢}$ = م$_{٢}$ حيث ٠° ≤ هـ$_{٢}$ ≤ ١٨٠° ، هـ$_{٢}$ ≠ ٩٠°

∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$ ∴ ظا هـ$_{١}$ = ظا هـ$_{٢}$

وفي هذه الحالة هـ$_{١}$ = هـ$_{٢}$ أي أن ل$_{١}$ // ل$_{٢}$.

ملاحظة : المستقيمات العمودية على المحور السيني متوازية .

مثال (١)

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ إذا علم أن أ(١ ، ٤) ، ب(٦ ، ٦) ، جـ(٢ ، −١) ، د(١٢ ، ٣) .

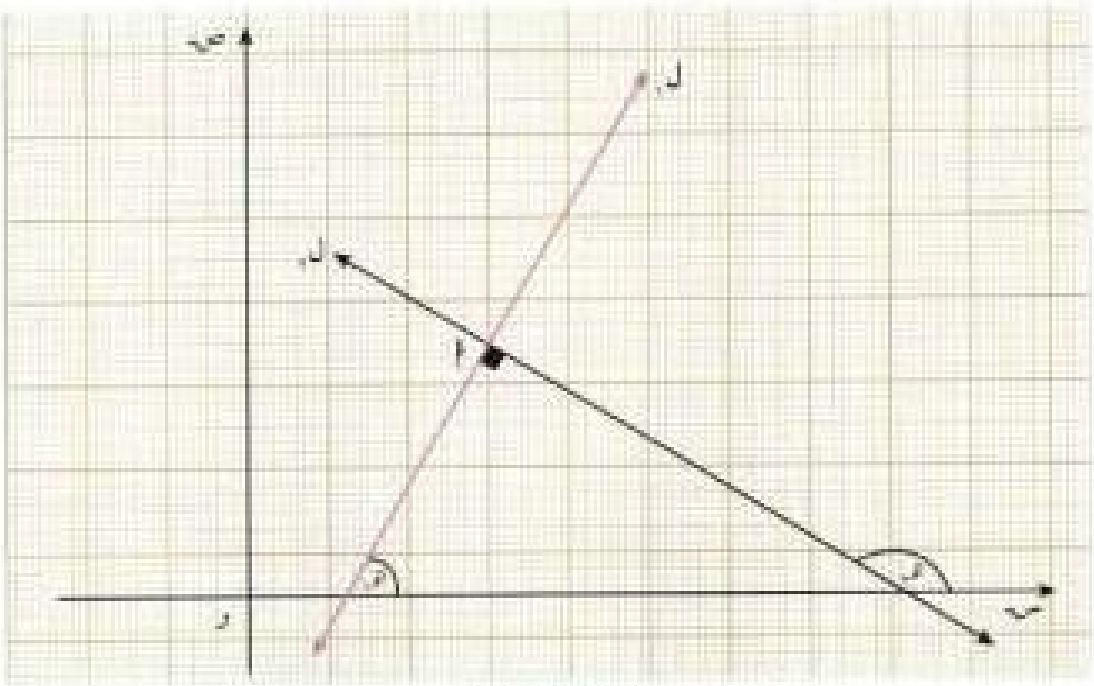
الحل

م$_{١}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $\frac{٦ - ٤}{٦ - ١}$ = $\frac{٢}{٥}$ ، م$_{٢}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\frac{٣ + ١}{١٢ - ٢}$ = $\frac{٢}{٥}$

∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$ أي أن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

شرط تعامد مستقيمين (Condition of Perpendicular Two Lines)

بفرض أن ل$_{١}$ ⊥ ل$_{٢}$ شكل (٢ − ١٨) .



شكل (٢−١٨)

وبفرض أن $ل_١$ يصنع زاوية قياسها $هـ_١$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها $هـ_٢$ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات .

$\therefore م_١ =$ ميل $ل_١ =$ طا $هـ_١$ ، $م_٢ =$ ميل $ل_٢ =$ طا $هـ_٢$

واضح أن $هـ_٢ = ٩٠° + هـ_١$ (لماذا ؟)

$\therefore$ طا $هـ_٢ =$ طا $(٩٠° + هـ_١)$

إذا كانت (س ، ص) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها $هـ_١$ والواقعة في الربع الأول فإنَّ (-ص ، س) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها $(٩٠° + هـ_١)$ الواقعة في الربع الثاني .

(قارن النقطة المثلثية للزاوية الأولى مع النقطة المثلثية للزاوية الثانية)

$\therefore م_٢ = \frac{١}{م_١}$

أي أن $م_١ \times م_٢ = -١$

وعليه يكون :

شرط تعامد مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ ، هو $م_١ \times م_٢ = -١$

هل العكس صحيح؟

إذا كان ميل $ل_١$ هو $م_١$ ، وميل $ل_٢$ هو $م_٢$ وكان :

$م_١ \times م_٢ = -١$ فهل يكون $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين؟

للإجابة عن هذا السؤال :

$\because م_١ \times م_٢ = -١$

$\therefore م_٢ = -\frac{١}{م_١}$

$\therefore$ طا $هـ_٢ = -\frac{١}{\text{طا } هـ_١}$

$=$ طا $(٩٠° + هـ_١)$

$\therefore هـ_٢ = ٩٠° + هـ_١$

$\therefore ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدان - انظر شكل (٢- ١٨)

مما سبق :

إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ هي ميلا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ على الترتيب فإن :

١ $ل_١ // ل_٢$ إذا وفقط إذا $م_١ = م_٢$

٢ $ل_١ \perp ل_٢$ إذا وفقط إذا $م_١ \times م_٢ = -١$

مثال ٢

إذا كانت أ(٤ ، ٤) ، ب(-٢ ، ٠) ، حـ(٣ ، -١) ، ء(-٣ ، ٨) فأثبت أن $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

الحل

ميل $\overline{\text{أب}}$ = $م_١$ = $\frac{٤ - ٠}{٤ + ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

ميل $\overline{\text{حـ ء}}$ = $م_٢$ = $\frac{٨ - (-١)}{-٣ - ٣}$ = $-\frac{٣}{٢}$

$م_١ \times م_٢$ = $\frac{٢}{٣} \times (-\frac{٣}{٢})$ = -١

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$ ■

مثال ٣

أثبت أن المثلث أ ب حـ الذي رؤوسه أ(-١ ، ٢) ، ب(٤ ، -٣) ، حـ(-٢ ، -١) قائم الزاوية .

الحل

$م_١$ = ميل $\overline{\text{أب}}$ = $\frac{-٣ - ٢}{٤ - (-١)}$ = ١

$م_٢$ = ميل $\overline{\text{ب حـ}}$ = $\frac{-٣ - (-١)}{٤ - (-٢)}$ = $-\frac{١}{٣}$

$م_٣$ = ميل $\overline{\text{حـ أ}}$ = $\frac{-١ - ٢}{-٢ - (-١)}$ = ٣

ولكن :

$م_١ \times م_٢$ = $-\frac{١}{٣} \times ٣$ = -١

∴ $\overline{\text{ب حـ}} \perp \overline{\text{حـ أ}}$

أي أن المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في حـ . ■

مثال ٤

إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (-٦ ، -٢) ، و (٢ ، ك) فأوجد قيمة ك التي تجعل :

١ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـو}}$ ،

٢ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{حـو}}$

الحل

١ ∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حـو}}$

∴ ميل $\overline{\text{أب}}$ = ميل $\overline{\text{حـو}}$

$$\therefore \frac{٥ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{ك + ٢}{٢ - (-٦)}$$

$$\therefore \frac{ك + ٢}{٨} = ١$$

∴ ك = ٦

٢ ∵ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{حـو}}$

∴ ميل $\overline{\text{أب}}$ × ميل $\overline{\text{حـو}}$ = -١

$$\therefore \frac{٥ - ٣}{٤ - ٢} \times \frac{ك + ٢}{٨} = -١$$

$$\therefore \frac{ك + ٢}{٨} = -١$$

∴ ك = -١٠

٢-٣ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة :

١ إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب (-١ ، ٢) فإن ميل المستقيم على $\overline{أب}$ يساوي

(أ) -٢ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٢ المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٤) ، (١ ، -٤) يوازي

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات

(ج) المستقيم الذي ميله -٤ (د) المستقيم الذي ميله ١

٣ إذا كانت النقاط أ (٢ ، ٥) ، ب (س ، ٣) ، ج (٢ ، -٢) على استقامة واحدة فإن س =

(أ) -٥ (ب) -٢ (ج) صفر (د) ٢

٤ إذا كان أ ب ج مثلث فيه أ (٢ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٤) ، ج (٠ ، -٥) وكانت $\overline{أد}$ ارتفاع للمثلث فإن ميل $\overline{أد}$ =

(أ) $\frac{٩}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (ج) $-\frac{٤}{٩}$ (د) $-\frac{٩}{٤}$

أسئلة مقالية

١ بين ما إذا كانت $\overline{أب}$ // $\overline{جد}$ أم $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{جد}$ في كل مما يأتي :

أولاً : أ (١ ، ٤) ، ب (٦ ، ٦) ، ج (٢ ، -١) ، د (١٢ ، ٣)

ثانياً : أ (-١ ، -١) ، ب (٠ ، ٤) ، ج (-٤ ، ٣) ، د (٦ ، ١)

ثالثاً : أ (٣ ، ٠) ، ب (٢ ، ٧) ، ج (٦ ، -١) ، د (-١ ، -٢)

٢ أي النقاط الآتية رؤوس لمثلث قائم الزاوية ؟

أولاً : أ (-٥ ، -١) ، ب (٤ ، -٦) ، ج (٢ ، -٣)

ثانياً : أ (٣ ، ٣) ، ب (٦ ، ٥) ، ج (٤ ، ٨)

ثالثاً : أ (-١ ، ٥) ، ب (٥ ، ١) ، ج (٢ ، ٤)

٣ أثبت أن أ (٣ ، -٢) ، ب (٠ ، ١) ، حـ (-٦ ، -٥) رؤوس مثلث قائم الزاوية ، ثم أوجد مساحة المنطقة المثلثة أ ب حـ .

٤ إذا كانت أ (٦ ، ٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (-٢ ، ٣) ، و (س ، ٢) وكان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ و}$ فأوجد قيمة س .

٥ إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (-٦ ، -٢) ، و (٢ك ، ك + ٢) فأوجد قيمة ك التي تجعل $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{حـ و}$.

٦ أثبت أن النقاط أ (-١ ، ٣) ، ب (-٢ ، ٦) ، حـ (٢ ، ١١) ، و (٣ ، ٨) هي رؤوس متوازي أضلاع .

٧ إذا كانت النقاط (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٣ ، -١) هي رؤوس شكل رباعي فأثبت أن قطريه متعامدان .

٨ إذا كانت النقاط (-٣ ، ٥) ، (٢ ، ٨) ، (٨ ، -٢) ، (٣ ، ص) هي رؤوس متوازي أضلاع فأوجد قيمة ص .

٩ أثبت أن و (٠ ، ٠) ، أ (٣ ، ٤) ، ب (٨ ، ٤) ، حـ (٥ ، ٠) هي رؤوس معين .

١٠ أثبت أن (٤ ، ٢) ، (٧ ، ٣) ، (٨ ، ٦) ، (٥ ، ٥) هي رؤوس معين ثم أوجد مساحة منطقته .

١١ لتكن (٣ ، ٠) ، (-٢ ، -٣) ، (١ ، -٨) هي رؤوس مثلث ، أثبت أنه قائم الزاوية ثم أوجد إحداثي مركز الدائرة الخارجة له وطول نصف قطرها .

١٢ برهن على أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله .

(إرشاد : خذ المثلث أ ب حـ الذي فيه أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_1$ ، ٠) ، حـ (-س$_1$ ، ٠)) .

٢-٤ معادلة المستقيم Equation of Straight Line

سبق لك دراسة التطبيق الخطي الذي يمثل بيانه بخط مستقيم ، وعلمت أن المعادلة من الدرجة الأولى في متغيرين س ، ص :

أ س + ب ص + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، حيث أ ، ب أحدهما على الأقل لا يساوي صفراً . . . . (١)

هذه المعادلة تمثل خطاً مستقيماً . فمثلاً ، المعادلة :

ص = ٢ س - ٣

تمثل بيانياً بخط مستقيم ، لتعيينه :

نأخذ س = ١ (مثلاً) ، وبالتعويض نجد ص = -١

∴ (١ ، -١) نقطة من نقاط المستقيم .

ونأخذ س = -١ ، بالتعويض نجد ص = -٥

∴ (-١ ، -٥) نقطة أخرى من نقاط المستقيم .

ونأخذ س = ٢ ، بالتعويض نجد ص = ١

∴ (٢ ، ١) نقطة أخرى من نقاط المستقيم .

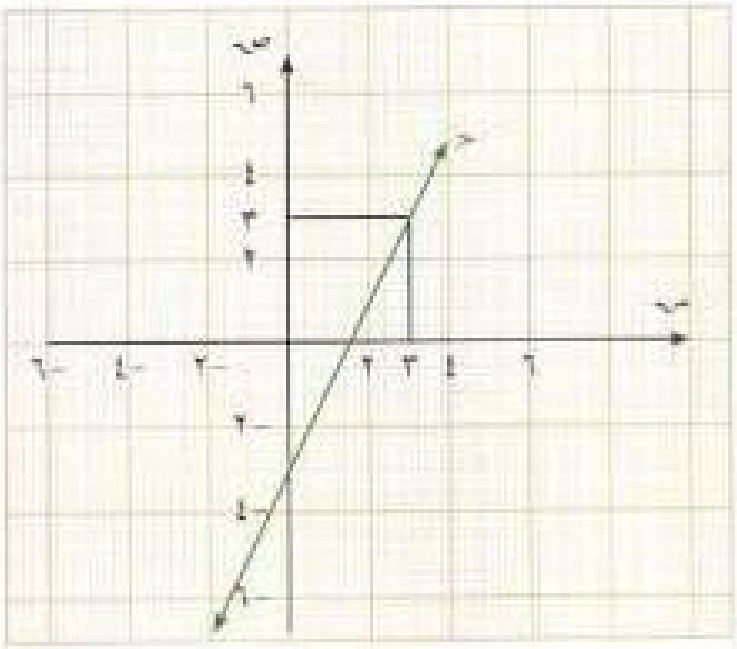
وبتحديد النقاط (١ ، -١) ، (-١ ، -٥) ، (٢ ، ١) في مستوى الإحداثيات والتوصيل بينها نحدد المستقيم الذي معادلته :

٢ س - ص - ٣ = ٠

انظر الشكل (٢ - ١٩)

كل نقطة من نقاط المستقيم شكل (٢ - ١٩) تحقق معادلته ، مثلاً ، نقطة جـ (٣ ، ٣) تحقق المعادلة :

٢ س - ص - ٣ = ٠



الشكل (٢ - ١٩)

للتحقق من ذلك :

نعوض عن س = ٣ ، ص = ٣ في معادلة المستقيم :

الطرف الأيمن = ٢ × ٣ − ٣ − ٣

= ٠

= الطرف الأيسر

وهذه هي الطريقة التي نختبر بها انتماء أو عدم انتماء نقطة ما إلى مستقيم معلوم . .

النقطة (٠ ، −٣) تنتمي إلى المستقيم :

٢س − ص − ٣ = ٠

ذلك لأن :

الطرف الأيمن = ٢ × ٠ − (−٣) − ٣ = ٠

= الطرف الأيسر .

ولكن النقطة (٤ ، −٢) لا تنتمي إلى المستقيم : ٢س − ص − ٣ = ٠

ذلك لأن :

الطرف الأيمن = ٢ × ٤ − (−٢) − ٣ = ٧

≠ الطرف الأيسر .

مثال ١

حدد ما إذا كانت النقطة المذكورة في كل مما يلي تنتمي أو لا تنتمي إلى المستقيم :

أ) ص − ٦س − ٧ = ٠ ، (١ ، ١٣)

ب) ص = ٢س + ٢ ، (١٣ ، ٣٠)

جـ) ٣س + ٨ص = ٢ ، (−١ ، $\frac{١}{٢}$)

د) $\sqrt{٣}$ س + $\sqrt{٢}$ ص = ٥ ، ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$)

الحل

أ) بالتعويض عن س = ١ ، ص = ١٣ في المعادلة :

ص − ٦س − ٧ = ٠

الطرف الأيمن = ١٣ − ٦ × ١ − ٧ = ٠ = الطرف الأيسر .

∴ (١ ، ١٣) تنتمي إلى المستقيم ص − ٦س − ٧ = ٠

ب بالتعويض عن س = ١٣ ، ص = ٣٠ في معادلة المستقيم ص = ٢س + ٢ حيث

الطرف الأيمن = ٣٠

الطرف الأيسر = ٢ × ١٣ + ٢ = ٢٨ ≠ الطرف الأيمن

∴ (١٣ ، ٣٠) لا تنتمي إلى المستقيم ص = ٢س + ٢

جـ بالتعويض عن س = −١ ، ص = $\frac{١}{٢}$ في معادلة المستقيم ٣س + ٨ ص = ٢ حيث

الطرف الأيمن = ٣ × (−١) + ٨ × $\frac{١}{٢}$ = ١

≠ الطرف الأيسر

∴ (−١ ، $\frac{١}{٢}$) لا تنتمي إلى المستقيم ٣س + ٨ص = ٢

د بالتعويض عن س = $\sqrt{٣}$ ، ص = $\sqrt{٢}$ في معادلة المستقيم $\sqrt{٣}$ س + $\sqrt{٢}$ ص = ٥

الطرف الأيمن = $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ = ٣ + ٢

= ٥ = الطرف الأيسر .

∴ ($\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٢}$) تنتمي إلى المستقيم $\sqrt{٣}$ س + $\sqrt{٢}$ ص = ٥

معادلة محور السينات

حيث إن الإحداثي الصادي لكل نقطة من نقاط محور السينات يساوي صفراً

∴ مجموعة نقاط محور السينات هي :

{(س ، ص) : ص = ٠ ، س ∈ ح}

أي أن :

معادلة محور السينات هي : ص = ٠

وهي حالة خاصة من المعادلة (١) في صفحة (٨٣) حيث أ = ٠ ، ب = ١ ، جـ = ٠

معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات :

معادلة المستقيم المار بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ويوازي محور السينات هي : **ص = ص$_{١}$**

معادلة محور الصادات :

الإحداثي السيني لكل نقطة من نقاط محور الصادات = ٠

∴ مجموعة نقاط محور الصادات هي :

{(س ، ص) : س = ٠ ، ص ∈ ح}

∴ **معادلة محور الصادات هي : س = ٠**

وهي ناتجة من المعادلة (١) حيث أ = ١ ، ب = جـ = ٠

معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات :

معادلة المستقيم المار بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ويوازي محور الصادات هي : **س = س$_{١}$**

تدريب (١) :

مثل بيانياً المستقيمات :

أ ص = ٣

المستقيم يوازي . . . . . .

ويبعد عنه مسافة قدرها . . . . . .

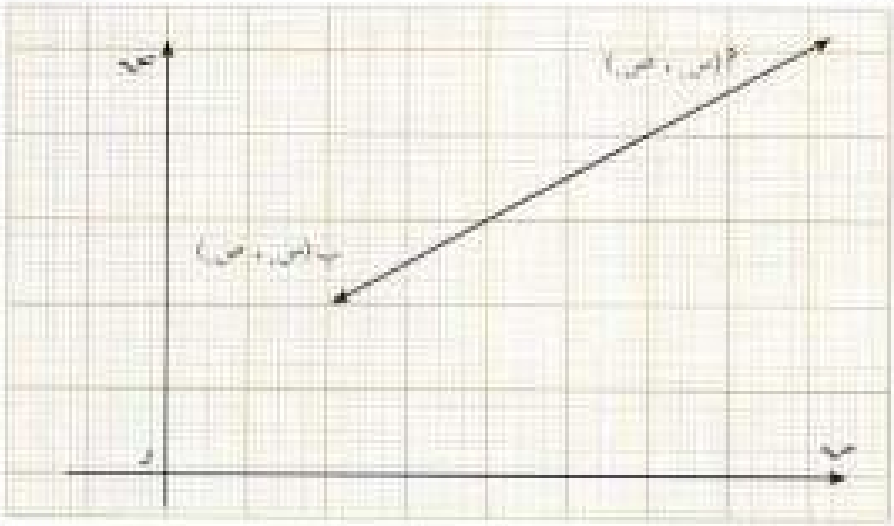
ب س = − ٥

المستقيم يوازي . . . . . .

ويبعد عنه مسافة . . . . . .

معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) :

Equation of A Line With Given Slope and Piont



الشكل (٢ − ٢٠)

أ (س ، ص) نقطة اختيارية تنتمي إلى المستقيم المعلوم ، ب (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) النقطة المعلومة ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

$$\text{م} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} \quad ، \text{س} \neq \text{س}_{١}$$

∴ معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر بالنقطة المعلومة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي :

$$\boxed{\text{م} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}} \quad ، \text{س} \neq \text{س}_{١}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

ويمكن كتابتها على الصورة : $\boxed{\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م} (\text{س} - \text{س}_{١})}$

مثال ٢

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٥)

الحل

∵ ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

∴ ص − ٥ = ٢ (س − ١)

ص − ٥ = ٢ س − ٢

∴ ص − ٢ س − ٣ = ٠

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٤ ، ٦) ، (١ ، ٥)

الحل

$$\because \text{م} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{٦ - ٥}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$$

∴ ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$) حيث (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي إحدى نقط المستقيم المطلوب .

تعتبر (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = (٤ ، ٦)

∴ ص − ٦ = $\frac{١}{٣}$ (س − ٤)

٣ص − ١٨ = س − ٤

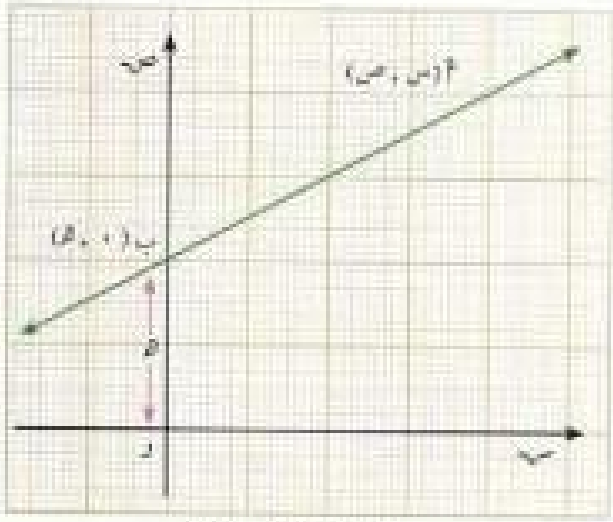
س − ٣ص + ١٤ = ٠

ملاحظة :

يمكن استخدام النقطة الأخرى (١ ، ٥) مع الميل للحصول على المعادلة نفسها .

