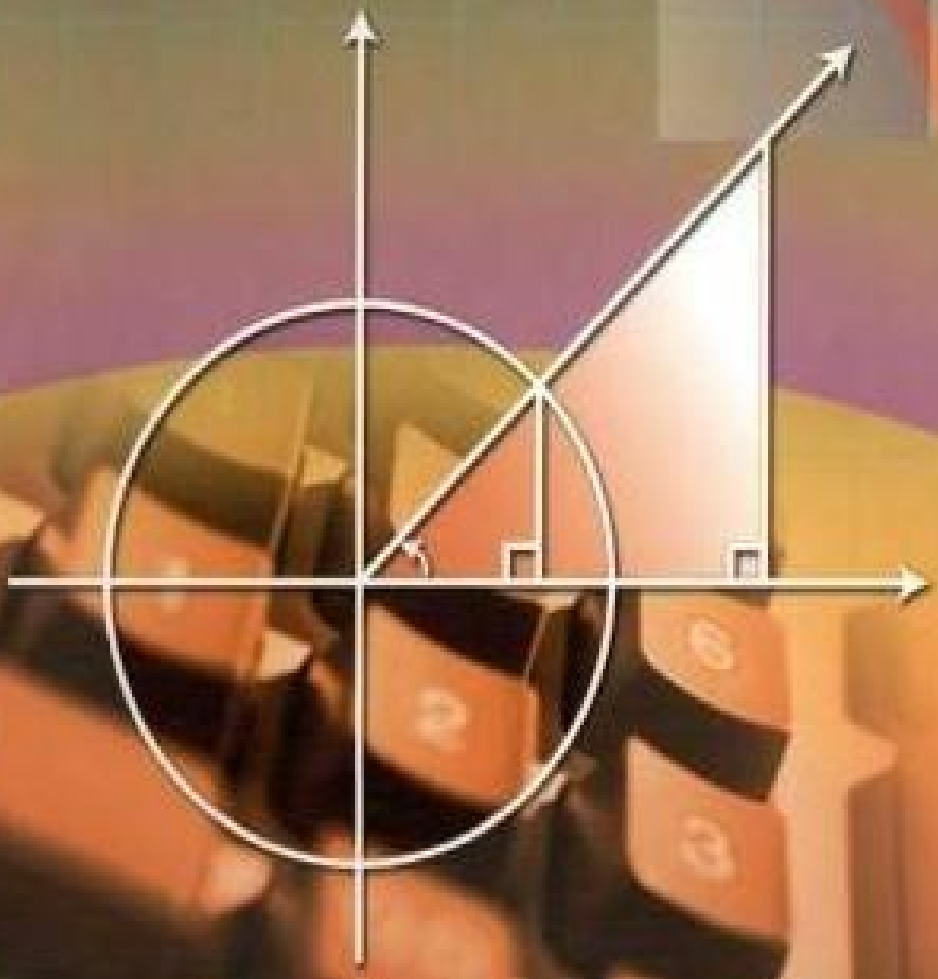
وزارة التربية

الرياضيات

للصف العاشر

الجزء الأول



المرحلة الثانوية

الطبعة الخامسة

وزارة التربية

الرياضيات

للصف العاشر

الجزء الأول

تأليف

إبراهيم حسين القطان — سلوى لطيف مطر

عبدالله محمد النعمة — محمد راشد بن سعيد الحديدي

محمد هلال اليوسفي — ناهدة إبراهيم الخياط

د. يوسف بن صالح الشنيفي

تحرير ومراجعة

دكتور عبدالفتاح الشرقاوي

الطبعة الخامسة

١٤٣١هـ

٢٠١٠ / ٢٠١١م

الطبعة الأولى: ٩٣/١٩٩٤م

الطبعة الثانية: ٩٦/١٩٩٧م

الطبعة الثالثة: ٩٨/١٩٩٩م

الطبعة الرابعة: ٢٠٠٠/٢٠٠١م
: ٢٠٠٢/٢٠٠٣م
: ٢٠٠٤/٢٠٠٥م
: ٢٠٠٥/٢٠٠٦م

الطبعة الخامسة: ٢٠٠٦/٢٠٠٧م
: ٢٠٠٧/٢٠٠٨م
: ٢٠٠٩/٢٠١٠م
: ٢٠١٠/٢٠١١م

تصميم وإخراج: نعمات محجوب السيد حسن

بسم الله الرحمن الرحیم

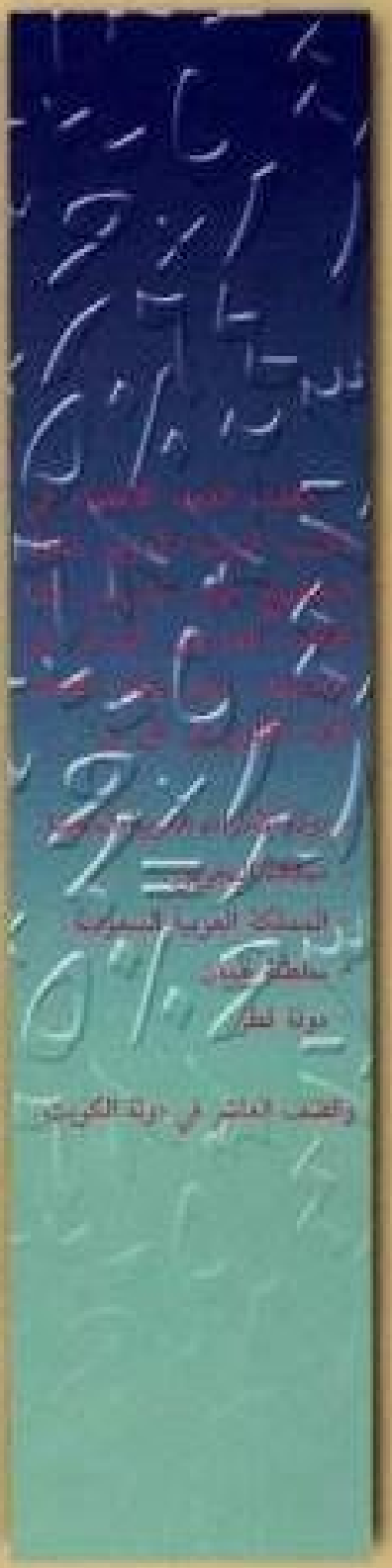
صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

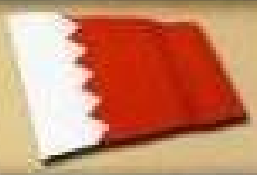
ولي عهد دولة الكويت

خبراء المشروع



دولة الإمارات العربية المتحدة:

د. حميد فائز حميد.
د. رفعت أحمد عبداللطيف.
محمد هلال البوميقي.



مملكة البحرين:

د. عبدالله الحراج.
عدي إسماعيل العوضي.
بادية إبراهيم الخياط.
سلوى لطيف مطر.

دولة الكويت:

د. منصور غلوم حسين.
علي عبدالله الصراف.
إبراهيم حسين النطان.

المملكة العربية السعودية:

د. محمد بن علوي البار.
د. محمد القاضي.
د. يوسف بن صالح الشيفي.

سلطنة عمان:

محمد راشد بن سعيد الحليدي.
أحمد رضا أمين مهنا.

دولة قطر:

د. نصرة رضا حسن الباقر.
عبدالله محمد العمة.

المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج:

د. عبدالفتاح الشرقاوي.

الموضوع

المحتوى

الصفحة

٣ الفصل الثالث

٤ الفصل الرابع

المقدمة

المربي الفاضل... المربية الفاضلة..