معادلة المستقيم الذي ميله م ويقطع من محور الصادات جزءاً قدره |هـ| :

أ(س ، ص) نقطة اختيارية من نقاط المستقيم ، ب (٠ ، هـ) هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .



الشكل (٢ − ٢١)

معادلة المستقيم بدلالة الميل ونقطة

معلومة هي : م = $\frac{ص − ص_{١}}{س − س_{١}}$ ، س ≠ س$_{١}$

= $\frac{ص − هـ}{س}$

∴ م س = ص − هـ

أي : ص = م س + هـ ..... (٣)

علماً بأن |هـ| تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات .

مثال ٤

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = −٢ ويقطع جزءاً قدره ٥ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

الحل

المعادلة هي : ص = م س + هـ

∴ ص = −٢ س + ٥

أو ص + ٢ س − ٥ = ٠

مثال ٥

أوجد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° ، ويقطع جزءاً قدره $٣\frac{١}{٢}$ وحدات من الاتجاه لمحور الصادات .

الحل

الميل = ظا ١٣٥° = −١

، جـ = $-٣\frac{١}{٢}$

∴ المعادلة هي : ص = م س + جـ

ص = − س − $٣\frac{١}{٢}$

أو ٢ س + ٢ ص + ٧ = ٠

مثال ٦

أوجد ميل المستقيم : ٢ ص + س = ٥ والجزء الذي يقطعه من محور الصادات .

الحل

نضع المعادلة على الصورة : ص = م س + جـ

٢ ص + س = ٥

٢ ص = − س + ٥

ص = $-\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٥}{٢}$

∴ الميل = $-\frac{١}{٢}$ ، والجزء المقطوع = $٢\frac{١}{٢}$ وحدة طول من الاتجاه الموجب لمحور الصادات

مثال ٧

أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لمستقيم علمت معادلته في الصورة العامة :

أ س + ب ص + جـ = ٠ ، ب ≠ ٠

الحل

لإيجاد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم المعلوم معادلته في الصورة العامة :

نضع معادلته على الصورة : ص = م س + جـ

∴ أ س + ب ص + جـ = ٠ ، ب ≠ ٠

ب ص = − أ س − جـ (لماذا؟)

ص = $\frac{-أ}{ب}$ س − $\frac{جـ}{ب}$ (لماذا؟)

∴ ميل المستقيم م = $\frac{-أ}{ب}$ = − $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

والجزء المقطوع من محور الصادات | هـ | = | $\frac{-جـ}{ب}$ | = | − $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}$ |

مثال ٨

أوجد ميل المستقيم : ٣ س − ٢ ص − ٤ = ٠ والجزء الذي يقطعه من محور الصادات .

الحل

٣ س − ٢ ص − ٤ = ٠

∴ أ = ٣ ، ب = −٢ ، جـ = −٤

ميل المستقيم = − $\frac{أ}{ب}$ = − $\frac{٣}{-٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

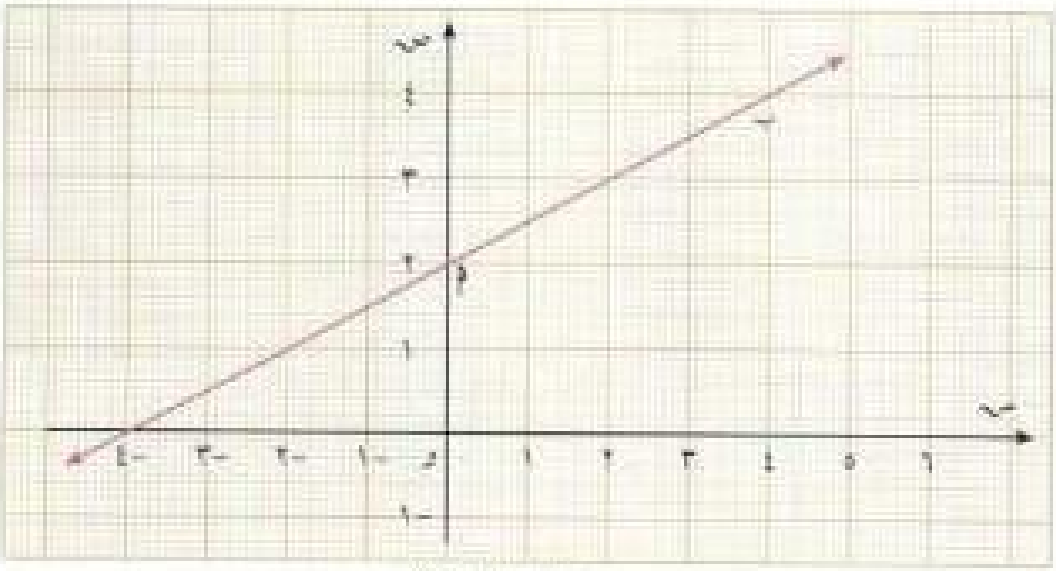
الجزء المقطوع من محور الصادات = | − $\frac{جـ}{ب}$ | = | − $\frac{-٤}{-٢}$ | = ٢

أي أن المستقيم يقطع جزءاً قدره وحدتان من الاتجاه السالب لمحور الصادات

هل تستطيع حل المثال بطريقة أخرى؟ حاول . . . ■

مثال ٩

أوجد معادلة المستقيم الموضح بيانه في شكل (٢ − ٢٢)



شكل (٢ − ٢٢)

الحل

واضح أن المستقيم يقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات جزءاً قدره وحدتان

∴ ﻫ = ٢

لإيجاد م نأخذ نقطتين على المستقيم مثل أ (٠ ، ٢) ، ب (٤ ، ٤)

$$\therefore م = \frac{٤ - ٢}{٤ - ٠} = \frac{١}{٢}$$

فتكون معادلة المستقيم هي :

ص = م س + ﻫ

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ أو ٢ ص − س − ٤ = ٠

مثال ١٠

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من الاتجاه الموجب لمحور الصادات جزءاً طوله ٥ وحدات ويكون عمودياً على المستقيم ٢ س + ص = ٣

الحل

ميل المستقيم المعلوم $م_١$ = −٢ لماذا؟

وحيث إن $م_١ \times م_٢$ = −١ حيث $م_٢$ = ميل المستقيم المطلوب .

$$\therefore م_٢ = \frac{-١}{م_١} = \frac{١}{٢}$$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي :

ص = $م_٢$ س + ﻫ

ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

أو ٢ ص − س − ١٠ = ٠

مثال ١١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٥ ، -٤) ويوازي المستقيم :

٢ س + ٣ ص + ١ = ٠

الحل

ميل المستقيم المعلوم = - $\frac{٢}{٣}$ لماذا؟

∴ ميل المستقيم المطلوب = - $\frac{٢}{٣}$ أيضاً . لماذا؟

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي :

ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

∴ ص - (-٤) = - $\frac{٢}{٣}$ [س - (-٥)]

∴ ص + ٤ = - $\frac{٢}{٣}$ (س + ٥)

∴ ٣ ص + ١٢ = -٢س - ١٠

∴ ٣ ص + ٢ س + ٢٢ = ٠

٢-٤ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ المستقيم ل : س = ٣ يوازي المحور الصادي

٢ المستقيم ل : ٤س + ص - ٢ = ٠ يقطع جُزءاً طولُهُ وحدتان من محور الصادات

٣ إذا كان المستقيمان $ل_١$: ٢ص - س = ١ ، $ل_٢$: أ ص = ٥ - س متعامدين فان أ = ٢

٤ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وهو عمودي على المستقيم الذي ميله = ٢ هي ص = ٢س

أسئلة مقالية

١ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = ٣ ويمر بالنقطة (-٢ ، ٣)

٢ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = -٢ ويمر بنقطة الأصل .

٣ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = $-\frac{٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (٤ ، -٧)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣)

٥ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣ ، ٣) ، (-٢ ، -٢)

٦ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين ($س_١$ ، ٠) ، ($س_٢$ ، ٠)

٧ أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المستقيمات الآتية :

أ ص = ٣ س + ٧

ب ص = $-\frac{١}{٣}$ س - ١

جـ ص = $\frac{٧}{١٠}$ س

د ص = -٢ (س - ١)

هـ ص = $\frac{١}{٤}$ (س - ٢)

و س - ص = ٤

ز ٣ س - ٤ ص = ١

ح أ ص - $أ^٢$ س = ١

٨ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = ٢ ويقطع الاتجاه الموجب لمحور الصادات جزءاً قدره $\frac{٣}{٢}$ وحدة

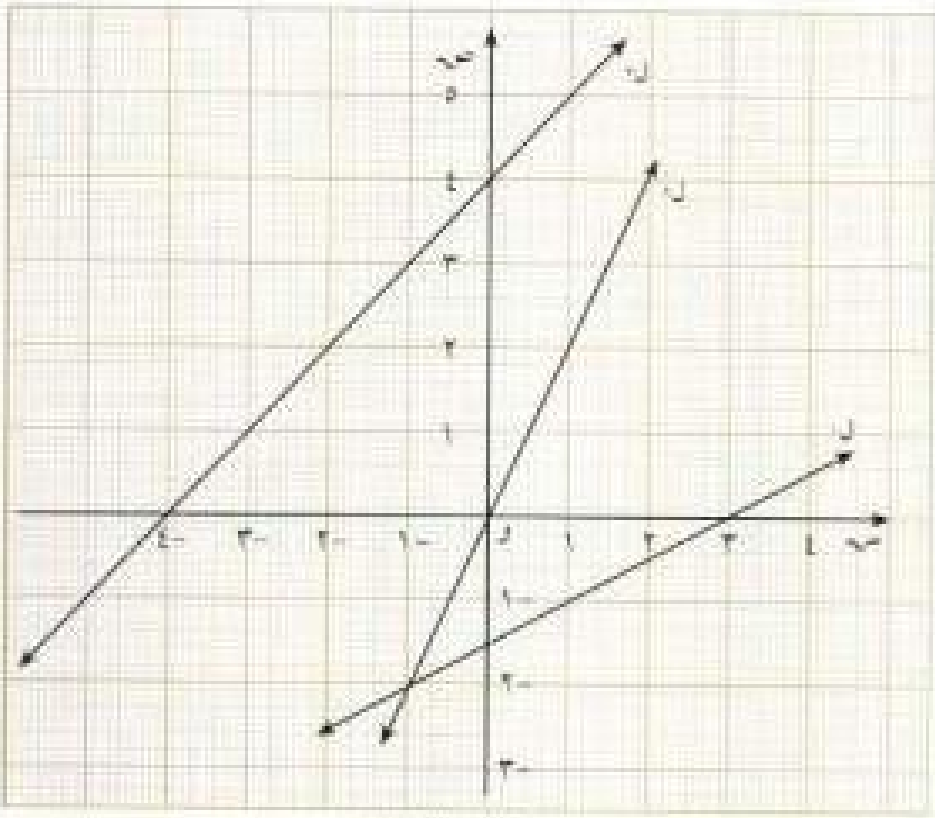
٩ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع الاتجاه الموجب من محور الصادات جزءاً قدره ٥ وحدات ويوازي المستقيم ٢س + ص - ٣ = ٠

١٠ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع الاتجاه الموجب من محور الصادات جزءاً قدره وحدتان ويكون عمودياً على المستقيم ٣ س − ٥ ص + ٢ = ٠

١١ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٥ ، ٤) ويوازي المستقيم ٣ س − ٤ص + ٧ = ٠

١٢ أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ويكون عمودياً على المستقيم ٤ س + ٣ ص − ٥ = ٠

١٣ أوجد معادلة كل من المستقيمات ل١ ، ل٢ ، ل٣ الموضحة في شكل (٢ − ٢٣)



شكل (٢-٢٣)

١٤ إذا كانت أ (٣ ، −١) ، ب (١ ، −٥) ، حـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد معادلة العمود المقام من حـ على $\overline{أب}$.

١٥ أوجد معادلة المستقيم الذي ميله = $\frac{١}{٢}$ ١ ويمر بنقطة الأصل . وإذا كان هذا المستقيم يوازي المستقيم : س − ٢ ص + ٥ + ل (٣ س − ص − ١) = ٠ فأوجد قيمة ل .

١٦ إذا كانت أ (١٠ ، ٠) ، ب (٠ ، −٧) ، د (٠ ، ٠) فأوجد معادلة كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{دحـ}$ حيث حـ منتصف $\overline{أب}$.

١٧ أ ب حـ د معين فيه أ (٢ ، −١) ، حـ (٤ ، ٧) أوجد معادلة $\overleftrightarrow{ب د}$.

١٨ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع جزءاً طوله ٣ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور السينات وجزءاً قدره ٤ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

١٩ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من الاتجاه الموجب لمحور السينات جزءاً قدره = ضعف الجزء الذي يقطعه من الاتجاه الموجب لمحور الصادات علماً بأن هذا المستقيم يمر بالنقطة (٤ ، −١)

٢ – ٥

العلاقة بين مستقيمين في المستوى الإحداثي

Relation Between Two Line in The Coordinate Plane

لأي مستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ في مستوى إحداثي ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب تتعين حالة واحدة من الحالات الثلاثة الآتية :

١ $ل_١$ يقطع $ل_٢$ في نقطة إذا وفقط إذا $م_١ \neq م_٢$

٢ $ل_١$ لا يقطع $ل_٢$ ، أي $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ إذا وفقط إذا $م_١ = م_٢$

٣ $ل_١$ ينطبق على $ل_٢$ أو $ل_١ \cong ل_٢$ إذا كانت :

$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ = ٠$ ،

$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ = ٠$

مُعادَلتان لمستقيم واحد ويحدث ذلك إذا نتجت إحداهما من الأخرى بالضرب في عدد حقيقي لا يساوي صفراً .

فمثلاً : $س + ٢ ص - ٣ = ٠$ ، $٤ س + ٨ ص - ١٢ = ٠$

مُعادلتان لمستقيم واحد .

مثال ١

أي المستقيمين فيما يأتي مُنطَبِق ؟ وأيهما غير مُتقاطِع ؟ وأيهما مُتقاطِع ؟

١ $٣ س + ٢ ص = ٥$ ، $٤ س + ٥ ص = ٢$

٢ $س + ٣ ص = ٧$ ، $٢ س + ٦ ص - ١٤ = ٠$

٣ $س + ص = -٨$ ، $٣ س + ٣ ص + ١٠ = ٠$

الحل

١ نفرض $ل_١$: $٣ س + ٢ ص = ٥$ ، $ل_٢$: $٤ س + ٥ ص = ٢$

$\therefore م_١ = -\frac{٣}{٢}$ ، $م_٢ = -\frac{٤}{٥}$

$\because -\frac{٣}{٢} \neq -\frac{٤}{٥}$ $\therefore$ المستقيمان يتقاطعان

٢ نفرض $ل_١$: س + ٣ ص − ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٢ س + ٦ ص − ١٤ = ٠

واضح أن معادلة $ل_٢$ تنتج من ضرب معادلة $ل_١$ في العدد ٢

∴ المستقيمان منطبقان

٣ نفرض أن $ل_١$: س + ص + ٨ = ٠ ، $ل_٢$: ٣ س + ٣ ص + ١٠ = ٠

$م_١ = -١$ ، $م_٢ = -١$

∴ المستقيمان لا يتقاطعان (المستقيمان متوازيان وغير منطبقين) .

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢س + ص = ٤ ، ٣ س + ٢ص = ٧ ويمر بالنقطة (٣ ، −٥)

الحل

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين :

٢س + ص = ٤ ..... (١)

٣س + ٢ص = ٧ ..... (٢)

نضرب المعادلة (١) في (−٢) نحصل على :

−٤س − ٢ص = −٨ ..... (٣)

بجمع (٢) ، (٣) نحصل على :

− س = −١ أي س = ١

بالتعويض في (١) نحصل على :

٢ × ١ + ص = ٤ ومنها ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هي (١ ، ٢)

لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، −٥) :

الميل = $\frac{٢ + ٥}{١ - ٣}$ = − $\frac{٧}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب م = − $\frac{٧}{٢}$ ويمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ معادلته هي :

ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

ص − ٢ = − $\frac{٧}{٢}$ (س − ١)

٧ س + ٢ ص − ١١ = ٠

مثال ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين س + ص − ٣ = ٠ ، ٥ س − ٢ ص + ٦ = ٠ ويوازي المستقيم ٤ س + ٣ ص = ٣

الحل

نعين أولاً نقطة تقاطع المستقيمين :

س + ص − ٣ = ٠ ..... (١)

٥س − ٢ ص + ٦ = ٠ ..... (٢)

بضرب المعادلة (١) في ٢ والجمع :

٧س = ٠ ومنها س = ٠

وبالتعويض عن س في المعادلة (١) نحصل على ص = ٣

∴ نقطة التقاطع هي (٠ ، ٣)

لإيجاد ميل المستقيم ٤س + ٣ص = ٣

٣ ص = − ٤ س + ٣

ص = − $\frac{٤}{٣}$ س + ٣

الميل = − $\frac{٤}{٣}$

∴ المستقيم المطلوب ميله = − $\frac{٤}{٣}$ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣)

∴ معادلته هي :

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٣ = − $\frac{٤}{٣}$ (س − ٠)

٤س + ٣ ص − ٩ = ٠

٢ـ٥ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة :

١ قيمة أ التي تجعل المستقيم الذي معادلته ص = (أ - ٤) س + ٢ موازياً لمحور السينات هي :

(أ) -٤ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٤

٢ المستقيم س + ص = ٠ يوازي المستقيم الذي معادلته

(أ) س - ص + ٣ = ٠ (ب) س - ٢ص - ٨ = ٠ (جـ) س + ص + ٣ = ٠ (د) س = ص

٣ المستقيمان ل١ : س + ص = ٢ ، ل٢ : ٣ص + ٣ س - ٦ = ٠

(أ) متقاطعان (ب) متوازيان وغير متطابقين (جـ) متعامدين (د) متطابقان

٤ المستقيم الذي لا يقطع المستقيم ل : ص = -٥ معادلته يمكن أن تكون :

(أ) ص = س (ب) ص = - س (جـ) ص = ٥ (د) س = ٥

أسئلة مقالية

١ بين أي أزواج المستقيمات التالية تتقاطع وأيها لا تتقاطع وأيها تنطبق .

أ ٢ ص = س + ٦ ، ص = -٢ س + ٣

ب ٥ س + ص + ٥ = ٠ ، ١٠ س + ٢ ص - ٣ = ٠

جـ ص - ٢ س = ١ ، ٢ ص = ٤ س + ٢

د ٢ س + ٥ ص = ٠ ، ٥ س - ٢ ص = ٠

هـ ٣ س - ص = ٧ ، ٦ س = ٢ ص + ١٤

و أ س + ب ص + جـ = ٠ ، أ س + ب ص + ٣ جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ≠ ٠

٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص - ٨ = ٠ ، س = ص - ٢

٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

س - ص + ٣ = ٠ ، ص = ٥ س + ٧

وبالنقطة (٢ ، -١)

٤ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ٣ ص + ١٧ = ٠ ، س + ص + ٦ = ٠

، وعمودي على المستقيم ٤ س − ٣ ص = ٩

٥ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ٣ ص = ٦ ، ص = ٢

، ويوازي المستقيم ٥ س − ص = ٧

٦ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س − ٣ ص − ٥ = ٠ ، ص − ٢ س = ٠

، وعمودي على المستقيم الأول .

٧ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

ص = −س + ٦ ، س = ٢٠

، ويوازي محور السينات .

٨ إذا تقاطع المستقيمان :

٢س − ص = ١ ، س − ٢ ص + ٤ = ٠

في النقطة أ ، وقطع المستقيم الأول محور السينات في النقطة ب وقطع المستقيم الثاني محور الصادات في النقطة حـ فأوجد إحداثيي كل من أ ، ب ، حـ .

٩ إذا كانت أ (−٥ ، ١) ، ب (−١ ، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ تقطع محور السينات في حـ فأوجد إحداثيي النقطة حـ ، وإذا أقيم من حـ عمود على $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ لاقى محور الصادات في ء فأوجد إحداثيي النقطة ء .

١٠ أوجد قيمة ل التي تجعل المستقيم س − ص − ٤ + ل (س − ٥) = ٠

عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين أ (٦ ، ٢) ، ب (٢ ، −٢)

وإذا تقاطع المستقيمان السابقان في نقطة حـ فأحسب أ حـ : حـ ب

١١ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ (٢ ، −١) ، ب (−٣ ، ١) ، حـ (٥ ، −٤) ، ء (٢ ، ٦) فأوجد إحداثيي نقطة تقاطع $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$

١٢ أ ب حـ مثلث فيه أ (−١ ، ٠) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (١ ، ٣) رسم $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فقطعه في نقطة ء .

عين النقطة ء .