يسر مكتب التربية العربي لدول الخليج/المركز العربي للبحوث التربوية لدول الخليج، أن يضع بين يديك كتاب الطالب لرياضيات الصف العاشر المعادل للصف الأول الثانوي في كل من دولة الإمارات العربية المتحدة، ومملكة البحرين، وسلطنة عُمان، ودولة قطر، والمملكة العربية السعودية، والصف العاشر في دولة الكويت، وذلك استكمالاً لمسيرة توحيد وتطوير مناهج الرياضيات لمراحل التعليم العام. وقد وضع هذا الكتاب في ظل منهج خليجي موحد، من أهم ملامحه أنه:

- يتناول محتوى موحدًا في كل الدول الأعضاء بالمكتب بقصد بناء الإنسان وتنمية المجتمع في إطار وحدة الفكر والهدف الخليجي.
- يتناول في محتواه حاسبات الجيب الإلكترونية، فيربط بذلك بين دراسة الرياضيات وتكنولوجيا العصر.
- يعكس الاتجاهات العالمية المعاصرة في الرياضيات المدرسية.
- يتم بناؤه من خلال عمل جماعي تشارك فيه جميع الدول الأعضاء، وينبع من فكرها وتطلعاتها وواقعها.
- يؤكد الدور الوظيفي للرياضيات وخاصة فيما يتعلق بحل المشكلات ويؤكد إيجابية ونشاط المتعلم.
- يراعي الفروق الفردية من خلال تنوع الأنشطة وتقديم توجيهات عمل في كتاب المعلم.
- يأتي بناؤه في تتابع تطويري، محاوره: التخطيط والإعداد، والتجريب، والتقويم المصاحب، والتحسين، ثم التعميم، مع المتابعة التطويرية في ضوء التغذية الراجعة.

هذا وتناول محتوى منهج الصف العاشر الحد الأدنى من المعرفة والثقافة الرياضية اللازمة لطالب هذا الصف من أجل المواطنة ومن أجل متابعة دراسته.

وقد جاء كتاب الطالب في جزأين وذلك على النحو التالي:

الجزء الأول: يتناول موضوعات: حاسبات الجيب الإلكترونية وحساب المثلثات والجمل الرياضية، والمصفوفات والمحددات.

الجزء الثاني: يتناول الحدوديات والهندسة الإحداثية والإحصاء وهندسة التحويلات.

أيها المربي الفاضل... أيتها المربية الفاضلة...

إذا كانت كتب الرياضيات الموحدة قد حرصت على تقديم الأفضل، مادة وطريقة، فإن الدور الذي تنتظره منك هو الذي يؤكد هذا الاتجاه وينميه، ويجعله وسيلة لإثارة الدافعية لدى المتعلم، فيكون تعلمه معتمدًا على نشاطه، ويكون نشاطه منطلقًا من رغبة ذاتية، ويستطيع المعلم أن يهيء للرغبة دوافعها، وإننا لعلى يقين من النجاح والتوفيق لجميع الزملاء من معلمين ومعلمات فيما قصدنا إليه، متى صحت النية وصدق العزم.

والله من وراء القصد، وهو يهدي السبيل.

مدير المركز

الفصل الأول

حاسبات الجيب الإلكترونية
Calculators

١ - ١ نظام العد الثنائي The Binary Numeration System

تعرفت نظام العد العشري أو النظام العشري اختصارًا، ومازلت تتعامل به يوميًا في دراستك أو في حياتك العامة. وتعلم أن:

- الأرقام المستخدمة في نظام العد العشري هي:
  ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ وعددها عشرة.
  ∴ مجموعة أرقام النظام العشري {٠، ١، ٢، ...، ٩}
- كل عدد في نظام العد العشري كبر أو صغر يتكون رمزه من بعض أو كل هذه الأرقام.
  مجموعة أرقام العدد ٣٤٥ هي {٣، ٤، ٥}
  ، مجموعة أرقام العدد ٢٣٤٤ هي {٢، ٣، ٤}
  ، مجموعة أرقام العدد ٨١٦١٥٦ هي {١، ٥، ٦، ٨}... إلخ.
- كل عدد في نظام العد العشري يعبر عنه بدلالة مضاعفات بعض قوى العدد عشرة، فمثلًا:

$$٣٤٥ = ٥ \times ١٠^{٠} + ٤ \times ١٠^{١} + ٣ \times ١٠^{٢}$$

$$٢٣٤٤ = ٤ \times ١٠^{٠} + ٤ \times ١٠^{١} + ٣ \times ١٠^{٢} + ٢ \times ١٠^{٣}$$

$$٨١٦١٥٦ = ٦ \times ١٠^{٠} + ٥ \times ١٠^{١} + ١ \times ١٠^{٢} + ٦ \times ١٠^{٣} + ١ \times ١٠^{٤} + ٨ \times ١٠^{٥} \ldots \text{إلخ}$$

ونلاحظ أن $١٠^{٠} = ١$ ترمز إلى منزلة الآحاد

$١٠^{١} = ١٠$ ترمز إلى منزلة العشرات

$١٠^{٢} = ١٠٠$ ترمز إلى منزلة المئات

$١٠^{٣} = ١٠٠٠$ ترمز إلى منزلة الآلاف وهكذا...

ولعلك تذكر قطع دنيز التي توضح فكرة المنازل حيث شكل (١ - ١) يوضح تمثيل العدد ٣٤٥ بقطع دنيز.

شكل ١ - ١

٣٤٥ = ٥ × ١ + ٤ × ١٠ + ٣ × ١٠٠

= ٥ + ٤٠ + ٣٠٠

حيث ٥ هي القيمة المكانية للرقم ٥ في العدد ٣٤٥

، ٤٠ هي القيمة المكانية للرقم ٤ في العدد ٣٤٥

، ٣٠٠ هي القيمة المكانية للرقم ٣ في العدد ٣٤٥

يتم التجميع عشرة عشرة في نظام العد العشري، ولذلك نقول إن أساسه ١٠ ونكتب رموز أعداده أحيانًا على الصورة:

$(٣٤٥)_{١٠}$، $(٢٣٤٤)_{١٠}$، $(٨١٦١٥٦)_{١٠}$، ....

نظام العد العشري ليس النظام الوحيد، فهناك أنظمة عد أخرى متعددة، سنختار أهمها وهو نظام العد الثنائي الذي تعمل به حاسبات الجيب الإلكترونية ومعظم أجهزة الحاسوب.

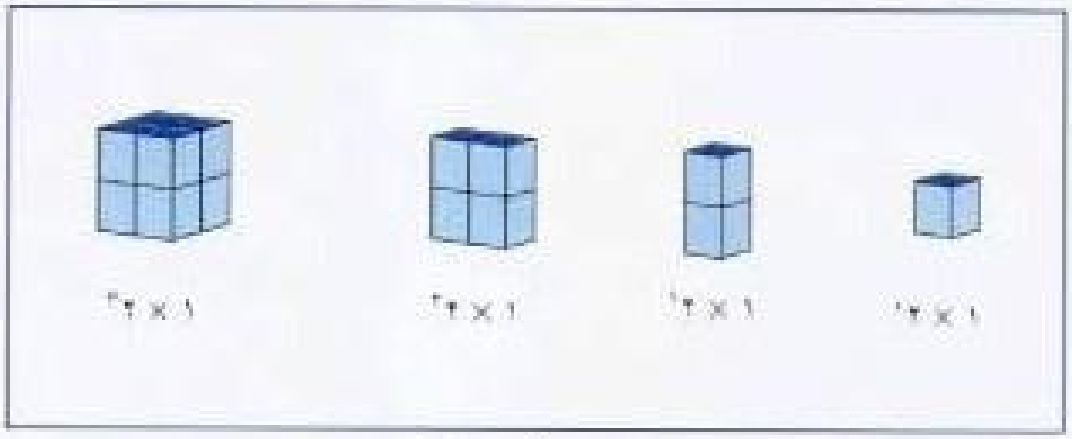
على غرار ما لاحظت في نظام العد العشري:

- أرقام نظام العد الثنائي اثنان هما ٠، ١
  أي أن مجموعة أرقام نظام العد الثنائي هي {٠، ١}.
- كل عدد في نظام العد الثنائي يتكون رمزه من رقمين على الأكثر مأخوذين من المجموعة {٠، ١}.
- في نظام العد الثنائي يتم التجميع اثنين اثنين، ولذلك نقول إن أساس هذا النظام ٢، ونكتب رموز أعداده على الصورة:
  $(١١١)_{٢}$، $(١١٠١)_{٢}$، $(١١٠١٠١)_{٢}$، ....
- أعداد نظام العد الثنائي هي:
  ٠ ويقرأ «صفر»،
  ١ ويقرأ «واحد»،
  ١٠ ويقرأ «واحد صفر» وأحيانًا «اثنان»،
  ١١ ويقرأ «واحد واحد» وأحيانًا «اثنان وواحد»،
  ١٠٠ ويقرأ «واحد صفر صفر» وأحيانًا «اثنانان»،
  ١٠١، ١١٠، ١١١، ١٠٠٠، ١٠٠١، ....
- في نظام العد الثنائي:
  $٢^{٠}$ = ١ ترمز إلى منزلة الآحاد.
  $٢^{١}$ = ٢ ترمز إلى منزلة الاثنانات.

$٢^{٢}$ = ٤ ترمز إلى منزلة الأربعات.

$٢^{٣}$ = ٨ ترمز إلى منزلة الثمانيات . . . إلخ.

يمكن استخدام قطع دنيز أيضًا في تمثيل الأعداد في نظام العد الثنائي - انظر شكل (١ - ٢) الذي يمثل العدد $(١١١١)_{٢}$.



شكل ١ - ٢

$$(١١١١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣}$$

$$= ١ \times ١ + ١ \times ٢ + ١ \times ٤ + ١ \times ٨$$

$$= ١ + ٢ + ٤ + ٨$$

ويعني هذا أن العدد ١١١١ في النظام الثنائي يقابل العدد ١٥ في نظام العد العشري.

مما سبق يتضح أن كل عدد في نظام العد الثنائي يمكن التعبير عنه بدلالة مضاعفات بعض قوى العدد اثنين، مثلاً:

$$(١٠٠١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ٠ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣}$$

$$(١١٠٠١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ٠ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤}$$

$$(١٠١١١٠)_{٢} = ٠ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣} + ٠ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٥}$$

ملاحظة: في نظام العد العشري، القيمة المكانية للرقم في العدد = ١٠ × القيمة المكانية لهذا الرقم إذا شغل المنزلة السابقة في العدد.

وكذلك في نظام العد الثنائي، القيمة المكانية للرقم في العدد = ٢ × القيمة المكانية لهذا الرقم إذا شغل المنزلة السابقة في العدد.

وبعبارة أخرى فإن القيمة المكانية للرقم في العدد بالنظام الثنائي

= الرقم × قيمة المنزلة التي يشغلها.

مثال ١

اكتب القيمة المكانية للرقم الذي أسفله خط في كل من الأعداد التالية:

$(1\underline{0}1)_2$، $(10\underline{1}010)_2$، $(1\underline{1}011100)_2$

الحل

١ في العدد الذي رمزه $1\underline{0}1$

الرقم المطلوب إيجاد قيمته المكانية يشغل منزلة الأربعات

∴ قيمته المكانية = $1 \times 2^2 = 4$

٢ في العدد الذي رمزه $10\underline{1}010$

الرقم المطلوب إيجاد قيمته المكانية يشغل منزلة الثمانيات

∴ قيمته المكانية = $1 \times 2^3 = 8$

٣ القيمة المكانية للرقم المطلوب = $1 \times 2^5 = 32$

مثال ٢

رتب الأعداد التالية تصاعديًا: $(1000101)_2$ ، $(100001)_2$ ، $(1011011)_2$

الحل

$(1000101)_2 > (100001)_2$ لزيادة عدد المنازل

$(1\underline{0}11011)_2 > (10\underline{0}0101)_2$ لماذا؟

(فارق القيمة المكانية للرقم الذي يشغل المنزلة الست عشرية (2^4) في كل من العددين).