١٣ عين نقطة تقاطع العمود المرسوم من النقطة (−٣ ، ٢) على المستقيم ٢س − ٣ص = ١٤ ،

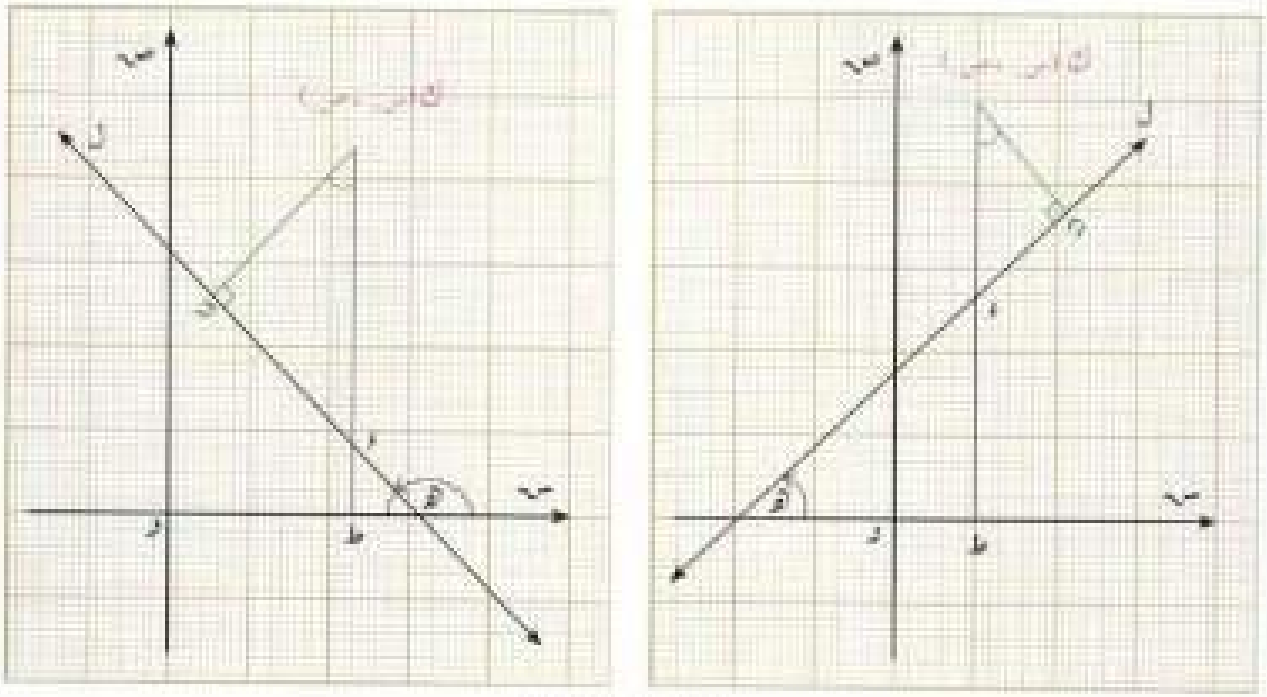
ثم أوجد طول هذا العمود .

٢-٦

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

Distance Between A Given Point and a Straright Line

بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة العمودية المرسومة من هذه النقطة على المستقيم المعلوم .



شكل (٢ - ٢٤)

من الشكل (٢ - ٢٤) بعد النقطة ك (س١ ، ص١) عن المستقيم ل : أ س + ب ص + جـ = ٠ هو طول $\overline{\text{ك ك}}$ حيث $\overline{\text{ك ك}}$ ⊥ ل

وسنقبل بدون برهان أن :

بعد النقطة ك عن المستقيم المعلوم = $\dfrac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$

حيث أ ، ب أحدهما على الأقل لا يساوي صفراً

مثال ١

أوجد بعد النقطة (٢ ، ٤) عن المستقيم : س + ٣ ص - ١ = ٠

الحل

س١ = ٢ ، ص١ = ٤ ، أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = -١

البعد = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|١ \times ٢ + ٣ \times ٤ + (-١)|}{\sqrt{١^2 + ٣^2}}$

$= \frac{|٢ + ١٢ - ١|}{\sqrt{١٠}} = \frac{|١٣|}{\sqrt{١٠}} = \frac{١٣}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول .

مثال (٢)

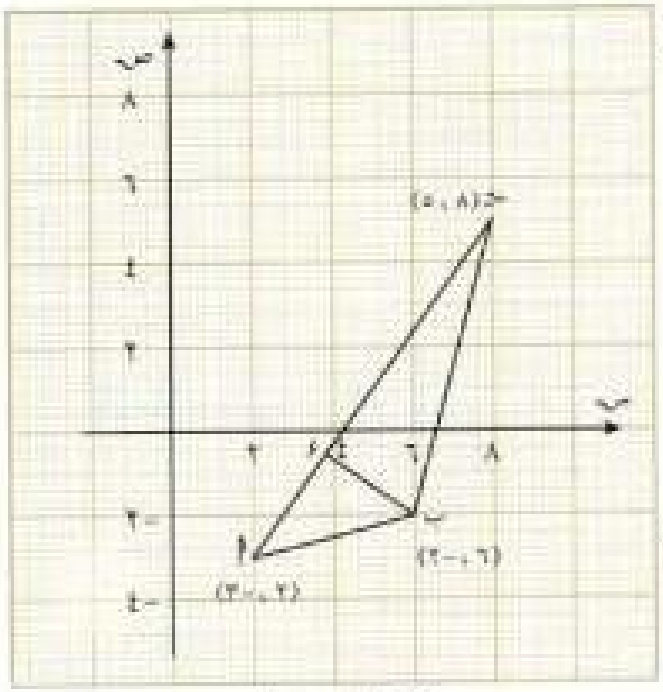
أ ب جـ مثلث فيه أ (٢ ، -٣) ، ب (٦ ، -٢) ، جـ (٨ ، ٥) أوجد :

أ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

ب طول العمود المرسوم من ب على $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

جـ طول $\overline{\text{أ جـ}}$

د مساحة المنطقة أ ب جـ .



شكل (٢ - ٢٥)

الحل

أ ميل $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} = \frac{٥ + ٣}{٨ - ٢} = \frac{٤}{٣}$

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ميله $\frac{٤}{٣}$ ويمر بالنقطة (٢ ، -٣)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ هي :

ص - (-٣) = $\frac{٤}{٣}$ (س - ٢)

٤س - ٣ ص - ١٧ = ٠

ب طول العمود المرسوم من ب (٦ ، -٢) على $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ = ب ء .

$= \frac{|(٤ \times ٦ + (-٣) \times (-٢) + (-١٧)|}{\sqrt{٤^2 + ٣^2}} = \frac{|٢٤ + ٦ - ١٧|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٣}{٥}$ وحدة طول .

جـ أ (٢ ، -٣) ، جـ (٨ ، ٥)

∴ طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = أ جـ = $\sqrt{(٢ - ٨)^2 + (-٣ - ٥)^2}$

$= \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ وحدة طول .

د مساحة المنطقة أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع .

= $\frac{١}{٢}$ أ جـ × ب د

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × $\frac{١٣}{٥}$ = ١٣ وحدة مساحة . ■

مثال ٣

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ (−١ ، ١) ، ب (−٢ ، ٢) ، جـ (−٦ ، ٤) أوجد النقطة د ، ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب جـ د .

الحل

نفرض أن م (س̄ ، ص̄) هي منتصف $\overline{أ جـ}$ ، د (س ، ص) .

∴ س̄ = $\frac{-١ + (-٦)}{٢}$ = − $\frac{٧}{٢}$

، ص̄ = $\frac{١ + ٤}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

ولكن م منتصف $\overline{ب د}$

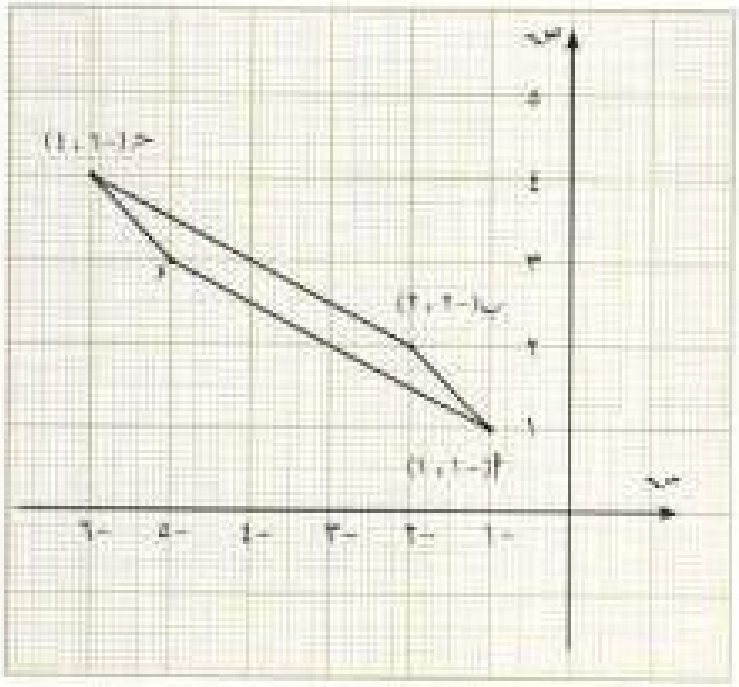
∴ − $\frac{٧}{٢}$ = $\frac{-٢ + س}{٢}$

∴ س = −٥

، $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٢ + ص}{٢}$

∴ ص = ٣

∴ النقطة د هي (−٥ ، ٣) .



شكل (٢ − ٢٦)

ميل $\overleftrightarrow{أ د}$ = $\frac{٣ - ١}{-٥ - (-١)}$ = − $\frac{١}{٢}$

$\overleftrightarrow{أ د}$ ميله = − $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة أ (−١ ، ١)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{أ د}$ هي :

ص − ١ = − $\frac{١}{٢}$ (س + ١)

س + ٢ ص − ١ = ٠

طول العمود المرسوم من ب على $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ = $\frac{|١ \times (-٢) + ٢ \times ٢ - ١|}{\sqrt{(١)^٢ + (-٢)^٢}}$

= $\frac{|-٢ + ٤ - ١|}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ وحدة طول .

أ(-١ ، ١) ، د(-٥ ، ٣)

∴ أ د = $\sqrt{(-١ + ٥)^٢ + (١ - ٣)^٢}$ = $\sqrt{٢٠}$

= ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

مساحة المنطقة أ ب جـ د = طول القاعدة × الارتفاع

= أ د × الارتفاع

= ٢ $\sqrt{٥}$ × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = ٢ وحدة مساحة .

٢-٦ تمارين

بنود موضوعية

ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$: ص - ٤ = ٠ ، $ل_٢$: ص = ٣ تبعد عن نقطة الأصل مسافة قدرها ٥ وحدات .

٢ بعد النقطة أ (١ ، - ١) عن المستقيم ل : س - ١ = ٠ يساوي ٢ وحدة طول .

٣ بعد نقطة الأصل عن المستقيم ٣ س - ٤ ص + ١٥ = ٠ يساوي ٢ وحدة طول .

٤ البعد بين المستقيمين $ك_١$: ص = ٦ ، $ك_٢$: ص = - ٣ يساوي ٣ وحدة طول .

أسئلة مقالية

١ أوجد بعد النقطة (٣ ، ٤) عن المستقيم ٥ س + ١٢ ص - ١١ = ٠

٢ أوجد بعد النقطة (٢ ، ٣) عن المستقيم ٣ س + ٤ ص - ٨ = ٠

٣ أوجد طول العمود المرسوم من (٣ ، - ١) على المستقيم ٢ س - ٥ ص - ٤ = ٠

٤ أوجد بعد النقطة (٤ ، ٢) عن المستقيم ب حـ بفرض أن ب (٢ ، - ٥) ، حـ (- ١ ، ١) .

٥ أ ب حـ مثلث فيه أ (٤ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (- ١ ، ٤) . أوجد :

أولاً : معادلة $\overleftrightarrow{أ حـ}$.

ثانياً : طول العمود المرسوم من ب على $\overleftrightarrow{أ حـ}$.

ثالثاً : طول $\overline{أ حـ}$.

رابعاً : مساحة المنطقة المثلثة أ ب حـ .

٦ إذا كانت أ (٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٠) ، حـ (- ٤ ، ٦) ، فأوجد مساحة المنطقة المثلثة أ ب حـ .

٧ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ (٣ ، ٠) ، ب (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) ، حـ (- ٢ ، ٣) . أوجد إحداثيي الرأس ء ، ثم أوجد معادلة $\overleftrightarrow{أ ء}$ ومساحة المنطقة أ ب حـ ء .

* ٨ أثبت أن المستقيمين ٤ س - ٣ ص = ٢٥ ، ٤ س - ٣ ص - ٣٥ = ٠ متوازيان ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على كل منهما واستنتج البعد بينهما .

٩ أ (٣ ، ١) ، ب (- ١ ، - ١) ، حـ (- ١ ، ٤) . أثبت أن المثلث أ ب حـ متطابق الضلعين ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب حـ .

٢ – ٧ ملخص وتمارين عامة Summary

- إذا كانت أ (س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) ، جـ (س ، ص) تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل بنسبة ل$_١$: ل$_٢$ فإنَّ :

$$\text{س} = \frac{\text{س}_١\text{ل}_١ + \text{س}_٢\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{ص}_١\text{ل}_١ + \text{ص}_٢\text{ل}_٢}{\text{ل}_١ + \text{ل}_٢}$$

- النسبة بين التغير الرأسي والتغير الأفقي الناتجين من التحرك بين نقطتين على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ثابتة مهما كانت هاتان النقطتان ، تسمى هذه النسبة **الميل** :

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$$

- ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو :

م = ظا هـ ، حيث ٠° ≤ هـ ≤ ١٨٠° ، هـ ≠ ٩٠°

- ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه نحصل عليه من :

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \quad ، \text{ بشرط } \text{س}_٢ \neq \text{س}_١$$

حيث (س$_١$ ، ص$_١$) ، (س$_٢$ ، ص$_٢$) هما النقطتان المعلومتان .

- شرط توازي مستقيمين ميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ هو م$_١$ = م$_٢$

- شرط تعامد مستقيمين ميلاهما م$_١$ ، م$_٢$ هو م$_١$ × م$_٢$ = –١

- الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي :

أس + ب ص + جـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح حيث أ ، ب أحدهما على الأقل لا يساوي صفراً .

- معادلة محور السينات هي : ص = ٠

- معادلة محور الصادات هي : س = ٠

- معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي $ص = ص_١$

- معادلة مستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي $س = س_١$

- معادلة المستقيم الذي ميله = م ويمر بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$ هي :

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$.

- معادلة المستقيم الذي ميله = م ويقطع جزءاً قدره $|هـ|$ من محور الصادات هي :

$ص = م س + هـ$

- لإيجاد ميل مستقيم علمت معادلته توجد طريقتان :

١ ضع المعادلة على الصورة $ص = م س + هـ$

فيكون معامل س هو الميل .

٢ ضع المعادلة على الصورة العامة $أ س + ب ص + جـ = ٠$

فيكون الميل $= -\frac{أ}{ب}$ ، $ب \neq ٠$

- إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين في المستوى وميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب :

$ل_١$ $أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ = ٠$

$ل_٢$ $أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ = ٠$ فإنَّ :

١ $ل_١$ يتقاطع مع $ل_٢$ إذا وفقط إذا $م_١ \neq م_٢$.

٢ $ل_١$ ، $ل_٢$ لا يتقاطعان إذا وفقط إذا $م_١ = م_٢$.

٣ $ل_١$ ينطبق على $ل_٢$ إذا نتجت معادلة أحدهما من الأخرى بالضرب في عدد حقيقي لا يساوي صفراً .

- بعد النقطة $(س_١ ، ص_١)$ عن المستقيم $أ س + ب ص + جـ = ٠$ هو :

$$ع = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

٢-٧ تمارين عامة

بنود موضوعية

أولاً : ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ المستقيم ل : س = ٣ يمر بالنقطة (-٥ ، ٣) .

٢ المستقيمان ل : س = - ١ ، م : ص = ٥ متعامدان .

٣ محور الصادات ينصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (-٢ ، ٣) ، (٢ ، ٣) .

٤ المستقيمان ل : ٢ س + ٣ ص = ١ ، م : $\frac{\text{س}}{٢}$ + $\frac{\text{ص}}{٣}$ = ١ متوازيان .

٥ النقطة (-١ ، ٢) تبعد وحدة طول واحدة عن المستقيم ل : ٣ س + ٤ ص - ١٠ = ٠

ثانياً : لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة :

١ مربع بُعد نقطة الأصل عن المستقيم ل : ٢ ص + ٣ س = ٦ يساوي :

(أ) $\frac{٦}{\sqrt{١٣}}$ (ب) $\frac{٦}{١٣}$ (جـ) $\frac{٣٦}{١٣}$ (د) ٦

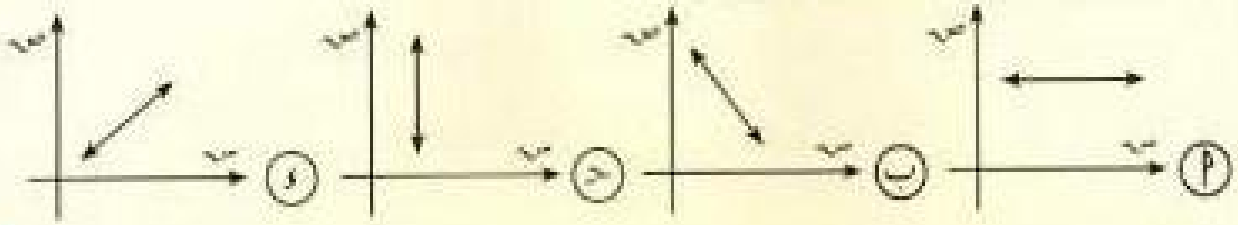
٢ المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٤) ، ب (٦ ، -٤) ، جـ (-١٥ ، -٦) :

(أ) منفرج الزاوية (ب) حاد الزوايا (جـ) قائم الزاوية (د) متطابق الأضلاع

٣ معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع ٤ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور السينات هي :

(أ) ص = ٣ س + ٤ (ب) ص = ٣ س - ١٢ (جـ) ص = ٣ س + ١٢ (د) س = ٣ ص - ١٢

٤ بيان المستقيم الذي ميله سالب فيما يلي هو :



٥ نقطة تقاطع المستقيمين ل : س + ٩ = ٠ ، م : ص = ٣ هي :

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٩ ، ٣) (جـ) (٣ ، -٩) (د) (-٩ ، ٣)

ثالثاً : في البنود التالية توجد قائمتان اختر لكل بند من القائمة (١) ما يناسبه من القائمة (٢) لتحصل على عبارة صحيحة :

القائمة (١)	القائمة (٢)
١ البعد بين النقطتين (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠) هو	(أ) $\frac{١}{٢}$ وحدة (ب) ١ وحدة
٢ البعد بين النقطة (-٢ ، ٠) والمستقيم ل : ٣ س + ٤ص + ١ = ٠ هو	(جـ) $\frac{٣}{٢}$ وحدة (د) ٢ وحدة

ليكن المستقيم ك : ص = ٣ + س فإن ميل المستقيم :

القائمة (١)	القائمة (٢)
٣ الذي يوازي المستقيم ك هو ٤ العمودي على المستقيم ك هو	(أ) ١ (ب) $-\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

أسئلة مقالية

١ أثبت أن أ (٤ ، -٣) ، ب (٠ ، ١) ، جـ (-٦ ، ٧) على استقامة واحدة . ثم أوجد النسبة التي تقسم بها النقطة ب $\overline{أجـ}$.

٢ إذا كانت أ (٣ ، -٤) ، ب (-٣ ، ٥) فأوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢ ويكون عمودياً على المستقيم ١٠ س + ١١ ص - ١٤ = ٠ .

٣ إذا كانت أ (٧ ، - ٨) ، ب (١ ، ص) ، حـ (س ، ٢) وكانت ب تقسم $\overline{\text{أحـ}}$ من الداخل بنسبة ٣ : ٢ فأوجد قيمة كل من س ، ص .

٤ أ ب حـ مثلث فيه أ (٢ ، ٣) ، ب (- ٤ ، ٤) ، حـ (٠ ، - ٥) أوجد إحداثيي نقطة م ملتقى القطع المتوسطة للمثلث أ ب حـ .

٥ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه حـ (٥ ، - ٧) ، ء (١ ، ١) ، م (٣ ، - ١) حيث م نقطة تقاطع $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$. أوجد إحداثيي كل من أ ، ب ومساحة المنطقة أ ب حـ ء .

٦ إذا كانت أ (- ٤ ، ٦) ، ب (٢ ، ٧) ، حـ (- ٤ ، - ٥) ، ء (- ٧ ، ٠) فأثبت أن أ ب حـ ء شبه منحرف ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب حـ ء .

٧ أوجد طول العمود المرسوم من أ (- ٤ ، - ٥) على المستقيم المار بالنقطتين ب (٢ ، ٣) ، حـ (- ٢ ، ٦) ثم أوجد طول الجزء المحصور بين المحورين من هذا العمود .

٨ المستقيم أب الذي معادلته س + ٢ص - ١٠ = ٠ يقطع محور السينات في أ ومحور الصادات في ب . ارسم من نقطة حـ (٥ ، ٥) عموداً على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ لاقاه في ء . أوجد أ ء : ء ب .

٩ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ (٢ ، ١) ، ب (٥ ، ٣) ، م (٣ ، ٤) حيث م هي نقطة تقاطع $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$. أوجد معادلة كل من $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ثم أوجد مساحة المنطقة أ ب حـ ء .

١٠ أ ب حـ ء معين فيه أ (٧ ، ٥) ، حـ (- ٥ ، ١) ومعادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هي

س - ص - ٢ = ٠ . أوجد :

أولاً : نقطة تقاطع القطرين $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$.

ثانياً : معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$.

ثالثاً : نقطة ب .

رابعاً : مساحة المنطقة أ ب حـ ء .

١١ إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (- ٢ ، ٣) ، ء نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ومحور السينات ، هـ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ومحور الصادات ، فأوجد إحداثيي كل من ء ، هـ ، ثم أوجد مساحة المنطقة حـ ء هـ حيث حـ (- ٢ ، - ٢) .

الفصل الثالث

الإحصاء
Statistic

٣ - ١ الرمز $\sum$ ، مدلوله وخواصه

$\sum$ حرف إغريقي ، يقرأ « سجما » ويدل على « مجموع » ،

فمثلاً : $\sum_{ر=١}^{٥} ر$ يقرأ سجما ر من ر = ١ إلى ر = ٥

ويعني مجموع ر من ر = ١ إلى ر = ٥

أي أن :

$$\sum_{ر=١}^{٥} ر = ١ + ٢ + ٣ + \cdots + ٥ ،$$

$$\sum_{ر=١}^{١٠} ر^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + ١٠^٢ ،$$

$$\sum_{ر=١}^{٥} س_ر = س_١ + س_٢ + س_٣ + \cdots + س_٥$$

أمثلة توضيحية :

مثال ١ عبر عن كل مما يلي باستخدام الرمز $\sum$

أ) $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ٨٩$

ب) $س_١ ص_١ + س_٢ ص_٢ + س_٣ ص_٣ + \cdots + س_٥ ص_٥$

جـ) $٣ \times ١^٢ + ٣ \times ٢^٢ + ٣ \times ٣^٢ + \cdots + ٣ \times ٧٥^٢$

الحل

أ) $١ + ٢ + ٣ + \cdots + ٨٩ = \sum_{ر=١}^{٨٩} ر$

ب) $س_١ ص_١ + س_٢ ص_٢ + س_٣ ص_٣ + \cdots + س_٥ ص_٥ = \sum_{ر=١}^{٥} س_ر ص_ر$

جـ) $٣ \times ١^٢ + ٣ \times ٢^٢ + ٣ \times ٣^٢ + \cdots + ٣ \times ٧٥^٢$

$= ٣ (١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + ٧٥^٢) = ٣ \sum_{ر=١}^{٧٥} ر^٢$ ■

مثال ٢ أوجد قيمة $\sum_{ر=٢}^{٥} (ر + ٣)$

الحل $\sum_{ر=٢}^{٥} (ر + ٣) = (٢ + ٣) + (٣ + ٣) + (٤ + ٣) + (٥ + ٣) = ٢٦$ ■

مثال ٣ أثبت أن $\sum_{ر=١}^{ن} ٤ر = ٤ \sum_{ر=١}^{ن} ر$

الحل

$\sum_{ر=١}^{ن} ٤ر = ٤(١) + ٤(٢) + ٤(٣) + \ldots + ٤(ن)$

$= ٤(١ + ٢ + ٣ + \ldots + ن)$

$= ٤ \sum_{ر=١}^{ن} ر$ ■

خواص الرمز Σ : Σ Properties

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإنَّ :

١ $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} أ س_ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ ، حيث أ عدد حقيقي

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} م = ن م$ ، حيث م عدد حقيقي .