∴ الأعداد مرتبة تصاعديًا هي: $(100001)_2$ ، $(1000101)_2$ ، $(1011011)_2$

تحويل عدد من نظام العد الثنائي إلى نظام العد العشري:

سنستخدم القيمة المكانية للرقم في العدد لتحقيق ذلك كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال ٣ حول (١٠١١٠١)$_{٢}$ إلى النظام العشري.

الحل

$(١٠١١٠١)_{٢} = ١ \times ٢^{٠} + ٠ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ١ \times ٢^{٣} + ٠ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٥}$

$= ١ \times ١ + ٠ \times ٢ + ١ \times ٤ + ١ \times ٨ + ٠ \times ١٦ + ١ \times ٣٢$

$= ١ + ٤ + ٨ + ٣٢ = (٤٥)_{١٠}$

مثال ٤ أوجد العدد الذي يقابل (١١١٠٠٠)$_{٢}$ في النظام العشري.

الحل

$(١١١٠٠٠)_{٢} = ١ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٥} = ٨ + ١٦ + ٣٢ = (٥٦)_{١٠}$

مثال ٥ إذا كان (س)$_{١٠}$ = (١١٠٠١١٠)$_{٢}$ فأوجد القيمة العددية للرمز س

الحل

$(١١٠٠١١٠)_{٢} = ٠ \times ٢ + ١ \times ٢^{١} + ١ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{٣} + ٠ \times ٢^{٤} + ١ \times ٢^{٥} + ١ \times ٢^{٦}$

$= ٢ + ٤ + ٣٢ + ٦٤ = (١٠٢)_{١٠}$

$\therefore$ س = ١٠٢

تحويل عدد من نظام العد العشري إلى نظام العد الثنائي:

لتحويل $(٧٥)_{١٠}$ مثلاً إلى نظام العد الثنائي.

في العدد ٧٥ يوجد ٦٤ لمرة واحدة والباقي ١١

وفي العدد ١١ يوجد ٨ لمرة واحدة والباقي ٣

وفي العدد ٣ توجد ٢ لمرة واحدة والباقي ١

١	١	٠	١	٠	٠	١
١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤

$\therefore (٧٥)_{١٠} = (١٠٠١٠١١)_{٢}$

يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها إذا اتبعنا الطريقة التالية:

حل آخر:

٧٥ ÷ ٢ = ٣٧ والباقي ١

٣٧ ÷ ٢ = ١٨ والباقي ١

١٨ ÷ ٢ = ٩ والباقي ٠

٩ ÷ ٢ = ٤ والباقي ١

٤ ÷ ٢ = ٢ والباقي ٠

٢ ÷ ٢ = ١ والباقي ٠

١ ÷ ٢ = ٠ والباقي ١

$\therefore (٧٥)_{١٠} = (١ ١ ٠ ١ ٠ ٠ ١)_{٢}$

١ - ١

تمارين

• بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ $(١٠٠٠٠٠٠)_٢ =$

(أ) ٣٢ (ب) ٦١ (ج) ٦٢ (د) ٦٤

٢ العدد اللاحق للعدد $(١١٠١٠)_٢$ هو:

(أ) $(١٠١١١)_٢$ (ب) $(١١٠١١)_٢$ (ج) $(١١١١٠)_٢$ (د) $(١١٠١٠١)_٢$

٣ إذا كان $(أ)_{١٦} = (١٠٠١١١)_٢$ فإن القيمة العددية للرمز أ هي:

(أ) ٤٧ (ب) ٤٣ (ج) ٣٩ (د) ٣٥

٤ إذا كان $(ص)_٢ = (١١)_{١٦}$ فإن ص =

(أ) ١١٠١ (ب) ١٠٠١ (ج) ١٠١١ (د) ١٠٠٠١

• أسئلة مقالية

١ اكتب القيمة المكانية للرقم الذي تحته خط في كل من الأعداد التالية:

$(١\underline{٠}٠١)_٢$ ، $(١٠\underline{١}١)_٢$ ، $(١٠١١\underline{١})_٢$

٢ رتب الأعداد التالية ترتيبًا تصاعديًا.