البرهان :

سنبرهن الخاصية (١) في حالة الجمع فقط

١ $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = (س_١ + ص_١) + (س_٢ + ص_٢) + \ldots + (س_ن + ص_ن)$

$= (س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن) + (ص_١ + ص_٢ + \ldots + ص_ن)$

$= \sum_{ر=١}^{ن} س_ر + \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} أ س_ر = أ س_١ + أ س_٢ + \ldots + أ س_ن$

$= أ (س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن) = أ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} م = م + م + \ldots + م$ (ن من الحدود) $= ن م$

مثال ٤

أوجد قيمة كل مما يلي :

أ $\sum_{\text{س}=١}^{٥} ٧$ ب $\sum_{\text{س}=١}^{٣} ٢^{\text{س}}$ جـ $\sum_{\text{س}=١}^{٤} (٢\text{س}+١)$

الحل

أ $\sum_{\text{س}=١}^{٥} ٧ = ٥ \times ٧ = ٣٥$ الخاصية (٣)

ب $\sum_{\text{س}=١}^{٣} ٢^{\text{س}} = ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣}$

$= ٢ + ٤ + ٨ = ١٤$

جـ $\sum_{\text{س}=١}^{٤} (٢\text{س}+١) = \sum_{\text{س}=١}^{٤} ٢\text{س} + \sum_{\text{س}=١}^{٤} ١$ خاصية (١)

$= ٢ \sum_{\text{س}=١}^{٤} \text{س} + ٤ \times ١$ لماذا ؟

$= ٢(١ + ٢ + ٣ + ٤) + ٤$

$= ٢ \times ١٠ + ٤ = ٢٤$ ■

٣ - ١ تمارين

١ أوجد قيمة كل مما يلي :

أ $\sum_{\text{س}=١}^{٤}$ س

ب $\sum_{\text{س}=٢}^{٥}$ (س^{٢} - ٣)

جـ $\sum_{\text{س}=١}^{٨}$ ٨

د $\sum_{\text{س}=١}^{٤}$ (٥ × ٢^{س} + ٣س)

هـ $\sum_{\text{س}=٢}^{٥}$ $\frac{١}{\text{س}}$

٢ أوجد مفكوك كل مما يلي :

أ $\sum_{\text{ت}=٢}^{٥}$ ت

ب $\sum_{\text{س}=٢}^{٥}$ (٣س^{٢} - ٥)

جـ $\sum_{\text{س}=١}^{٤}$ ٣^{س}

٣ عبر عن كل مما يلي باستخدام الرمز $\sum$:

أ ٣ + ٤ × ١ + ٣ + ٤ × ٢ + ٣ + ٤ × ٣ + ... + ٣ + ٤ × ٢٠٠

ب (١ + $\frac{٢}{١}$) + (٢ + $\frac{٢}{٢}$) + (٣ + $\frac{٢}{٣}$) + ... + (٥ + $\frac{٢}{٥}$)

٣ - ٢

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tedencey

في كثير من التوزيعات التكرارية تميل عادة المفردات إلى التجمع حول قيمة معينة ، ويقل هذا الميل تدريجياً كلما ابتعدنا عن هذه القيمة من الجانبين .

تعريف

النزعة المركزية : هي ميل المفردات إلى التجمع حول قيمة معينة .

تعريف

القيمة المتوسطة : هي القيمة التي تميل المفردات إلى التجمع حولها .

والقيمة المتوسطة تُعيّن بأحد مقاييس ثلاثة تعرف باسم « مقاييس النزعة المركزية » وهي :

- المتوسط (أو المتوسط الحسابي) .
- الوسيط .
- المنوال .

المتوسط الحسابي : (Arithmetic Mean)

المتوسط الحسابي هو أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها شيوعاً ، وقد سبق لك دراسته في صفوف سابقة ، ونقدمه لك الآن بشيء من الاختصار وباستخدام الرمز الجديد $\sum$.

المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم :

$س_1 ، س_2 ، س_3 ، \ldots ، س_ن$ هو :

$$\text{المتوسط الحسابي } \bar{س} = \frac{\sum_{ت=1}^{ن} س_ت}{ن}$$

وفي حالة وجود تكرار لبعض القيم كما في التوزيع التكراري البسيط :

القيم $س_م$: $س_1 ، س_2 ، س_3 ، \ldots ، س_م$

التكرار $ت_م$: $ت_1 ، ت_2 ، ت_3 ، \ldots ، ت_م$ فإن :

المتوسط الحسابي لهذا التوزيع هو :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ك} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر}$$

حيث $\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر = ن$ = مجموع التكرارات .

وفي حالة التوزيع التكراري ذي الفئات ، يتعين المتوسط الحسابي كما سبق ولكن بأخذ مراكز الفئات للتعبير عن قيم $س_ر$.

مثال ١

التوزيع التكراري التالي لدرجات ٢٠٠ طالب في مادة ما حيث النهاية العظمى ٢٠ درجة أوجد المتوسط الحسابي للدرجات :

الفئة	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-	١٧-	١٩-
التكرار	٥	١٥	٣٥	٧٠	٤٠	٢٠	١٠	٥

الحل

نكون الجدول التالي :

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	$س_ر \times ت_ر$
٥-	$\frac{٥ + ٧}{٢} = ٦$	٥	٣٠
٧-	٨	١٥	١٢٠
٩-	١٠	٣٥	٣٥٠
١١-	١٢	٧٠	٨٤٠
١٣-	١٤	٤٠	٥٦٠
١٥-	١٦	٢٠	٣٢٠
١٧-	١٨	١٠	١٨٠
١٩-	٢٠	٥	١٠٠
المجموع		٢٠٠	٢٥٠٠

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ك} (س_ر \, ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر} = \frac{٢٥٠٠}{٢٠٠} = ١٢,٥$$

لتبسيط الحسابات **نأخذ وسطاً فرضياً ف** (يفضل أن يكون مركز الفئة الذي يقابل أكبر تكرار) ونستخدم القانون التالي لحساب المتوسط الحسابي :

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum_{ر=١}^{ك} ع_ر \, ت_ر}{\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر}$$

حيث ف الوسط الفرضي ، $ع_ر = س_ر - ف$ هي انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي لكل فئة تسمى هذه الطريقة **بالطريقة المختصرة** وسنوضحها بالمثال التالي :

مثال ٢

سجلت درجة حرارة الجو في ٢٥٠ مدينة في مناطق متفرقة بالعالم فكانت كما في التوزيع التالي ، أوجد متوسط درجة الحرارة لهذا التوزيع :

الفئة	٢٠-	٢٣-	٢٦-	٢٩-	٣٢-	٣٥-	٣٨-	٤١-	٤٤-
التكرار	١٥	٣٢	٧	٨	٥١	٦٤	٤٣	١٣	١٧

الحل

نكون الجدول الآتي مع أخذ ف = ٣٣,٥ (مثلاً)

(كان بالإمكان أخذ ف = ٣٦,٥ باعتبارها القيمة التي تقابل أكبر تكرار)

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ت_ر$	الانحراف عن ف $ع_ر = س_ر - ف$	$ع_ر \times ت_ر$
٢٠-	٢١,٥	١٥	١٢-	١٨٠-
٢٣-	٢٤,٥	٣٢	٩-	٢٨٨-
٢٦-	٢٧,٥	٧	٦-	٤٢-
٢٩-	٣٠,٥	٨	٣-	٢٤-
٣٢-	٣٣,٥	٥١	٠	٠
٣٥-	٣٦,٥	٦٤	٣	١٩٢
٣٨-	٣٩,٥	٤٣	٦	٢٥٨
٤١-	٤٢,٥	١٣	٩	١١٧
٤٤-	٤٥,٥	١٧	١٢	٢٠٤
		٢٥٠		٢٣٧

ويكون $\bar{س} = ف + \frac{\sum_{١}^{ك} (ع_ر \times ت_ر)}{\sum_{١}^{ك} ت_ر}$

$= ٣٣,٥ + \frac{٢٣٧}{٢٥٠} = ٣٤,٤٤٨$ (استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد نواتج العمليات).

٣ - ٢ م

تمارين

١ فيما يلي درجات ١٠ طلاب في امتحان نهايته العظمى ٢٥ :

١٠ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٨ ، ٢٥ ، ١٥

أوجد المتوسط الحسابي للدرجات .

٢ إذا كان مجموع درجات ١٠ طلاب في أحد الامتحانات ٥٨٠ ، ومتوسط درجات تسعة منهم ٦٠ فما درجة الطالب العاشر؟

٣ إذا كان المتوسط الحسابي لسبع قيم يساوي ٣٥ فما مجموع انحرافات هذه القيم عن القيمة ٣٢ ؟

٤ احسب المتوسط الحسابي للتوزيع التالي :

الدرجة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٣	٥	٧	٨	١٢	٩	٦	٥	٤	١

٥ الجدول الآتي يوضح توزيعاً تكرارياً لأجور ٥٠ عاملاً في اليوم بالريال :

الفئة	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	٤٤-	٤٨-	٥٢-
التكرار	٢	٣	٦	٨	١١	٨	٦	٥	١

أوجد المتوسط الحسابي للأجور بالطريقة العادية وبالطريقة المختصرة .

الوسيط : Median

الوسيط - لمجموعة من القيم عددها ن مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً - هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$ عندما تكون ن فردية ، أما إذا كانت ن زوجية فإنَّ الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$

مثال ٣

عين الوسيط لكل من :

١ ١٣ ، ٥ ، ٤٧ ، ٢٧ ، ١٢ ، ١٥ ، ٥٠

٢ ٦٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٤٢ ، ١١ ، ٨٧

الحل

١ القيم مرتبة تصاعدياً هي :

٥ ، ١٢ ، ١٣ ، $\boxed{١٥}$ ، ٢٧ ، ٤٧ ، ٥٠

∴ ترتيب الوسيط = $\frac{٧ + ١}{٢}$ = ٤

∴ الوسيط = ١٥ = القيمة الرابعة

٢ القيم مرتبة تصاعدياً هي :

١١ ، ١٥ ، $\boxed{٣٠ ، ٤٢}$ ، ٦٥ ، ٨٧

∴ الوسيط = المتوسط الحسابي للقيمتين ٣٠ ، ٤٢ (الثالثة والرابعة)

= $\frac{٣٠ + ٤٢}{٢}$ = ٣٦

إيجاد الوسيط لتوزيع تكراري بيانياً سبق لك دراسته ، والآن تقدم لك طريقة إيجاده حسابياً من خلال المثال التالي :

مثال ٤

أوجد الوسيط للتوزيع التالي :

الفئات	١٠-	١٣-	١٦-	١٩-	٢٢-	٢٥-	٢٨-
التكرار	٢	١	١١	٢٥	٨	٤	٣

الحل

- نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد :

الفئات	التكرار	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
١٠-	٢	أقل من ١٣	٢
١٣-	١	« ١٦	٣
١٦-	١١	« ١٩	١٤ ← ٢٧
١٩-	٢٥	« ٢٢	٣٩
٢٢-	٨	« ٢٥	٤٧
٢٥-	٤	« ٢٨	٥١
٢٨-	٣	« ٣١	٥٤

- نعين ترتيب الوسيط :

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$

= $\frac{\sum ت}{٢}$ = ٢٧

- نعين الفئة الوسيطية :

حيث إن ترتيب الوسيط = ٢٧

وحيث إن ٢٧ تقع بين ١٤ ، ٣٩

∴ الفئة الوسيطية هي الفئة ١٩- (تعني من ١٩ إلى أقل من ٢٢)

- توجد الوسيط :

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

$$= ١٩ + \frac{٢٧ - ١٤}{٢٥} \times ٣$$

$$= ١٩ + \frac{١٣}{٢٥} \times ٣$$

$$= ١٩ + ١,٥٦ = ٢٠,٥٦$$

المنوال : Mode

تعلم أن المنوال هو المفردة الأكثر تكراراً (أو شيوعاً) في التوزيع .

مثال ٥

أوجد المنوال لكل من :

١ ٢٧ ، ٢٨ ، ١ ، ١٢ ، ٢٧ ، ٢٥ ، ٢٧

٢ ١٥ ، ١٢ ، ٧ ، ١٢ ، ٢٣ ، ١ ، ٨ ، ١٥

٣ ٢٥ ، ١٩ ، ٣٠ ، ١٧ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٨ ، ٣٢

الحل

١ تكرار القيمة ٢٧ هو ٣ ، وهو أكبر من تكرار أي قيمة أخرى في التوزيع .

∴ المنوال = ٢٧

٢ تكرار كل من القيمتين ١٥ ، ١٢ يساوي ٢ ، وهو أكبر من تكرار أي قيمة أخرى في التوزيع .

∴ للتوزيع منوالان هما ١٥ ، ١٢

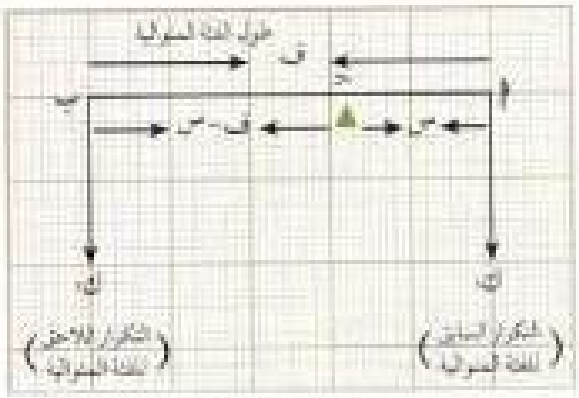
٣ جميع القيم متساوية في التكرار .

∴ لا يوجد قيمة يقال إنها أكثر شيوعاً .

∴ لا يتعين المنوال لهذا التوزيع

ولحساب المنوال لتوزيع تكراري :

- نعين الفئة المنوالية وهي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار .
- نعين التكرار السابق (ك$_{ب}$) والتكرار اللاحق (ك$_{ل}$) لتكرار الفئة المنوالية .
- المنوال يقسم الفئة المنوالية بنسبة ك$_{ب}$: ك$_{ل}$ شكل (٣ - ١)



شكل (٣ - ١)

فإذا كان ف = طول الفئة المنوالية ، حـ نقطة التقسيم ، فإنّ :

المنوال = الحد الأدنى للفئة المنوالية + س

حيث س نحصل عليها بتطبيق قانون الرافعة

وتعرف هذه الطريقة باسم « طريقة الرافعة » ونوضحها في المثال التالي :

مثال ٦

أوجد المنوال للتوزيع الآتي الذي يمثل درجات ٣٢ طالباً في أحد الاختبارات (النهاية العظمى للاختبار ١٠٠) :

الفئة	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٢	٣	٦	٨	٥	٣	٢	٢	١

الحل

أكبر تكرار = ٨

الفئة المنوالية هي ٤٠-

الحد الأدنى للفئة المنوالية = ٤٠

التكرار السابق ك$_{ب}$ = ٦

التكرار اللاحق ك$_{ل}$ = ٥

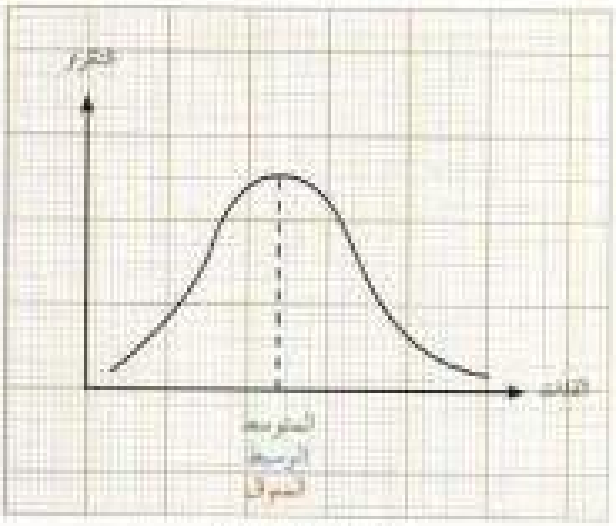
∴ المنوال = ٤٠ + س

حيث : ٦ × س = ٥ (١٠ − س)

٦س = ٥٠ − ٥س

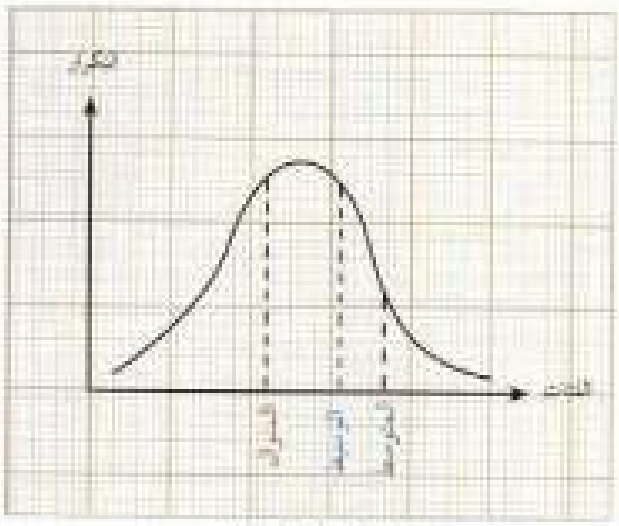
س = $\frac{٥٠}{١١}$ ≈ ٤,٦

∴ المنوال ≈ ٤٤,٦ ■



شكل (٣ - ٢)

لعلك تلاحظ أن المنوال أسهل مقاييس النزعة المركزية حساباً ، ولكن يجب أن تعلم أنه أقلها دقة فهو يعتمد على قيمة واحدة في التوزيع وهي القيمة ذات التكرار الأكبر .



شكل (٣ - ٣)

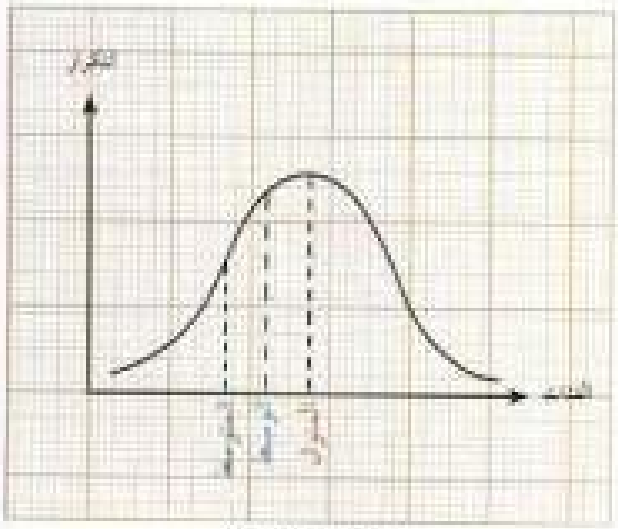
العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

١ في الشكل (٣ - ٢)

المتوسط = الوسيط = المنوال ، ويكون المنحنى في هذه الحالة معتدلاً ويسمى التوزيع هنا « توزيعاً معتدلاً » .

٢ في الشكل (٣ - ٣)

المنوال < الوسيط < المتوسط ، يسمى التوزيع « توزيعاً ذا التواء موجب » .



شكل (٣ - ٤)

٣ في الشكل (٣ - ٤)

المتوسط < الوسيط < المنوال ، يسمى التوزيع « توزيعاً ذا التواء سالب » .

٣ - ٢ب تمارين

١ أوجد الوسيط والمنوال لكل من :

أ ٦٠ ، ٦٥ ، ٧٠ ، ٧٥ ، ٧٥ ، ٨٠ ، ٦٩ ، ٨٠

ب ٨ ، ٧ ، ١٢ ، ١٢ ، ٩ ، ١٦ ، ١٢ ، ٨ ، ١٨ ، ١٢ ، ١٥

جـ ٧٠ ، ٧٠ ، ٦٠ ، ٤ ، ٦٤ ، ٥٤ ، ٥٨ ، ١

٢ أوجد الوسيط والمنوال لكل من :

أ

الفئات	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-
التكرار	٢	١	١	٤	٣

ب

الفئات	٤٢-	٤٩-	٥٦-	٦٣-	٧٠-	٧٧-	٨٤-
التكرار	٣٣	٢١	٥٢	٦٧	٣٣	٢١	٢١

٣ إذا كانت درجات ٧٠٠ طالب في امتحان ما موزعة كما في الجدول :

الفئات	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٣٠	١٧	٩٣	١١٢	١٨٧	٨٧	٩٣	٨١

فاحسب كلاً من المتوسط والوسيط والمنوال .

٣ - ٣

مقاييس التشتت Measures of Dispersion

لا شك في أن مقاييس النزعة المركزية : المتوسط والوسيط والمنوال لها أهميتها ، فهي تعطي معلومات مفيدة وقيمة عن التوزيع ، غير أن هذه المعلومات قد تكون غير كافية أحياناً للمقارنة بين توزيعين مختلفين . . . لنأخذ على سبيل المثال الموقف التالي :

في خمسة اختبارات حصل طالبان على الدرجات الآتية مرتبة تصاعدياً (النهاية العظمى للاختبار ١٠٠) :

الطالب الأول :	٤٥	٤٩	٥٠	٥١	٦٥
الطالب الثاني :	٢٠	٤٠	٥٠	٦٠	٩٠

متوسط الدرجات في الحالتين واحد ويساوي $\frac{٢٦٠}{٥} = ٥٢$

والوسيط واحد في الحالتين ويساوي ٥٠

ولكن ، هل يعني ذلك تكافؤ الطالبين في مستوى التحصيل؟

وهل يعني ذلك عدم وجود فوارق بين مجموعتي الدرجات؟

لعلك تلاحظ أن درجات الطالب الأول متقاربة بعضها من بعض فهي موزعة بين ٤٥ ، ٦٥ في حين أن درجات الطالب الثاني متباعدة فهي موزعة بين ٢٠ ، ٩٠ وهذا يدل على أن التباعد بين مفردات المجموعة الثانية أكبر منه بين مفردات المجموعة الأولى . أي أن مجموعتي الدرجات ليست متكافئة إحصائياً رغم تساوي المتوسطين والوسيطين .

نرى مما سبق أن مقاييس النزعة المركزية قد لا تكفي وحدها لتحقيق مقارنة دقيقة بين مجموعتين من القيم ، وأنه لوصف مجموعة من القيم وصفاً دقيقاً أو عند المقارنة بين مجموعتين من القيم مقارنة صحيحة ينبغي البحث عن نوع آخر من المقاييس تحدد مدى التقارب أو التباعد بين القيم في كل مجموعة ، وبمعنى آخر ، تحدد مقدار تشتت هذه القيم .

ويكون التشتت كبيراً إذا كانت القيم متباعدة داخل المجموعة ، ويكون صغيراً إذا كانت متقاربة داخل المجموعة .

وهناك مقاييس عدة للتشتت تختلف من حيث طرق حسابها ومن حيث مجال استخدامها كما وأنها تختلف من حيث دقتها . وسنعرض فيما يلي أنواعاً مختلفة لمقاييس التشتت :

المدى : Range

تعريف

المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع

وهو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها حساباً إذ إنه لا يستلزم سوى البحث عن أكبر قيمة وأصغر قيمة .

مثال ١

عين المدى لكل من التوزيعين :

أ ٦ ، ٨ ، ٤١ ، ١٣ ، ١٢ ، ١٦ ، ١١

ب ٥ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٧ ، ١٢ ، ١٤

الحل

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

بالنسبة للتوزيع الأول :

المدى = ٤١ - ٦ = ٣٥

وبالنسبة للتوزيع الثاني :

المدى = ٢٠ - ٥ = ١٥

مثال ٢

أوجد المدى بالنسبة للتوزيع التالي :

الفئة	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-
التكرار	٥	٤	٨	٦	٧

الحل

المدى = الحد الأعلى لأكبر فئة - الحد الأدنى لأصغر فئة

= ٣٠ - ٥ = ٢٥

وعلى الرغم من بساطة حساب المدى ، إلا أنه أقل مقاييس التشتت دقة فقد يؤدي بنا إلى نتائج مضللة وخاطئة أحياناً ، فمثلاً ، ما توصلنا إليه في المثال السابق يقودنا إلى القول إن المجموعة ب ذات المدى الأصغر أكثر تجانساً من المجموعة أ ذات المدى الأكبر ، رغم أننا لو أهملنا القيمة ٤١ من المجموعة أ باعتبارها قيمة متطرفة لحصلنا على عكس ذلك حيث سيصبح المدى بالنسبة للمجموعة أ يساوي ١٦ - ٦ = ١٠ وتكون المجموعة أ هي الأكثر تجانساً .

لذلك ، سنلجأ إلى مقياسين آخرين نتخلص بهما من أثر القيم المتطرفة وهما :

التباين والانحراف المعياري The Variance and Standard Deviation

إذا كان لدينا ن من القيم :

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، . . . ، س_ن$

وكان وسطها الحسابي $\overline{س}$ ، فإن انحرافات هذه القيم عن $\overline{س}$ هي :

$س_١ - \overline{س} ، س_٢ - \overline{س} ، س_٣ - \overline{س} ، . . . ، س_ن - \overline{س}$

تعلم أن مجموع هذه الانحرافات = صفراً ، ولكن إذا أهملنا الإشارة وأوجدنا متوسط هذه الانحرافات فإنه يمكن اعتبار الناتج ممثلاً لمقدار تشتت تلك القيم .

ومن الممكن التغلب على الإشارات الموجبة والسالبة للانحرافات عن المتوسط بشكل آخر وذلك عن طريق إيجاد مربعاتها وهي :

$(س_١ - \overline{س})^٢ ، (س_٢ - \overline{س})^٢ ، (س_٣ - \overline{س})^٢ ، . . . ، (س_ن - \overline{س})^٢$

فإذا رمزنا لمتوسط مربعات الانحرافات عن المتوسط بالرمز $ع^2$ فإن :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن} = \text{التباين}$$

يسمى $ع^2$ تباين المجموعة $س_1 ، س_2 ، س_3 ، ... ، س_ن$

ويسمى $ع$ (الجذر التربيعي للتباين) الانحراف المعياري لها .

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن}} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال ٣

أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم التالية :

٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٦ ، ١

الحل

$$\bar{س} = \frac{٥ + ٧ + ٨ + ٩ + ٦ + ١}{٦} = ٦$$

القيمة س	الانحراف عن المتوسط $س_ر - \bar{س}$	مربع الانحراف عن المتوسط $(س_ر - \bar{س})^2$
٥	١-	١
٧	١	١
٨	٢	٤
٩	٣	٩
٦	٠	٠
١	٥-	٢٥
المجموع ٣٦		المجموع ٤٠
$\bar{س} = ٦$		$ع^2 = \frac{٤٠}{٦} \approx ٦,٧$

∴ التباين ≈ ٦,٧ ، والانحراف المعياري = $\sqrt{٦,٧} \approx ٢,٦$

مثال ٤

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي (٧) ، وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها يساوي (٩٨٠) فأوجد عدد القيم .

الحل

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن}}$$

$$\therefore ٧ = \sqrt{\frac{٩٨٠}{ن}}$$

$$\therefore ٤٩ = \frac{٩٨٠}{ن}$$ ومنها $ن = ٢٠$

التباين والانحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط

إذا كانت القيم : $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \ldots ، س_ن$

تكراراتها : $ت_١ ، ت_٢ ، ت_٣ ، \ldots ، ت_ن$ فإن :

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} \left[(س_ر - \bar{س})^٢ \times ت_ر \right]}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

والانحراف المعياري = $ع$.

مثال ٥

أوجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة القيم :

١٥ ، ٩ ، ٧ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٩ ، ٢٠ ، ٨

الحل

لدينا توزيع تكراري بسيط :

القيمة	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٥	٢٠
التكرار	١	١	٢	١	١	٣	١

المتوسط $\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \text{ت}_{\text{ر}}}{\text{ن}} = \frac{١٢٠}{١٠} = ١٢$

لحساب التباين ، نكون الجدول التالي :

$\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{ت}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}}$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})^{٢} \times \text{ت}_{\text{ر}}$
٧	١	٥-	٢٥	٢٥
٨	١	٤-	١٦	١٦
٩	٢	٣-	٩	١٨
١٠	١	٢-	٤	٤
١٢	١	٠	٠	٠
١٥	٣	٣	٩	٢٧
٢٠	١	٨	٦٤	٦٤
	١٠			١٥٤

$$\text{ع}^{٢} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \left[(\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})^{٢} \times \text{ت}_{\text{ر}} \right]}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ت}_{\text{ر}}}$$

$$= \frac{١٥٤}{١٠} = ١٥,٤$$

$$\text{ع} = \sqrt{١٥,٤} \approx ٣,٩٢$$

التباين والانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي فئات

لا يختلف الحال كثيراً عنه في حالة التوزيع التكراري البسيط ، حيث نأخذ هنا انحرافات مراكز الفئات بدلاً من انحرافات القيم .

مثال ٦

أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للتوزيع التالي :

الأجر	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
عدد العمال	٢	٣٠	٣٨	٢٠	٥	٣	٢

الحل

المدى = ٤٠ − ٥ = ٣٥

ولحساب التباين والانحراف المعياري ، نكون الجدول الآتي حيث $\overline{س}$ المتوسط ، $س_ر$ مراكز الفئات ، $ت_ر$ التكرارات المناظرة مستخدمين حاسبة الجيب :

الفئة	$س_ر$	$ت_ر$	$س_ر \times ت_ر$	$س_ر - \overline{س}$	$(س_ر - \overline{س})^2$	$(س_ر - \overline{س})^2 \times ت_ر$
٥−	٧,٥	٢	١٥	−١٠,٦٥	١١٣,٤٢٢٥	٢٢٦,٨٤٥
١٠−	١٢,٥	٣٠	٣٧٥	−٥,٦٥	٣١,٩٢٢٥	٩٥٧,٦٧٥
١٥−	١٧,٥	٣٨	٦٦٥	−٠,٦٥	٠,٤٢٢٥	١٦,٠٥٥
٢٠−	٢٢,٥	٢٠	٤٥٠	٤,٣٥	١٨,٩٢٢٥	٣٧٨,٤٥
٢٥−	٢٧,٥	٥	١٣٧,٥	٩,٣٥	٨٧,٤٢٢٥	٤٣٧,١١٢٥
٣٠−	٣٢,٥	٣	٩٧,٥	١٤,٣٥	٢٠٥,٩٢٢٥	٦١٧,٧٦٧٥
٣٥−	٣٧,٥	٢	٧٥	١٩,٣٥	٣٧٤,٤٢٢٥	٧٤٨,٨٤٥
		١٠٠	١٨١٥			٣٣٨٢,٧٥

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{٥} س_ر ت_ر}{\sum_{ر=١}^{٥} ت_ر} = \frac{١٨١٥}{١٠٠} = ١٨,١٥$$

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=١}^{٥} \left[(س_ر - \overline{س})^2 \times ت_ر \right]}{\sum_{ر=١}^{٥} ت_ر}$$

$$= \frac{٣٣٨٢,٧٥}{١٠٠} = ٣٣,٨٢٧٥$$

$$ع = \sqrt{٣٣,٨٢٧٥} \approx ٥,٨١٦١$$

مثال ٧

أوجد الانحراف المعياري للتوزيع التالي :

الفئة	٢٠-	٢٣-	٢٦-	٢٩-	٣٢-	٣٥-	٣٨-	٤١-	٤٤-
التكرار	١٥	٣٢	٧	٨	٥١	٦٤	٤٣	١٣	١٧

الحل

نكون الجدول الآتي مستخدمين حاسبة الجيب الإلكترونية :

الفئة	$س_ر$	$ت_ر$	$س_ر \times ت_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^2$	$(س_ر - \bar{س})^2 \times ت_ر$
٢٠-	٢١,٥	١٥	٣٢٢,٥	١٢,٩٤٨-	١٦٧,٦٥٠٧	٢٥١٤,٧٦٠٥
٢٣-	٢٤,٥	٣٢	٧٨٤	٩,٩٤٨-	٩٨,٩٦٢٧	٣١٦٦,٨٠٦٤
٢٦-	٢٧,٥	٧	١٩٢,٥	٦,٩٤٨-	٤٨,٢٧٤٧	٣٣٧,٩٢٢٩
٢٩-	٣٠,٥	٨	٢٤٤	٣,٩٤٨-	١٥,٥٨٦٧	١٢٤,٦٩٣٦
٣٢-	٣٣,٥	٥١	١٧٠٨,٥	٠,٩٤٨-	٠,٨٩٨٧	٤٥,٨٣٣٧
٣٥-	٣٦,٥	٦٤	٢٣٣٦	٢,٠٥٢	٤,٢١٠٧	٢٦٩,٤٨٤٨
٣٨-	٣٩,٥	٤٣	١٦٩٨,٥	٥,٠٥٢	٢٥,٥٢٢٧	١٠٩٧,٤٧٦١
٤١-	٤٢,٥	١٣	٥٥٢,٥	٨,٠٥٢	٦٤,٨٣٤٧	٨٤٢,٨٥١١
٤٤-	٤٥,٥	١٧	٧٧٣,٥	١١,٠٥٢	١٢٢,١٤٦٧	٢٠٧٦,٤٩٣٩
		٢٥٠	٨٦١٢			١٠٤٧٦,٣٢٣

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ت_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر} = \frac{٨٦١٢}{٢٥٠} = ٣٤,٤٤٨$$

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} \left[(س_ر - \bar{س})^2 ت_ر\right]}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر} = \frac{١٠٤٧٦,٣٢٣}{٢٥٠} = ٤١,٩٠٥٢٩٢$$

ع = الانحراف المعياري ≈ ٦,٤٧٣

٣-٣ تمارين

١ أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لكل من التوزيعات التالية :

أ ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٢ ، ٣١ ، ٣٨ ، ٨٠

ب ٨ ، ٨ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٠ ، ٥

جـ ٧ ، ٩ ، ١٢ ، ١٦ ، ٩٠ ، ٥ ، ١

د ١٣٠ ، ٥٨٧ ، ٤٢١ ، ٣٢٩ ، ٤٢١ ، ٧٤٢ ، ٨٧

٢ فيما يلي توزيع العمال في إحدى المؤسسات حسب أيام تغيبهم خلال عام :

عدد الأيام	١	٢	٥	٦	٧	١٠	١٢
التكرار	٩٥	٨	٢٦	١٥	١	١٧	١٣

أوجد الانحراف المعياري للتوزيع .

٣ إذا كانت درجات ٢٦٠ طالباً في أحد الاختبارات موزعة كالتالي :

الدرجة	٣٢	٣١	٣٥	٦٧	٧٠	٨٧
التكرار	٢٥	٦٢	١٩	٣١	٤٦	٧٧

فأوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للدرجات .

٤ الجدول التالي يبين التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في امتحان نصف العام والمطلوب حساب الانحراف المعياري .

الدرجة	٠-	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-	١٠٠-
عدد الطلبة	١٥	٣	٣٠	٤٠	٨	٤

٥ التوزيع الآتي لنسب ذكاء ٥٠٠ طالب في إحدى المدارس ، والمطلوب :

أ حساب المتوسط والوسيط والمنوال .

ب المدى والتباين والانحراف المعياري .

نسبة الذكاء	٨٠-	٨٤-	٨٨-	٩٢-	٩٦-	١٠٠-	١٠٤-	١٠٨-	١١٢-
التكرار	٧	١٥	٧٦	٨٣	١٣٥	٩٢	٥١	٢٢	١٩

٦ أوجد أ المتوسط والوسيط والمنوال .

ب المدى والتباين والانحراف المعياري .

وذلك للتوزيع التالي :

الفئات	٥-	٧-	٩-	١١-	١٣-	١٥-	١٧-	١٩-
التكرار	١٥	٦٢	٣٥	٧٦	٤٢	٢٠	٣٥	٥

٣ - ٤ ملخص وتمارين عامة

Summary

- الرمز $\sum$:

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً :

$$\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر + \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر ،$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} أ س_ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر ،$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} م = ن م ، \text{ حيث } م \in ح .$$

- مقاييس النزعة المركزية :

★ المتوسط الحسابي لمجموعة قيم $س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن$ هو :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

★ المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بسيط هو :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ك} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر}$$

حيث $س_ر$ القيم ، $ت_ر$ تكراراتها .

★ المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي فئات هو :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ك} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ك} ت_ر}$$

حيث $س_ر$ مراكز الفئات ، $ت_ر$ تكراراتها .

* المتوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي هو :

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum_{ر=1}^{ك} (ع_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=1}^{ك} ت_ر}$$

حيث ف الوسط الفرضي ، $ع_ر$ الانحرافات عن الوسط الفرضي (للقيم في حالة التوزيع البسيط ولمراكز الفئات في حالة التوزيع ذي الفئات) .

* الوسيط هو القيمة التي تتوسط التوزيع .

الوسيط بالنسبة لمجموعة قيم هو القيمة التي ترتيبها $\frac{ن+1}{2}$ إذا كانت ن فردية ، والمتوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{2}$ ، $\frac{ن}{2}+1$ إذا كانت ن زوجية ، وذلك عند ترتيب هذه القيم تصاعدياً أو تنازلياً .

أما الوسيط في حالة التوزيع التكراري يساوي :

$$\text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

* المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع .

* في التوزيع المعتدل :

المتوسط = الوسيط = المنوال

وفي التوزيع ذي الالتواء الموجب :

المنوال < الوسيط < المتوسط

وفي التوزيع ذي الالتواء السالب :

المتوسط < الوسيط < المنوال .

- مقاييس التشتت :

★ المدى = الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في التوزيع

= الحد الأعلى لأكبر فئة - الحد الأدنى لأصغر فئة .

★ التباين لمجموعة قيم يساوي :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن}$$

★ التباين لتوزيع تكراري بسيط يساوي :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \left[(س_ر - \bar{س})^2 \, ت_ر \right]}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$ ، حيث $س_ر$ قيم الفئات

★ التباين لتوزيع تكراري ذي فئات يساوي :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \left[(س_ر - \bar{س})^2 \, ت_ر \right]}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$ ، حيث $س_ر$ مراكز الفئات

★ الانحراف المعياري = ع .

٣ - ٤ تمارين عامة

بنود موضوعية

أولاً : ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ المدى لمجموعة القيم ١ ، ١٠ ، ٥ ، ٨ ، ٧ يساوي ٦

٢ إذا كان التباين لمجموعة قيم = ٤ فإن الانحراف المعياري = ١٦

٣ الوسيط لمجموعة القيم ٧ ، ٨ ، ٥ ، ٤ ، ٢ ، ٦ يساوي $٥\frac{١}{٢}$

٤ اذا كان المنوال يساوي ٣ لمجموعة القيم ٣ ، ٥ ، (٧ - ٢س) ، ٤ ، ٢ فإن س = ٢

٥ $٢ \times ١^٢ + ٢ \times ٢^٢ + ٢ \times ٣^٢ + \ldots + ٢ \times ١٧^٢ = ٢ \sum_{س=١}^{١٧} س^٢$

٦ مجموع انحرافات أي مجموعة من القيم عن متوسطها الحسابي يساوي صفراً .

ثانياً : لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة :

١ $\sum_{س=١}^{١٠} ٤ =$

(أ) ٤٠ (ب) ٣٢ (ج) ٢٨ (د) ١٢

٢ إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم = ٣ وكان مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي = ١٨٠ فإن عدد هذه القيم هو :

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٠ (د) ٦٠

٣ اذا كان مجموع درجات ٥ طلاب في أحد الاختبارات = ٤٥ درجة ومتوسط درجات أربعة طلاب منهم هو ٨ درجات فإن درجة الطالب الخامس هي :

(أ) ٨ (ب) ١٣ (ج) ٣٢ (د) ٣٧

٤ اذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة القيم ٣ ، ٠ ، ٧ ، ٩ ، س يساوي ٦ فإن س =

(أ) ٥ (ب) ١١ (ج) ١٣ (د) ١٩

٥ $٣ \times ١^{٢} + ٣ \times ٢^{٢} + ٣ \times ٣^{٢} =$

(أ) $\sum_{س=١}^{٣} ٣ س$ (ب) $\sum_{س=١}^{٣} س^{٢}$ (ج) $٣ \sum_{س=١}^{٣} ٢^{س}$ (د) $٣ \sum_{س=١}^{٣} س^{٢}$

أسئلة مقالية

١ أوجد قيمة المجهول في كل مما يلي :

أ $\overline{س} = ٤$ ، $س_{١} = ؟$ ، $س_{٢} = ٢$ ، $س_{٣} = ٥$

ب $\overline{س} = ٨$ ، $س_{١} = ١$ ، $س_{٢} = ٢$ ، $س_{٣} = ٤$ ، $س_{٤} = ؟$ ، $س_{٥} = ١٠$

٢ أوجد قيمة كل مما يلي :

أ $\sum_{س=١}^{٤} ٤ س$ ب $\sum_{س=١}^{٥} \frac{١}{٨} س^{٢}$

ج $\sum_{س=١}^{٤} \frac{س^{٢}}{١٦}$ د $\sum_{س=١}^{١٠} ٢$

٣ أوجد قيمة س التي تجعل المتوسط $\overline{س}$ كما هو مذكور في كل مما يلي :

أ ٣س ، ٤ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $٢\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\overline{س} = \frac{٥}{٤}$

ب س + ١١ ، ٢٦ ، ٢٠ ، ١٩ ، ١٩ ، ٢١ ، ١٩ ، ٢٢ ، $\overline{س} = ٢١$

٤ أوجد المتوسط والوسيط والمنوال لكل من :

أ ٣ ، ٤ ، ٨ ، ٦ ، ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٢

ب ٦ ، ١,٥ ، ٣ ، ٨ ، ٤ ، ٣,٥ ، ٤ ، ١ ، ٤,٥

ج ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٦ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٥ ، ٣٥ ، ٣٥ ، ٣٥ ، ٣٥

٥ أوجد انحرافات القيم التالية عن المتوسط :

أ ٢ ، ٨ ، ٣ ، ٧ ، ١١ ، ٦ ، ٥

ب ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٨ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٧

٦ أوجد المتوسط للتوزيع التالي :

القيمة	٥٥	٦٥	٧٥	٨٥	٩٥	١١٠	١٥٠
التكرار	٨	١٠	١٦	١٥	١٠	٨	٣

٧ أوجد المتوسط والوسيط والمنوال للتوزيع التالي :

الفئة	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-
التكرار	٣	٧	١٦	١٢	٩	٥	٢

٨ التوزيع الآتي لأعمار ٦٠٠ تلميذ حسب السن :

العمر	١٠-	١٢-	١٤-	١٦-	١٨-
العدد	٦٠	١٥٠	٢٠٠	١٦٠	٣٠

أوجد المتوسط والوسيط والمنوال .