أ $(١١١)_٢$ ، $(١١٠)_٢$ ، $(١٠١)_٢$

ب $(١١١٠)_٢$ ، $(١١٠١)_٢$ ، $(١١٠٠)_٢$

ج $(١١٠١١)_٢$ ، $(١٠١١١)_٢$ ، $(١٠٠٠٠١)_٢$

د $(٢٤)_{١٦}$ ، $(١١١٠)_٢$ ، $(١١٠٠١)_٢$

٣ رتب الأعداد التالية تنازليًا:

$(١١١٠١)_٢$ ، $(١١١٠٠)_٢$ ، $(١١١١)_٢$ ، $(١١٠٠٠)_٢$

٤ حول إلى النظام العشري:

أ (١٠١)$_{٢}$ ب (١١١١١)$_{٢}$

جـ (١٠٠٠٠١)$_{٢}$ د (١٠١٠١٠١٠)$_{٢}$

هـ (١٠٠٠١٠١)$_{٢}$ و (١١٠١١٠١١)$_{٢}$

٥ إذا كان (س)$_{١٠}$ = (١١١٠١١٠)$_{٢}$ فأوجد القيمة العددية للرمز س

٦ إذا كان (٢أ)$_{١٠}$ = (١٠٠٠٠)$_{٢}$ فأوجد القيمة العددية للرمز أ

٧ إذا كان (ب + ٤)$_{١٠}$ = (١٠١٠١٠٠)$_{٢}$ فأوجد القيمة العددية للرمز ب

٨ حول إلى النظام الثنائي:

أ ٦٤ ب ٤٢

جـ ٥٤ د ١٠٣

هـ ٢٠٧ و ٣١٦

٩ إذا كان (أ)$_{١٠}$ = (١٠١٠١٠١)$_{٢}$

، (ب)$_{١٠}$ = (١٠١٠٠٠١١)$_{٢}$

فأوجد قيمة ٢ أ + ب

١ - ٢ العمليات الأساسية في نظام العد الثنائي

Basic Operations of The Binary Numeration System

(١ - ٢أ) الجمع والطرح — Addition and Subtraction

• أولًا: الجمع

الجدول المقابل يوضح الحقائق الأساسية لعملية الجمع في نظام العد الثنائي وهي:

+	٠	١
٠	٠	١
١	١	١٠

$(٠)_٢ + (٠)_٢ = (٠)_٢$

$(٠)_٢ + (١)_٢ = (١)_٢$

$(١)_٢ + (٠)_٢ = (١)_٢$

$(١)_٢ + (١)_٢ = (١٠)_٢$

لاحظ ما يلي:

١ - عملية الجمع في نظام العد الثنائي إبدالية وتجميعية كما هي في النظام العشري.

٢ - خوارزمية الجمع في نظام العد الثنائي لا تختلف عنها في النظام العشري، حيث تجمع الأرقام في المنازل المتشابهة وتعاد التسمية عند الحاجة.

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يلي في نظام العد الثنائي، ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الأعداد المقابلة في نظام العد العشري.