وإذا رسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع فهل هو :

- معتدل؟
- ملتو ؟ وما نوع الالتواء ؟

٩ أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري لكل مما يلي :

أ ١٢ ، ٦ ، ٧ ، ٣ ، ١٥ ، ١٠ ، ١٨ ، ٥

ب

القيمة	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠
التكرار	٥	١١	٤	٨	٦

١٠ أوجد المدى والتباين والانحراف المعياري للتوزيع التالي الذي يمثل درجات ٧٠ طالباً في أحد الامتحانات :

الدرجة	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-
التكرار	١	٣	٧	١٣	١٥	١٠	٨	٦	٤	٢	١

١١ أوجد المتوسط والوسيط والمنوال وكذلك المدى والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الآتي الذي يمثل عدد الساعات التي يعملها موظفو إحدى الشركات وعددهم ٥٠٠ :

الفئة	٤٠-	٤٢-	٤٤-	٤٦-	٤٨-	٥٠-	٥٢-	٥٤-	٥٦-
التكرار	٢١	٣٥	٥٢	٧٣	٩١	٨٤	٦٩	٤٥	٣٠

الفصل الرابع

هندسة التحويلات
Transformation Geometry

٤ - ١ التحويل الهندسي Transformation Geometry

تعلم أن المستوى مجموعة غير منتهية من النقاط ، ولو رمزنا لهذه المجموعة بالرمز π فإن التطبيق ت : π ← π يسمى تحويلاً هندسياً إذا كانت تقابلاً (شاملاً ومتبايناً)

مثال ١ اعتبر التطبيق ت : π ← π

ت (س ، ص) = (س ، - ص) ، ∀ (س ، ص) ∈ π

أ عين صورة النقطة أ (٣ ، - ١) تحت تأثير ت

ب عين النقطة التي صورتها (٣ ، - ٤) تحت تأثير ت

جـ أثبت أن التطبيق ت تحويل هندسي .

الحل

أ حيث إن ت (س ، ص) = (س ، - ص) لكل (س ، ص) ∈ π

∴ ت (٣ ، - ١) = (٣ ، ١)

∴ صورة النقطة أ (٣ ، - ١) هي النقطة أَ (٣ ، ١)

ب نفرض أن النقطة التي صورتها (٣ ، - ٤) تحت تأثير ت هي (س ، ص)

∴ ت (س ، ص) = (٣ ، - ٤)

ولكن ت (س ، ص) = (س ، - ص) من تعريف التطبيق

∴ (س ، - ص) = (٣ ، - ٤)

∴ س = ٣ ، ص = ٤

أي أن النقطة التي صورتها بَ (٣ ، - ٤) هي النقطة ب (٣ ، ٤) .

جـ لإثبات أن التطبيق ت تحويل هندسي يلزم إثبات أنه شامل ومتباين .

وللوصول إلى ذلك :

١ لتكن (أ ، ب) نقطة ما في π

هل هذه النقطة صورة لنقطة ما في π ؟

إذا كان هذا صحيحاً فإن التطبيق شامل (لماذا ؟)

نفرض أن ت (س ، ص) = (أ ، ب)

∴ (س ، −ص) = (أ ، ب)

∴ س = أ ∈ ح

، ص = −ب ∈ ح

∴ التطبيق ت شامل

٢ لتكن (س ، ص) = ت (سَ ، صَ) نقطتين في π

ونفرض أن ت (س ، ص) = ت (سَ ، صَ)

هل (س ، ص) = (سَ ، صَ)؟

إن كان هذا صحيحاً فإن التطبيق متباين (لماذا ؟)

إذا كان ت (س ، ص) = ت (سَ ، صَ) فإن

(س ، −ص) = (سَ ، −صَ)

∴ س = سَ ، ص = صَ

∴ التطبيق ت متباين .

من (١) ، (٢) التطبيق ت تقابل فهو تحويل هندسي . ■

مثال ٢

إذا كان ت : π ← π حيث

ت (س ، ص) = (٣ س − ٢ ، ٢ ص + ١) ، ∀ (س ، ص) ∈ π

أ عين صورة كل من ب (٢ ، −٣) ، حـ (١ ، −١) تحت تأثير ت

ب عين النقاط الصامدة للتطبيق ت (إن وجدت) .

إرشاد : ((س ، ص) نقطة صامدة للتطبيق ت إذا كانت ت (س ، ص) = (س ، ص))

الحل

أ ∵ ت (س ، ص) = (٣س − ٢ ، ٢ص + ١)

∴ ت (٢ ، −٣) = (٣ × ٢ − ٢ ، ٢ × (−٣) + ١)

= (٤ ، −٥)

بالمثل ت (١ ، −١) = (١ ، −١) ماذا نلاحظ؟

ب إذا كانت (س ، ص) نقطة صامدة فإن :

ت (س ، ص) = (٣س − ٢ ، ٢ص + ١) = (س ، ص)

∴ س = ٣س − ٢ ومنها س = ١

ص = ٢ص + ١ ومنها ص = −١

أي أن (١ ، −١) نقطة صامدة وحيدة ■

مثال ٣

إذا كان ت : π ← π حيث

ت (س ، ص) = (س' ، ص) ∀ (س ، ص) ∈ π

فتحقق من أن ت ليس تحويلا هندسياً .

الحل

ت (١ ، ٢) = (١ ، ٢)

، ت (−١ ، ٢) = (١ ، ٢) أيضاً

∴ ت غير متباين (لماذا ؟)

∴ ت ليس تحويلاً هندسياً ■

٤-١ تمارين

١ اعتبر التطبيق ت : π ← π

وعين صورة كل من النقطتين أ (٥ ، ٢) ، ب (-١ ، -٢)

في كل من الحالات الثلاث التالية :

أولاً : ت (س ، ص) = (س - ٢ ، ص + ٣)

ثانياً : ت (س ، ص) = (ص ، - س)

ثالثاً : ت (س ، ص) = (٢ص ، -٣س)

٢ اعتبر التطبيق ت : π ← π

ت (س ، ص) = (٢س - ١ ، ٣ص - ٣) ∀ (س ، ص) ∈ π

أولاً : أوجد صورة كل من ح (١ ، -١) ، ء (٠ ، ٢)

ثانياً : عين النقاط الصامدة تحت تأثير ت إن وجدت .

٣ إذا اعتبرنا التطبيق ق : π ← π

ق (س ، ص) = (١ + س² ، ص) ∀ (س ، ص) ∈ π

فتحقق من أنه ليس تحويلاً هندسياً .

٤ إذا اعتبرنا التحويل الهندسي د : π ← π

د (س ، ص) = (٢س - ١ ، ٣ص - ٣) ∀ (س ، ص) ∈ π

وكانت د (هـ) = هـ' فأوجد

أولاً : هـ' (س' ، ص') إذا كانت هـ (-١ ، ٣)

ثانياً : هـ (س ، ص) إذا كانت هـ' (-٧ ، ٦)

٤-٢ الانعكاس Reflection

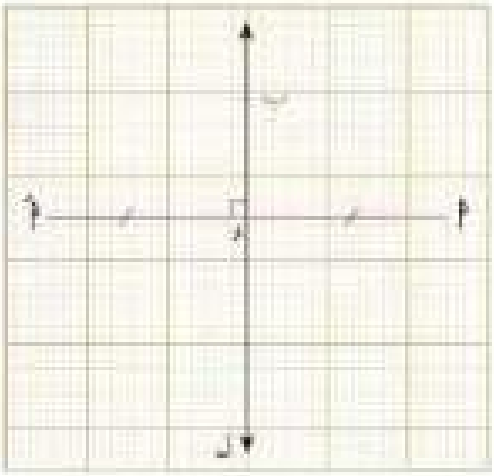
تعلم أن كلا من الانعكاس في مستقيم والانعكاس في نقطة هو تحويل هندسي ت : π ← π .

١ تحت تأثير الانعكاس في المستقيم ل : ∀ أ ∉ ل ، ت(أ) = أَ حيث : $\overline{\text{أأَ}}$ ⊥ ل ، و أ = و أَ .

∀ ب ∈ ل ، ت(ب) = ب

ويسمى المستقيم ل محور الانعكاس .

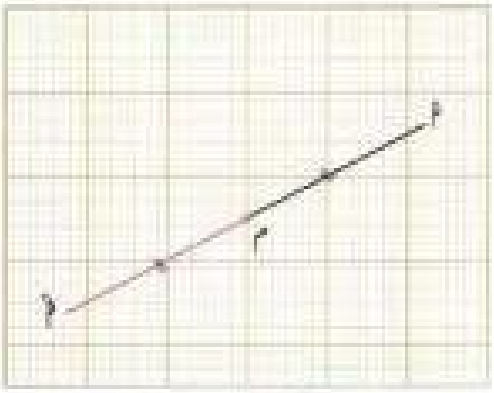
انظر شكل (٤ - ١)



شكل (٤ - ١)

٢ تحت تأثير الانعكاس في نقطة مثل م : ∀ أ ∈ π ، ت(أ) = أَ حيث : م أ = م أَ ، ت(م) = م وتسمى م مركز الانعكاس .

انظر شكل (٤-٢)



شكل (٤ - ٢)

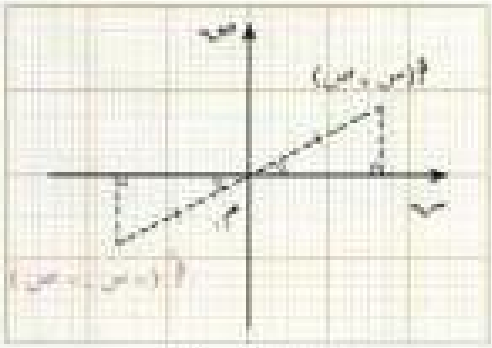
وتعلم أن الانعكاس (في مستقيم أو في نقطة) يحافظ على كل من الاستقامة والبينية وقياس كل من الأطوال والزوايا والتوازي ، ومن حيث الاتجاه الدوراني يحافظ الانعكاس في نقطة على الاتجاه الدوراني أما الانعكاس في مستقيم فيعكس الاتجاه الدوراني .

وسيقتصر حديثنا في هذا البند على الانعكاس في المستوى الإحداثي :

١ الانعكاس في نقطة الأصل :

في شكل (٤ – ٣) ، أَ صورة أ بالانعكاس في نقطة الأصل م .

∴ أ (س ، ص) ← أَ (– س ، – ص) لماذا ؟

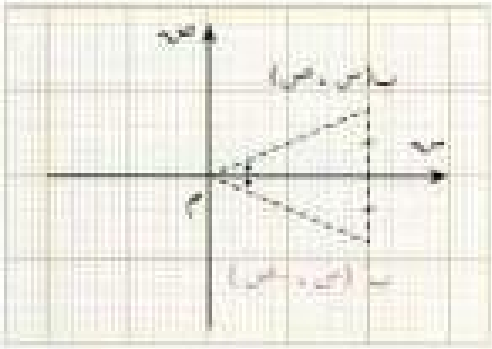


شكل (٤ – ٣)

٢ الانعكاس في المحور السيني :

في شكل (٤ – ٤) ، بَ صورة ب بالانعكاس في المحور السيني .

∴ ب (س ، ص) ← بَ (س ، – ص) لماذا ؟

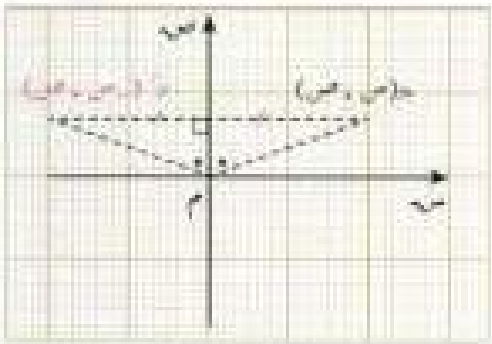


شكل (٤ – ٤)

٣ الانعكاس في المحور الصادي :

في شكل (٤ – ٥) ، حَ صورة حـ بالانعكاس في المحور الصادي .

∴ حـ (س ، ص) ← حَ (– س ، ص) لماذا ؟



شكل (٤ – ٥)

٤ الانعكاس في المستقيم : ص = س :

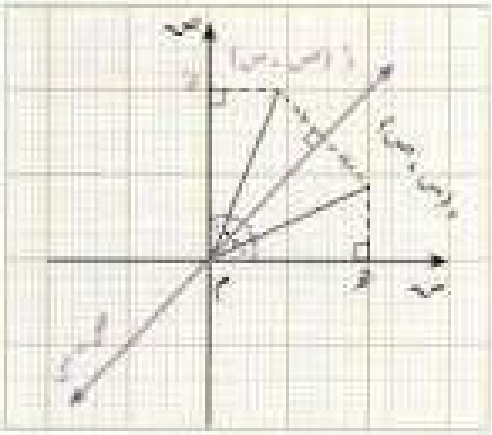
في شكل (٤ – ٦) ، وَ صورة و بالانعكاس في المستقيم ص = س

المستقيم ص = س ينصف الزاوية القائمة هـ م̂ قـ

والمثلث م و وَ متطابق الضلعين . لماذا؟

المثلث م و قـ ، م وَ قـ متطابقان (لماذا؟)

∴ و (س ، ص) ← وَ (ص ، س)



شكل (٤ – ٦)

٥ الانعكاس في المستقيم : ص = − س :

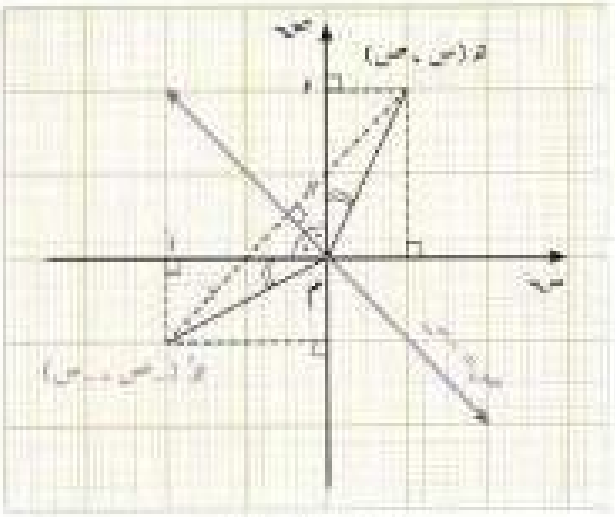
في شكل (٤ − ٧) ، ق′ صورة ق

بالانعكاس في المستقيم : ص = − س .

المستقيم ص = − س ينصف الزاوية القائمة

ء م ء′

والمثلث م ق ق′ متطابق الضلعين . لماذا؟



شكل (٤ − ٧)

∴ ق (س ، ص) ← ق′ (− ص ، − س)

مثال ١ أوجد صورة النقطة ق (−٢ ، ٣) تحت تأثير :

أ انعكاس في المحور السيني

ب انعكاس في المحور الصادي

جـ انعكاس في نقطة الأصل

ء انعكاس في المستقيم ص = س

هـ انعكاس في المستقيم ص = − س

الحل

صورة النقطة ق

أ تحت تأثير انعكاس المحور السيني :

(س ، ص) ← (س ، −ص)

∴ ق (−٢ ، ٣) ← ق′ (−٢ ، −٣)

ب تحت تأثير انعكاس في المحور الصادي :

(س ، ص) ← (−س ، ص)

∴ ق (−٢ ، ٣) ← ق′ (٢ ، ٣)

جـ تحت تأثير انعكاس في نقطة الأصل :

(س ، ص) ← (−س ، −ص)

∴ ق (−٢ ، ٣) ← قَ (٢ ، −٣)

د تحت تأثير انعكاس في المستقيم ص = س :

(س ، ص) ← (ص ، س)

∴ ق (−٢ ، ٣) ← قَ (٣ ، −٢)

هـ تحت تأثير انعكاس في المستقيم ص = −س :

(س ، ص) ← (−ص ، −س)

∴ ق (−٢ ، ٣) ← قَ (−٣ ، ٢) ■

مثال ٢

عين الانعكاس الذي يحول النقطة ب (−٣ ، ١) إلى النقطة بَ في كل من الحالات التالية :

أ بَ (١ ، −٣) **ب** بَ (−١ ، ٣)

جـ بَ (−٣ ، −١) **د** بَ (٣ ، ١)

الحل

نقارن في حالة إحداثيي ب وإحداثيي صورتها بَ

أ ∵ ب (−٣ ، ١) ← بَ (١ ، −٣)

∴ (س ، ص) ← (ص ، س)

∴ الانعكاس هو انعكاس في المستقيم ص = س .

ب ∵ ب (−٣ ، ١) ← بَ (−١ ، ٣)

∴ (س ، ص) ← (−ص ، −س)

∴ الانعكاس هو انعكاس في المستقيم ص = −س

جـ ∵ ب (−٣ ، ١) ← بَ (−٣ ، −١)

∴ (س ، ص) ← (س ، −ص)

∴ الانعكاس هو انعكاس في المحور السيني .

و ∵ ب (−٣ ، ١) ← ب′ (٣ ، ١)

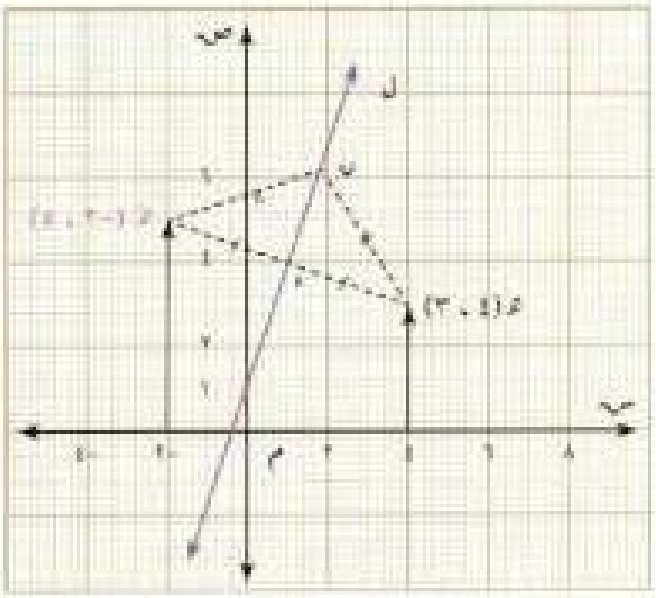
∴ (س ، ص) ← (−س ، ص)

∴ الانعكاس هو انعكاس في المحور الصادي ■

مثال ٣

إذا كانت أ′ (−٢ ، ٥) صورة أ (٤ ، ٣) تحت تأثير انعكاس في المستقيم ل في المستوى الإحداثي فأوجد معادلة ل .

الحل



شكل (٤ − ٨)

ل هو محور الانعكاس

∴ ل هو محور القطعة أ أ′

شكل (٤ − ٨)

يفرض أن و (ب ، حـ) منتصف $\overline{\text{أ أ′}}$

∴ ب = $\frac{-٢ + ٤}{٢}$ = ١

، حـ = $\frac{٥ + ٣}{٢}$ = ٤ (لماذا ؟)

∴ و (١ ، ٤) هي منتصف $\overline{\text{أ أ′}}$

∴ ميل $\overline{\text{أ أ′}}$ = $\frac{٥ - ٣}{-٢ - ٤}$ = − $\frac{١}{٣}$ (لماذا ؟)

∴ ميل المستقيم ل يساوي ٣ (لماذا ؟)

وحيث إن المستقيم ل يمر بالنقطة و (١ ، ٤) وميله = ٣

∴ معادلته هي :

ص − ٤ = ٣ (س − ١)

أو ص − ٣ س − ١ = ٠ ■

حل آخر

∴ ل هو محور $\overline{\text{ق ق'}}$

∴ ∀ ب (س ، ص) ∈ ل يكون ب ق = ب ق' (لماذا ؟)

∴ (س − ٤)² + (ص − ٣)² = (س + ٢)² + (ص − ٥)² (لماذا ؟)

∴ ص − ٣ س − ١ = ٠

مثال ٤

إذا كانت معادلة المستقيم ل هي ٢ ص − س + ٣ = ٠

أ أوجد معادلة ل' صورة ل بالانعكاس في المستقيم ص = س

ب أوجد نقطة تقاطع ل مع ل' .

الحل

أ الانعكاس في المستقيم ص = س :

(س ، ص) ← (ص ، س)

بفرض أن (س ، ص) ∈ ل ، (س' ، ص') ∈ ل' .

∴ س' = ص ، ص' = س ،

∵ ٢ ص − س + ٣ = ٠

∴ ٢ س' − ص' + ٣ = ٠

أي أن معادلة المستقيم ل' هي :

٢ س − ص + ٣ = ٠

ب نقطة تقاطع ل مع ل' هي نقطة تقاطع ل مع المستقيم ص = س (أو هي النقطة الصامدة)

وللحصول على هذه النقطة نحل المعادلتين :

ص = س

، ٢ س − ص + ٣ = ٠

∴ ٢ س − س + ٣ = ٠ ومنها س = −٣

وبالتعويض ، ص = −٣

∴ النقطة المطلوبة هي (−٣ ، −٣) ■

٤-٢ تمارين

١ أوجد صورة النقطة ب (٤ ، ١) تحت تأثير :

أ انعكاس في نقطة الأصل

ب انعكاس في المحور السيني

جـ انعكاس في المحور الصادي

د انعكاس في المستقيم ص = -س

هـ انعكاس في المستقيم ص = س

٢ عين الانعكاس الذي يحول النقطة جـ (١ ، ١) إلى النقطة جـ′ في كل مما يأتي :

أ جـ′ (١ ، -١)

ب جـ′ (-١ ، ١)

جـ جـ′ (١ ، ١)

د جـ′ (-١ ، -١)

٣ إذا كانت جـ′ (٣ ، -٢) صورة جـ (-١ ، ٤) تحت تأثير انعكاس في المستقيم ل فعين معادلة المستقيم ل .

٤ أوجد معادلة ل′ صورة المستقيم ل الذي معادلته :

٢س - ٣ص + ٢ = ٠

في كل من الحالات الآتية :

أ بالانعكاس في المحور الصادي

ب بالانعكاس في المحور السيني

جـ بالانعكاس في المستقيم ص = س

د بالانعكاس في المستقيم ص = -س

٥ إذا كانت س + ص = ٢ معادلة مستقيم ل فأوجد :

أ معادلة ل′ صورة ل بالانعكاس في المستقيم ص = س

ب معادلة ل′ صورة ل بالانعكاس في المستقيم ص = -س

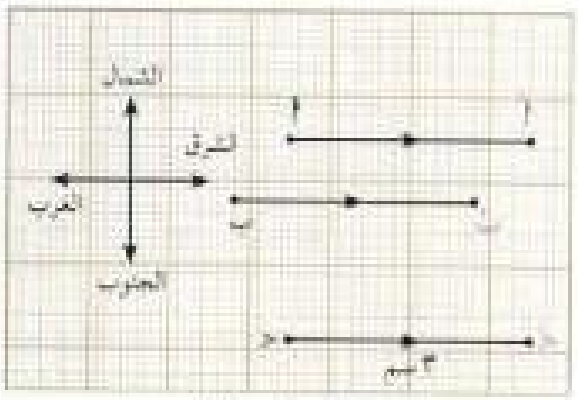
جـ معادلة ل′ صورة ل بالانعكاس في نقطة الأصل

٤ – ٣ الانسحاب Translation

تعلم أن الانسحاب هو تحويل هندسي ت : π ← π .

يعين لكل نقطة أ ∈ π صورة أ' ∈ π تحصل عليها بإزاحة أ في المستوى مسافة معينة في اتجاه معين .

شكل (٤ – ٩) يوضح انسحاباً مسافته ٣ سم واتجاهه الشرق .



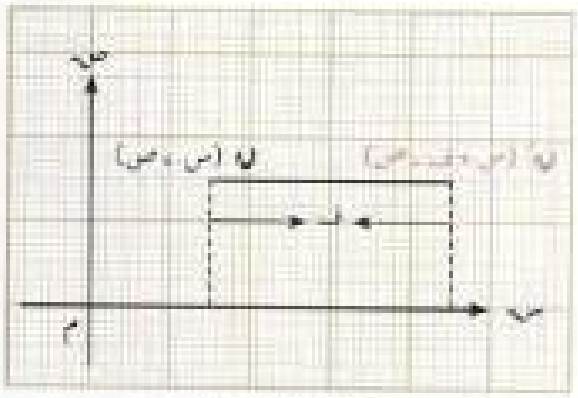
شكل (٤ – ٩)

وتعلم كذلك أن الانسحاب يحافظ على كل من البينية والاستقامة ، وقياس الأطوال وقياس الزوايا ، والتوازي ، كما يحافظ على الاتجاه الدوراني .

وسنقصر حديثنا في هذا البند على الانسحاب في المستوى الإحداثي .

١ الانسحاب في اتجاه المحور السيني :

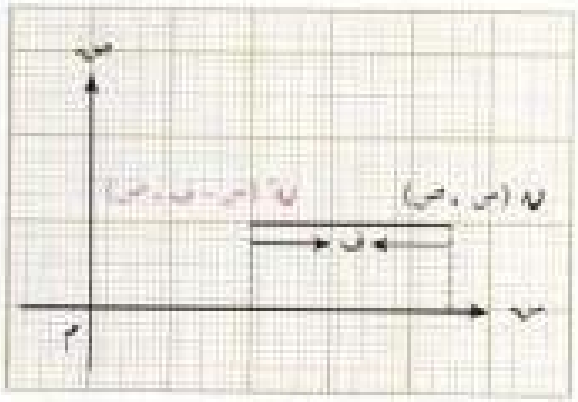
إذا كان الانسحاب ت : π ← π في الاتجاه الموجب للمحور السيني ومسافته ف وحدة طول كما في شكل (٤ – ١٠) فإن :



شكل (٤ – ١٠)

(س ، ص) ← (س + ف ، ص)

وإذا كان الانسحاب في الاتجاه السالب للمحور السيني بمسافة ف وحدة طول كما في شكل (٤ – ١١) فإن :



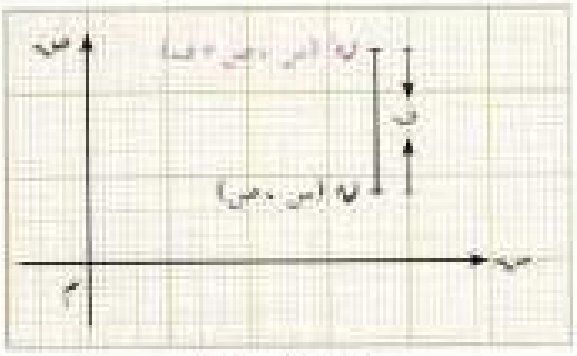
شكل (٤ – ١١)

(س ، ص) ← (س – ف ، ص)

٢ الانسحاب في اتجاه المحور الصادي :

إذا كان الانسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي وبمسافة ف وحدة طول كما في شكل (٤ - ١٢) فإن :

(س ، ص) ← (س ، ص + ف)

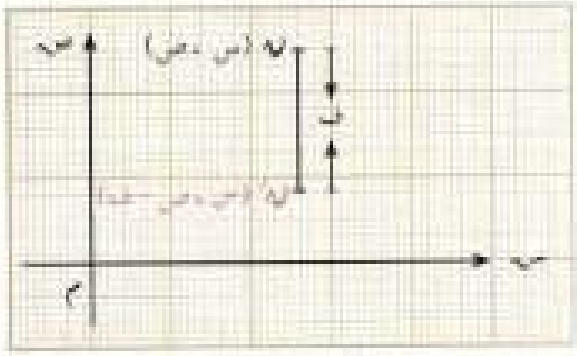


شكل (٤ - ١٢)

أما إذا كان الانسحاب في الاتجاه السالب للمحور الصادي وبمسافة ف وحدة طول فإن :

(س ، ص) ← (س ، ص - ف)

انظر شكل (٤ - ١٣)



شكل (٤ - ١٣)

مثال ١

أوجد صورة كل من النقطتين (-١ ، ٢) ، (٤ ، -٣) تحت تأثير انسحاب مسافته ٥ سم في كل من الحالات الآتية :

أ الانسحاب في الاتجاه الموجب للمحور السيني .

ب الانسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي .

جـ الانسحاب في الاتجاه السالب للمحور السيني .

د الانسحاب في الاتجاه السالب للمحور الصادي .

الحل

أ (س ، ص) ← (س + ٥ ، ص)

∴ (-١ ، ٢) ← (٤ ، ٢)

(٤ ، -٣) ← (٩ ، -٣)

ب (س ، ص) ← (س ، ص + ٥)

∴ (-١ ، ٢) ← (-١ ، ٧)

(٤ ، -٣) (٤ ، ٢)

جـ (س ، ص) ← (س − ٥ ، ص)

∴ (−١ ، ٢) ← (−٦ ، ٢)

(٤ ، −٣) ← (−١ ، −٣)

د (س ، ص) ← (س ، ص−٥)

∴ (−١ ، ٢) ← (−١ ، −٣)

(٤ ، −٣) ← (٤ ، −٨) ■

مثال ٢

إذا كانت ٢س − ٣ ص + ٤ = ٠ معادلة المستقيم ق فأوجد معادلة ق′ صورة ق بانسحاب مسافته ٣ وحدات في الاتجاه الموجب للمحور السيني .

الحل

∵ (س ، ص) ∈ ق ،

∴ (س ، ص) ← (س + ٣ ، ص)

إذا كان (س ، ص) ← (س′ ، ص′) تحت تأثير الانسحاب المذكور ،

فإن (س′ ، ص′) ∈ ق′ ،

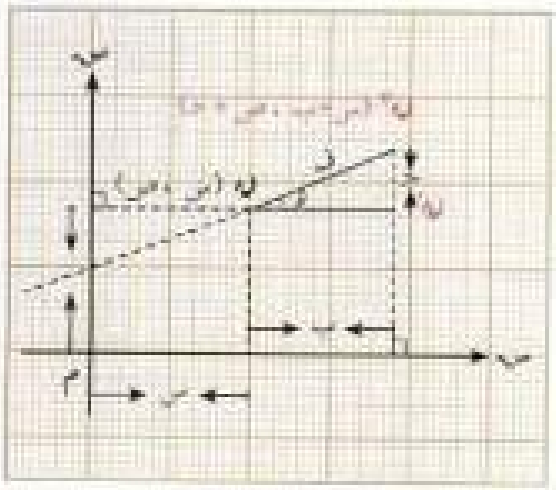
ويكون س + ٣ = س′ ، ص = ص′

أي أن س = س′ − ٣ ، ص = ص′

وبالتعويض في معادلة ق نجد أن :

٢ (س′ − ٣) − ٣ ص′ + ٤ = ٠ أو ٢ س′ − ٣ ص′ − ٢ = ٠

∴ معادلة ق′ هي ٢س − ٣ص − ٢ = ٠ ■



شكل (٤ − ١٤)

٣ الانسحاب في المستوى الإحداثي :

في شكل (٤ − ١٤)

ن (س ، ص) ← ن′ (س + ب ، ص)

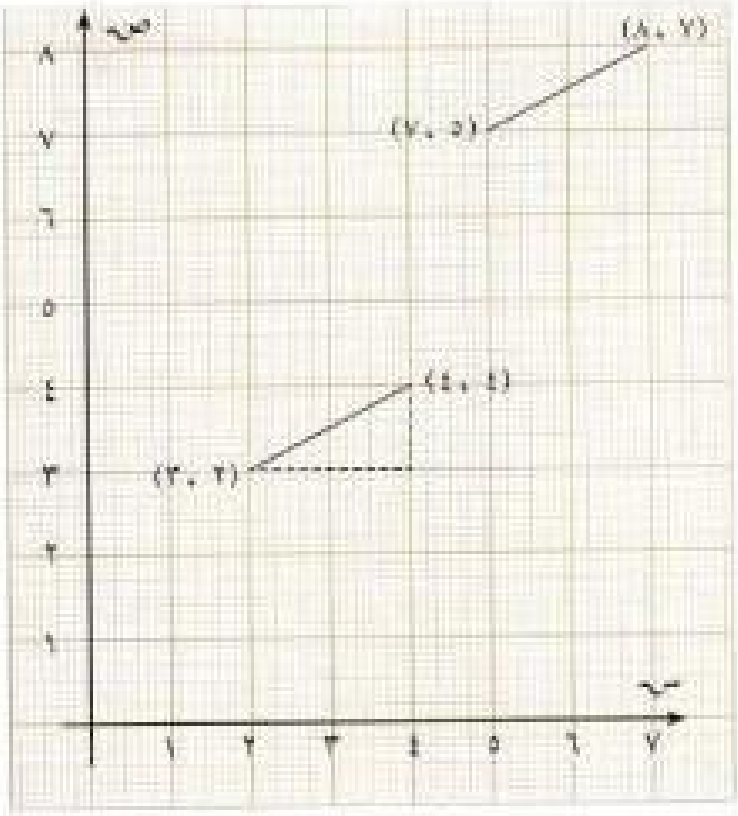
تحت تأثير انسحاب مسافته ب في الاتجاه الموجب للمحور السيني .

ن' (س + ب ، ص) ← ن'' (س + ب ، ص + حـ)

تحت تأثير انسحاب مسافته حـ في الاتجاه الموجب للمحور الصادي .

∴ ن (س ، ص) ← ن'' (س + ب ، ص + حـ)

تحت تأثير انسحاب مسافته ف = $\sqrt{ب^2 + حـ^2}$ في اتجاه $\overrightarrow{نن''}$ الذي كان يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور السيني زاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{حـ}{ب}$



شكل (٤ - ١٥)

مثال ٣

تحت تأثير انسحاب في المستوى الإحداثي قاعدته

(س ، ص) ← (س + ٢ ، ص + ١)

أوجد :

أ صورة كل من (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٧)

ب مسافة الانسحاب واتجاهه

الحل

أ ∵ (س ، ص) ← (س + ٢ ، ص + ١)

∴ (٢ ، ٣) ← (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٧) ← (٧ ، ٨)

ب مسافة الانسحاب ف = $\sqrt{ب^2 + حـ^2}$

= $\sqrt{(٢)^2 + (١)^2}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

والانسحاب في اتجاه يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور السيني زاوية قياسها هـ حيث :

ظا هـ = $\frac{حـ}{ب}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ هـ ≃ ٢٦° ٣٤′ ■

مثال ٤

إذا كانت ٢س − ٣ص + ٤ = ٠ معادلة المستقيم ل فأوجد معادلة ل′ صورة ل تحت تأثير انسحاب قاعدته :

(س ، ص) ← (س + ٣ ، ص + ٤)

الحل

إذا كانت (س ، ص) ∈ ل ،

(س ، ص) ← (س′ ، ص′) تحت تأثير الانسحاب المذكور ، فإن :

(س′ ، ص′) ∈ ل′ ، ويكون :

س + ٣ = س′ ، ص + ٤ = ص′

أو س = س′ − ٣ ، ص = ص′ − ٤

وبالتعويض في معادلة المستقيم ل نجد أن :

٢ (س′ − ٣) − ٣ (ص′ − ٤) + ٤ = ٠

أو ٢ س′ − ٣ ص′ + ١٠ = ٠

∴ معادلة المستقيم ل′ هي : ٢س − ٣ص + ١٠ = ٠ ■

٤-٣ تمارين

١ أوجد صورة كل من (٢ ، -٥) ، (-٣ ، ١) تحت تأثير انسحاب مسافته ٣ في الاتجاه :

أ الموجب للمحور السيني .

ب الموجب للمحور الصادي .

حـ السالب للمحور السيني .

ء السالب للمحور الصادي .

٢ بانسحاب في الاتجاه السالب للمحور السيني مسافته ٣ وحدات ، إذا كانت (س ، ٣) ← (٢ ، ٣) فأوجد قيمة س .

٣ إذا كانت ب' (٤ ، -٣) صورة ب (-٢ ، ٥) بانسحاب ، فعين مسافة هذا الانسحاب واتجاهه .

٤ إذا كانت حـ'(٣ ، ٠) صورة حـ (-٢ ، ١) تحت تأثير انسحاب ، فأوجد صورة النقطة ء (٤ ، -١) تحت تأثير الانسحاب نفسه .

٥ إذا كانت ٤س - ٣ص = ٥ معادلة المستقيم ل ، فأوجد معادلة ل' صورة ل تحت تأثير انسحاب :

أ مسافته ٣ وحدات في الاتجاه الموجب للمحور السيني .

ب مسافته ٥ وحدات في الاتجاه السالب للمحور الصادي .

٦ مثلث ب حـ ء رؤوسه ب (٣ ، ٥) ، حـ (-١ ، ٤) ، ء (٠ ، -٢) . إذا كانت ب' (٥ ، ٦) صورة ب (٣ ، ٥) تحت تأثير انسحاب فعين صورة كل من حـ ، ء تحت تأثير هذا الانسحاب .

٧ إذا كانت ب' (٤ ، ٦) صورة ب (٧ ، ٢) تحت تأثير انسحاب في المستوى الإحداثي ، فأوجد معادلة ل' صورة ل الذي معادلته : س - ٢ص + ١ = ٠ تحت تأثير هذا الانسحاب .

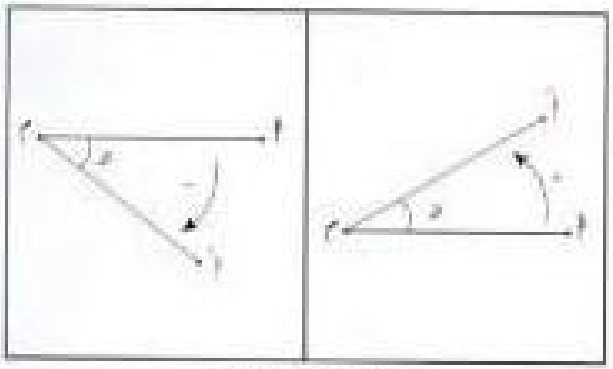
٤ – ٤ الدوران Rotation

تعلم أن الدوران حول نقطة م بزاوية قياسها هـ هو تحويل هندسي ت : π ← π حيث :

ت (م) = م ؛

∀ أ ∈ π ، أ ≠ م

ت (أ) = أَ حيث م أ = م أَ ، ق (أ م أَ) = هـ .



شكل (٤ – ١٦)

ونرمز عادة لهذا الدوران بالرمز د (م ، هـ) .

ويتحدد اتجاه الدوران تبعاً لإشارة هـ ، فإذا كان ق هـ موجباً كان اتجاه الدوران عكس اتجاه حركة عقربي الساعة ، وإذا كان ق هـ سالباً كان الدوران مع اتجاه حركة عقربي الساعة .

وتعلم كذلك أن للدوران نفس خواص الانسحاب ، فهو يحافظ على : البينية ، والاستقامة ، قياس الأطوال ، قياس الزوايا والتوازي ، واتجاه الدوران .

١ الدوران د (م ، ٩٠°) :

في شكل (٤ – ١٧) :

إذا كانت أَ (سَ ، صَ) هي صورة أ (س ، ص) تحت تأثير د (م ، ٩٠°) فإن :

ق (أ م و) = ق (أَ م وَ)

حيث كل منهما تتمم أ م وَ .

ق (م أ و) = ق (م أَ وَ)

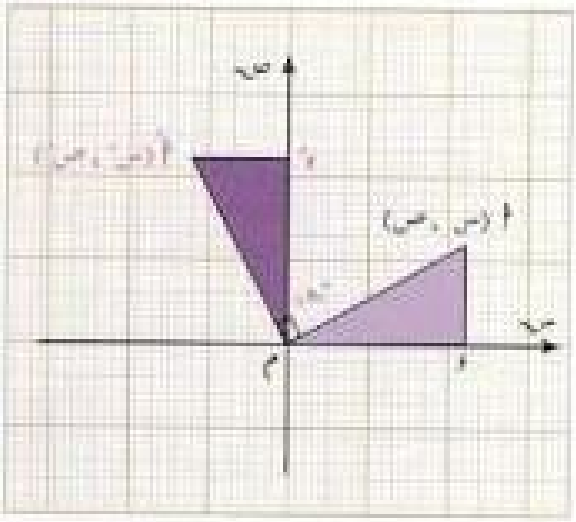
لأن مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠° .

م أ = م أَ من تعريف الدوران

∴ Δ م أ و ، Δ م أَ وَ متطابقان ، وينتج أن :

أ و = أَ وَ ∴ ص = –سَ .

م و = م وَ ∴ س = صَ



شكل (٤ – ١٧)

أ (س ، ص) ← أ′ (−ص ، س)

فمثلاً : تحت تأثير د (م ، ٩٠°) :

(−٣ ، ٧) ← (−٧ ، −٣)

(٤ ، −١) ← (١ ، ٤)

الدوران د (م ، ٩٠°) يسمى أحياناً «ربع دورة»

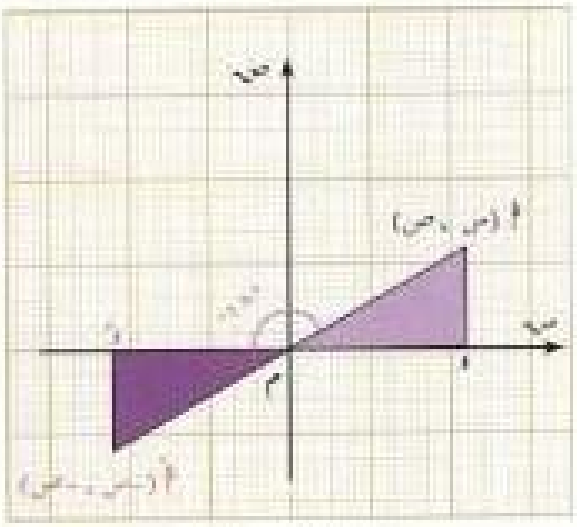
٢ الدوران د (م ، ١٨٠°) :

في شكل (٤ − ١٨)

إذا كانت أ (س ، ص) ← أ′ (س′ ، ص′)

فإن : س′ = −س ، ص′ = −ص ويكون :

أ (س ، ص) ← أ′ (−س ، −ص)



شكل (٤ − ١٨)

فمثلاً : تحت تأثير د (م ، ١٨٠°)

(٣ ، −٢) ← (−٣ ، ٢)

(−١ ، −٥) ← (١ ، ٥)

الدوران د (م ، ١٨٠°) يسمى أحياناً «نصف دورة» .

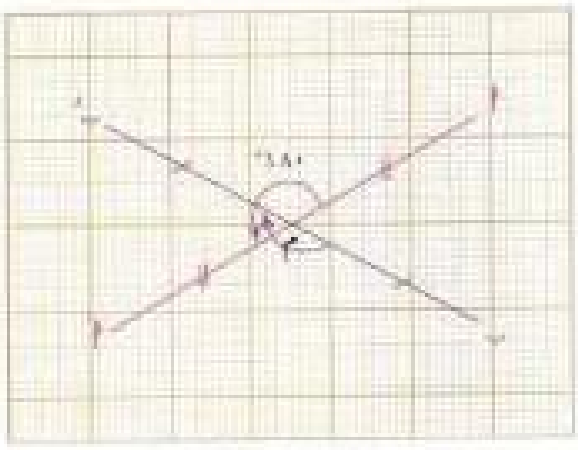
نتيجة ١

الانعكاس في نقطة مثل م يكافئ دوراناً مركزه النقطة م وقياس زاويته ١٨٠° أو − ١٨٠°

ففي شكل (٤ − ١٩)

بالانعكاس في م :

أ ← أ′ ، ب ← ب′



شكل (٤ − ١٩)

ويدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠° أو - ١٨٠° :

أ ← أ' ، ب ← ب'

نتيجة ٢

صورة مستقيم تحت تأثير نصف دورة هي مستقيم يوازيه .

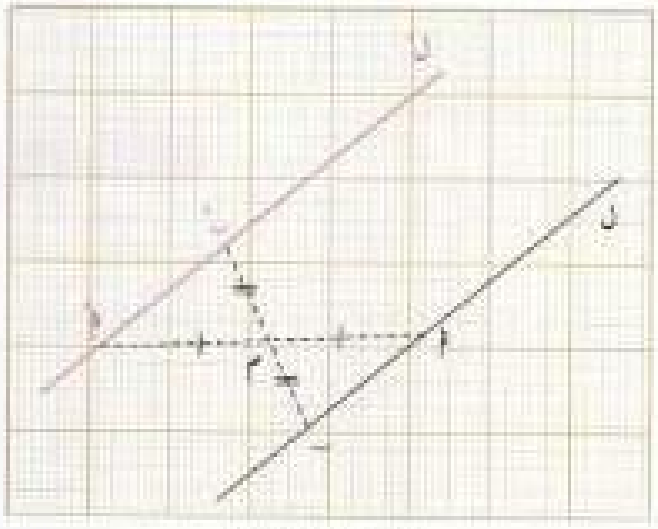
ففي شكل (٤ - ٢٠)

إذا كان تحت تأثير د (م ، ١٨٠°)

أ ← أ' ، ب ← ب'

فإن أ ب أ' ب' متوازي أضلاع لماذا؟

∴ $\overline{أ'ب'}$ // $\overline{أ ب}$ وعليه يكون : ل // ل' .



شكل (٤ - ٢٠)

٣ الدوران د (م ، ٢٧٠°) :

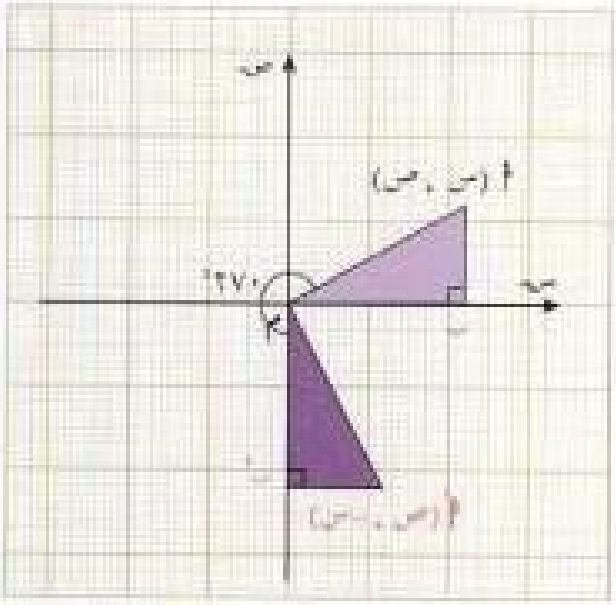
في شكل (٤ - ٢١)

إذا كان أ (س ، ص) ← أ' (س' ، ص')

تحت تأثير د (م ، ٢٧٠°) فإن :

∴ س' = ص ، ص' = - س

∴ أ (س ، ص) ← أ' (ص ، - س)



شكل (٤ - ٢١)

٤ الدوران د (م ، ٣٦٠°) :

ويعرف باسم «الدوران دورة كاملة» واضح أنه تحت تأثير د (م ، ٣٦٠°) :

أ (س ، ص) ← أ' (س ، ص)

يسمى هذا الدوران أحياناً «الدوران المطابق» أو «الدوران المحايد» .

ويلاحظ أن جميع نقاط المستوى π نقاط صامدة تحت تأثير د (م ، ٣٦٠°) .

مثال ١

إذا كانت ٢س + ٤ ص − ٣ = ٠ هي معادلة المستقيم ل ، فأوجد معادلة ل′ صورة ل تحت تأثير :

أ دوران ربع دورة

ب دوران نصف دورة

جـ دوران دورة كاملة

د د(م ، ٢٧٠°)

الحل

أ تحت تأثير د(م ، ٩٠°) :

(س ، ص) ← (−ص ، س)

فإذا كانت (س ، ص) ← (س′ ، ص′)

فإن : س′ = −ص ومنها ص = −س′

ص′ = س ومنها س = ص′

وبالتعويض في معادلة المستقيم :

∴ ٢ص′ + ٤ (−س′) − ٣ = ٠

أو −٤س′ + ٢ ص′ − ٣ = ٠

أو ٤ س′ − ٢ ص′ + ٣ = ٠

أي أن معادلة ل′ هي : ٤ س − ٢ ص + ٣ = ٠

ب تحت تأثير د(م ، ١٨٠°) :

(س ، ص) ← (−س ، −ص)

فإذا كانت (س ، ص) ← (س′ ، ص′) فإن :

س′ = −س ومنها س = −س′

ص′ = −ص ومنها ص = −ص′

وبالتعويض : −٢ س′ − ٤ ص′ − ٣ = ٠

أو ٢س′ + ٤ ص′ + ٣ = ٠

أي أن معادلة ل′ هي : ٢س + ٤ ص + ٣ = ٠

جـ تحت تأثير د (م ، ٣٦٠°) :

(س ، ص) ← (س ، ص)

فإذا كانت (س ، ص) ← (س′ ، ص′) فإن :

س′ = س ، ص′ = ص

ويكون ٢س′ + ٤ص′ − ٣ = ٠

وتكون معادلة ن′ هي ٢س + ٤ص − ٣ = ٠ نفس معادلة ن .

د تحت تأثير د (م ، ٢٧٠°) :

(س ، ص) ← (ص ، − س)

فإذا كانت (س ، ص) ← (س′ ، ص′) فإن :

س′ = ص ومنها ص = س′

ص′ = −س ومنها س = −ص′

ويكون −٢ ص′ + ٤ س′ − ٣ = ٠

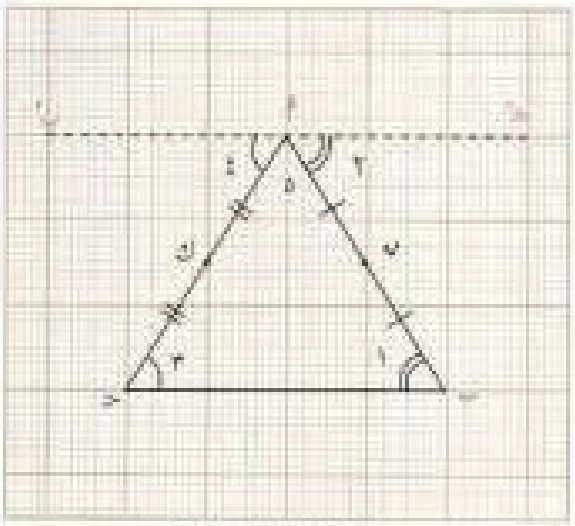
أو ٤ س′ −٢ ص′ − ٣ = ٠

∴ معادلة ن′ هي : ٤ س − ٢ ص − ٣ = ٠ ■

مثال ٣

مستعيناً بالدوران د (م ، ١٨٠°) برهن على أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي ١٨٠°

الحل



شكل (٤ − ٢٢)

في شكل (٤ − ٢٢)

بفرض أن هـ ، ك هما منتصفا

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على الترتيب ،

∴ د (هـ ، ١٨٠°) :

ب ← أ

جـ ← جـ′

$\overline{ب جـ}$ ← $\overline{أ جـ′}$

وتكون $\overline{ب حـ} // \overline{أ حـ'}$ ..... (I)

من النتيجة (٢) :

∴ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) ..... (II)

كذلك ، د (ك ، ١٨٠°) :

$\overline{ب حـ} \cong \overline{ب' أ'}$ ..... (III)

وتكون $\overline{ب حـ} // \overline{ب' أ'}$

∴ ق ($\hat{٣}$) = ق ($\hat{٤}$) ..... (IV)

من (I) ، (III) : حـ' ، أ ، ب' على استقامة واحدة

ومن (II) ، (IV) :

ق ($\hat{١}$) + ق ($\hat{٣}$) + ق ($\hat{٥}$) = ق ($\hat{٢}$) + ق ($\hat{٤}$) + ق ($\hat{٥}$) = ١٨٠° ■

نتيجة ٣

انعكاسان متتاليان في مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانا مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وقياس زاويته يساوي ضعف قياس الزاوية المحددة بهما .

انظر شكل (٤ - ٢٣)

بفرض أن ل ، ن متقاطعان في م ، وبفرض أن أ' صورة أ بالانعكاس في ل ،

أ'' صورة أ' بالانعكاس في ن ، فإن :

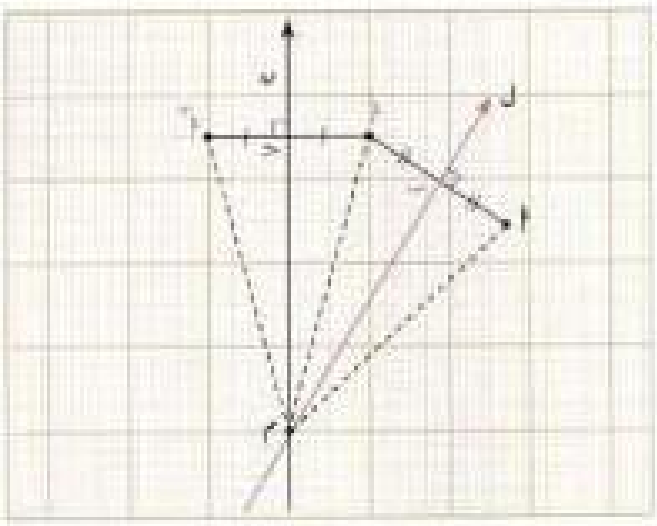
م أ = م أ' ، م أ' = م أ'' لماذا؟

∴ م أ'' = م أ' = م أ

كذلك :

ق (أ $\hat{م}$ أ'') = ٢ ق (ب $\hat{م}$ حـ) - لماذا؟

∴ أ'' صورة أ تحت تأثير دوران مركزه م في الاتجاه من ل إلى ن وقياس زاويته = ٢ ق (ب $\hat{م}$ حـ) .



شكل (٤ - ٢٣)

التناظر الدوراني :

هـ دائرة مركزها م شكل (٤ - ٢٤)

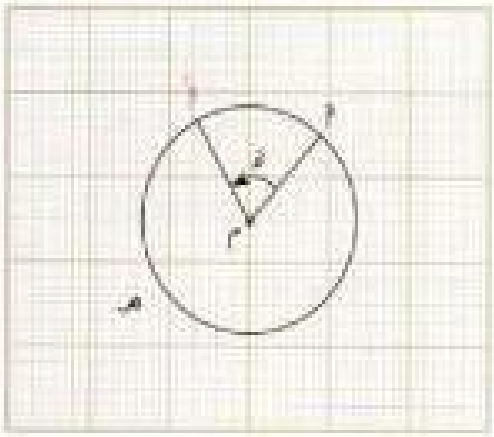
لنعتبر الدوران د(م ، هـ)

واضح أنه ∀ أ ∈ هـ إذا كان

أ ← أ' تحت تأثير د(م ، هـ)

فإن أ' ∈ هـ أيضاً .

أي أن هـ ← هـ تحت تأثير د(م ، هـ) .



شكل (٤ - ٢٤)

لذلك نقول إن الدائرة متناظرة حول مركزها بدوران قياس زاويته هـ .

كمثال آخر على التناظر الدوراني :

أ ب حـ مثلث متطابق الأضلاع

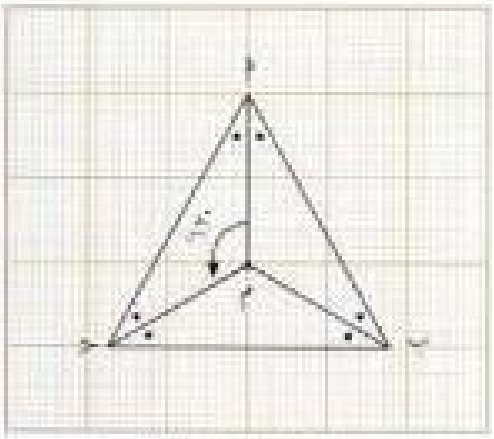
م نقطة تقاطع منصفات زواياه ، شكل (٤ - ٢٥)

واضح أن : أ م = حـ م = ب م ،

ق (أ م̂ حـ) = ق (حـ م̂ ب) = ق (ب م̂ أ) = ١٢٠°

∴ تحت تأثير د (م ، ١٢٠°)

أ ← حـ ، ب ← أ ، حـ ← ب ، Δ أ ب حـ ← Δ حـ أ ب



شكل (٤ - ٢٥)

أي أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متناظراً تحت تأثير الدوران د (م ، ١٢٠°) حيث م هي نقطة تقاطع منصفات زواياه .

ماذا لو اعتبرنا في المثال السابق الدوران د(م ، ٢٤٠°)؟

تحت تأثير د(م ، ٢٤٠°) :

أ ← ب ، ب ← حـ ، حـ ← أ ، Δ أ ب حـ ← Δ ب حـ أ

أي أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون أيضاً متناظراً تحت تأثير الدوران د(م ، ٢٤٠°) حيث م نقطة تقاطع منصفات زواياه .

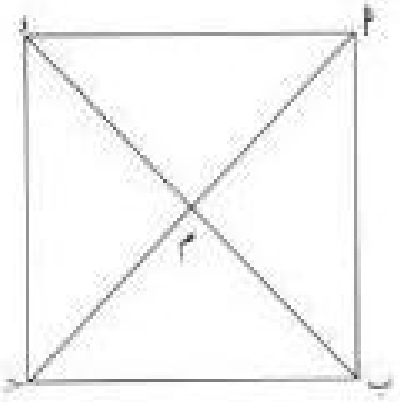
تدريب :

أ تحقق من أن المربع متناظر تحت تأثير دوران مركزه نقطة تقاطع قطرية وقياس زاويته ٩٠° أو ١٨٠° أو ٢٧٠° .

ب تحقق من أن كل مستقيم ل يكون متناظراً تحت تأثير دوران مركزه م ∈ ل ، وقياس زاويته ١٨٠° .

٤-٤ تمارين

١ لاحظ الشكل ثم أكمل :



أ △م أ ب صورة △م جـ د تحت تأثير :

الدوران د(. . . ، . . . .)

أو الدوران د(. . . ، . . . .)

أو الانعكاس في النقطة . . .

ب △م ب جـ صورة △م جـ د تحت تأثير :

الدوران د(. . . ، . . . .)

أو الدوران د(. . . ، . . . .)

أو الانعكاس في . . .

٢ عين صورة المثلث الذي رؤوسه ب (٥ ، -١) ، جـ (-١ ، -٢) ، د (٢ ، -١) تحت تأثير دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° .

٣ إذا كانت (-٣ ، ٤) هي صورة (٣ ، -٤) تحت تأثير تحويل هندسي ، فعين هذا التحويل .

٤ أوجد صورة النقطة (-١ ، -٣) تحت تأثير :

أ د(و ، ٩٠°) **ب** د(و ، ١٨٠°)

جـ د(و ، ٢٧٠°) **د** د(و ، ٣٦٠°)

حيث و هي نقطة الأصل .

٥ ما صورة △ أ ب حـ المتطابق الأضلاع تحت تأثير :

أ د(م ، ١٢٠°) ب د(م ، ٦٠°)

حيث م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة .

٦ في التمرين السابق :

ما التحويل الهندسي الذي يحول △ أ م حـ إلى △ أ م ب ؟

٧ إذا كان أ ب حـ د مربع وكانت م هي نقطة تقاطع قطريه فأوجد :

أ صورة $\overline{أب}$ تحت تأثير د(م ، ١٨٠°) .

ب صورة $\overline{أب}$ تحت تأثير انعكاس في م . ماذا تلاحظ؟

حـ صورة $\overline{بحـ}$ تحت تأثير الدوران د(م ، ١٨٠°) .

د صورة △ أ ب حـ تحت تأثير الدوران د (م ، ٩٠°) .

٨ إذا كانت معادلة المستقيم ل هي س + ٢ص = ٦ فأوجد معادلة ل' صورة ل تحت تأثير الدوران الآتي حيث و نقطة الأصل :

أ د(و ، ٩٠°)

ب د(و ، ١٨٠°)

٩ أوجد معادلة المستقيم الذي صورته المستقيم ٤ س -٢ ص + ٣ = ٠ تحت تأثير د(م ، ٩٠°) .

١٠ أوجد معادلة المستقيم الذي صورته المستقيم ٣ ص - ٢ س = ٧ تحت تأثير د(م ، ١٨٠°) .

٤ـ٥ ملخص وتمارين عامة Summary

- التحويل الهندسي :

التطبيق ت : π ← π (حيث π يرمز للمستوى) يسمى تحويلاً هندسياً إذا كان تقابلاً (أي إذا كان شاملاً ومتبايناً) .

- الانعكاس :

- بالانعكاس في نقطة الأصل : (س ، ص) ← (ـس ، ـص)
- بالانعكاس في المحور السيني : (س ، ص) ← (س ، ـص)
- بالانعكاس في المحور الصادي : (س ، ص) ← (ـس ، ص)
- بالانعكاس في المستقيم ص = س : (س ، ص) ← (ص ، س)
- بالانعكاس في المستقيم ص = ـس : (س ، ص) ← (ـص ، ـس)

- الانسحاب :

- بالانسحاب في الاتجاه الموجب للمحور السيني مسافة قدرها ف :
  (س ، ص) ← (س + ف ، ص)
- بالانسحاب في الاتجاه السالب للمحور السيني مسافة قدرها ف :
  (س ، ص) ← (س − ف ، ص)
- بالانسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي مسافة قدرها ف :
  (س ، ص) ← (س ، ص + ف)
- بالانسحاب في الاتجاه السالب للمحور الصادي مسافة قدرها ف :
  (س ، ص) ← (س ، ص − ف)
- (س ، ص) ← (س + ب ، ص + جـ) تحت تأثير انسحاب مسافته

ف = $\sqrt{ب^2 + جـ^2}$ في اتجاه يصنع مع الاتجاه الموجب للمحور السيني زاوية قياسها هـ

حيث ظا هـ = $\frac{جـ}{ب}$

- الدوران :

- بالدوران د (م ، ٩٠°) : (س ، ص) ← (-ص ، س)
- بالدوران د (م ، ١٨٠°) : (س ، ص) ← (-س ، -ص)
- بالدوران د (م ، ٢٧٠°) : (س ، ص) ← (ص ، -س)
- بالدوران د (م ، ٣٦٠°) : (س ، ص) ← (س ، ص)
- بالانعكاس في نقطة يكافئ دوراناً مركزه هذه النقطة وقياس زاويته ١٨٠° أو - ١٨٠° .
- صورة مستقيم تحت تأثير نصف دورة هي مستقيم يوازيه .

٤-٥ تمارين عامة

● بنود موضوعية

أولاً : ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

١ صورة أي مربع تحت تأثير دوران مركزه ملتقى قطريه وبزاوية قياسها ٢٧٠° هي المربع نفسه .

٢ صورة مستقيم تحت تأثير دوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي لمستقيم آخر يوازيه .

٣ صورة النقطة (-٢ ، -٥) تحت تأثير انعكاس في المستقيم ص = -س هي (-٥ ، ٢) .

٤ النقطة (-٢ ، ٠) صامدة تحت تأثير انعكاس في المحور السيني .

٥ إذا كانت أ' (س + ٣ ، ص - ٤) هي صورة أ (س ، ص) تحت تأثير انسحاب في المستوى الاحداثي فإن مسافة هذا الانسحاب هي ٢٥ وحدة .

ثانياً : لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد منها فقط صحيح ، ظلل الدائرة التي تدل على الإجابة الصحيحة

١ إذا كانت أ نقطة صامدة تحت تأثير التحويل ت : π ← π حيث

ت (س ، ص) = (٢ س + ٥ ، ٣ ص - ٤) فإن أ هي

(أ) (-٥ ، ٤) (ب) (٥ ، -٤)

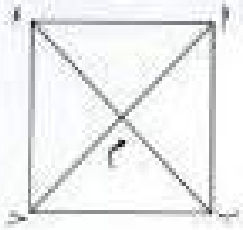
(ج) (٥ ، -٢) (د) (-٥ ، ٢)

٢ إذا كانت ٢س + ٤ص - ٣ = ٠ هي معادلة المستقيم د فإن معادلة د' صورة د تحت تأثير دورة كاملة حول نقطة الأصل هي :

(أ) ٢س - ٤ص - ٣ = ٠ (ب) -٤س + ٢ص - ٣ = ٠

(ج) ٢س + ٤ص + ٣ = ٠ (د) ٢س + ٤ص - ٣ = ٠

٣ الشكل أ ب جـ ء مربع نقطة تقاطع قطريه م فان المثلث ب م أ هو صورة المثلث ء م جـ تحت تأثير :



(أ) د (م ، ٩٠°) (ب) د (م ، ٢٧٠°)

(جـ) د (م ، ١٨٠°) (ء) د (م ، ٣٦٠°)

٤ صورة النقطة أ (٧ ، ٦) هي أ' (٤ ، ٦) تحت تأثير انسحاب مسافته

(أ) $\sqrt{٢٩}$ وحدة (ب) ٣ وحدة

(جـ) $\sqrt{٧}$ وحدة (ء) ٤ وحدة

٥ إذا كانت أ' (-١ ، ٢) هي صورة أ (س ، ص) تحت تأثير انسحاب في المستوى الإحداثي قاعدته (س ، ص) ← (س + ١ ، ص - ٢) فإن أ هي :

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (-٢ ، ٠)

(جـ) (-٢ ، ٤) (ء) (٠ ، ٤)

أسئلة مقالية

١ إذا كانت هـ' (٣ ، -٦) صورة هـ (-١ ، ٢) بالانعكاس في مستقيم ل ، فأوجد معادلة ل .

٢ أوجد معادلة صورة المستقيم ٣س - ص = ٣ بالانعكاس في كل من : محور السينات ، محور الصادات ، المستقيم ص = - س ، والمستقيم ص = س

٣ ب جـ ء هـ متوازي أضلاع فيه ب (١ ، ٢) ، جـ (٢ ، ٤) ، ء (٦ ، ٥) ، هـ (٥ ، ٣) عين قاعدة الانسحاب الذي تحت تأثيره تكون $\overline{هـ ء}$ صورة $\overline{ب جـ}$

٤ إذا كانت ب′ صورة ب (١ ، ٣) ، حـ′ صورة حـ (٦ ، ٣) تحت تأثير انسحاب مسافته ٥ وحدات بالاتجاه السالب للمحور الصادي :

أولاً : حدد نوع الشكل ب حـ حـ′ ب′

ثانياً : إذا كانت و′ صورة و تحت تأثير الانسحاب السابق ، وكانت :

س + ص = ٤ معادلة $\overleftrightarrow{\text{و′حـ′}}$ ،

٣ ص − ٢س = ٣ معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$

فأوجد كلاً من النقطتين و ، و′

٥ إذا أثرنا بانسحاب على النقاط ب (−٤ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٠) ، و (٥ ، −١) فكانت حـ صورة ب فأوجد قاعدة هذا الانسحاب ثم أوجد نقطة م التي تكون صورة لنقطة تحت تأثير هذا الانسحاب .

٦ أ ب حـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٣سم ، أخذنا نقطة و ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ ولتكن أ′ ب′ حـ′ ، أ″ ب″ حـ″ ، أ‴ ب‴ حـ‴ صور أ ب حـ تحت تأثير الدوران د (و ، ٩٠°) ، د (و ، ١٨٠°) ، د (و ، −٩٠°) على الترتيب ، أثبت أ أ′ أ″ أ‴ مربع

٧ ل صورة ق تحت تأثير د (م ، ٩٠°) ، إذا علم أن معادلة ق هي س − ٣ ص − ٥ = ٠ فعين معادلة ل .

٨ في التمرين السابق إذا كانت معادلة ل هي ٥س − ٧ص = ٤ فعين معادلة ق .

٩ صورة المستقيم ل : ٢س − ٢ص + ٥ = ٠ تحت تأثير د (م ، ١٨٠°) هي ن ، عين معادلة ن .

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم ١٨٦ بتاريخ ١٤ / ٥ / ١٩٩٦

شركة مطابع الرسالة - الكويت