أ $(١١١٠)_٢ + (١١٠١)_٢$

ب $(١٠١٠)_٢ + (١٠١١)_٢ + (١١٠١٠)_٢$

الحل

أ $(١١١٠)_٢ + (١١٠١)_٢ = (١١٠١١)_٢$

$$\begin{array}{r} ١\ ١\ ١\ ٠ \\ +\ ١\ ١\ ٠\ ١ \\ \hline ١\ ١\ ٠\ ١\ ١ \end{array}$$

(١) (١٠)

للتحقق:

$(١١١٠)_٢ = ٠ + ١ \times ٢ + ١ \times ٢^٢ + ١ \times ٢^٣$

$= ٠ + ٢ + ٤ + ٨ = ١٤$

، $(١١٠١)_٢ = ١ + ١ \times ٢^٢ + ١ \times ٢^٣ = ١٣$

، $(١١٠١١)_٢ = ١ + ١ \times ٢ + ١ \times ٢^٣ + ١ \times ٢^٤ = ٢٧$

، $١٤ + ١٣ = ٢٧$

ب $(١٠١٠)_٢ + (١٠١١)_٢ + (١١٠١٠)_٢$

$= [(١٠١٠)_٢ + (١٠١١)_٢] + (١١٠١٠)_٢$ لماذا؟

$= (١٠١٠١)_٢ + (١١٠١٠)_٢$

$= (١٠١١١١)_٢$

$$\begin{array}{r} ١\ ٠\ ١\ ٠ \\ +\ ١\ ٠\ ١\ ١ \\ \hline ١\ ٠\ ١\ ٠\ ١ \end{array}$$

للتحقق:

$(١٠١٠)_٢ = ٠ + ٢ + ٠ + ٨ = ١٠$

$(١٠١١)_٢ = ١ + ٢ + ٠ + ٨ = ١١$

$(١١٠١٠)_٢ = ٠ + ٢ + ٠ + ٨ + ١٦ = ٢٦$

$(١٠١١١١)_٢ = ١ + ٢ + ٤ + ٨ + ٠ + ٣٢ = ٤٧$

، $١٠ + ١١ + ٢٦ = ٤٧$

$$\begin{array}{r} ١\ ٠\ ١\ ٠\ ١ \\ +\ ١\ ١\ ٠\ ١\ ٠ \\ \hline ١\ ٠\ ١\ ١\ ١\ ١ \end{array}$$

● ثانيًا: الطرح

من الواضح أن: $(٠)_٢ - (٠)_٢ = (٠)_٢$

$(١)_٢ - (٠)_٢ = (١)_٢$

$(١)_٢ - (١)_٢ = (٠)_٢$

$(١٠)_٢ - (١)_٢ = (١)_٢$

ويمكن توظيف ذلك في إيجاد ناتج الطرح في نظام العد الثنائي علمًا بأن خوارزمية الطرح لا تختلف عنها في نظام العد العشري.

مثال ٢ أوجد ناتج الطرح في كل مما يلي:

أ $(١١٠١١)_٢ - (١٠٠١١)_٢$

ب $(١١١١٠)_٢ - (١٠١٠١)_٢$

الحل

أ $(١١٠١١)_٢ - (١٠٠١١)_٢ = (١٠٠٠)_٢$

$$\begin{array}{r} ١١٠١١ \\ - \; ١٠٠١١ \\ \hline ١٠٠٠ \end{array}$$

ب $(١١١١٠)_٢ - (١٠١٠١)_٢ = (١٠٠١)_٢$

$$\begin{array}{r} ١١١١٠ \\ - \; ١٠١٠١ \\ \hline ١٠٠١ \end{array}$$

١-٢ م

تمارين

أولاً: أوجد ناتج كل مما يلي:

١ $(١١)_٢ + (١١)_٢$

٢ $(١٠١)_٢ + (١٠٠)_٢$

٣ $(١٠١٠)_٢ + (١٠٠١)_٢$

٤ $(١٠٠٠٠)_٢ + (١١١١١)_٢$

٥ $(١١٠٠١١)_٢ + (١١١٠٠٠)_٢$

٦ $(١١٠٠)_٢ + (١٠١٠١)_٢ + (١٠٠٠١)_٢$

ثانياً: أوجد ناتج كل مما يلي:

١ $(١١٠)_٢ - (١٠٠)_٢$

٢ $(١١٠)_٢ - (١١)_٢$

٣ $(١٠٠١)_٢ - (١٠١)_٢$

٤ $(١٠١١١)_٢ - (١٠٠١٠)_٢$

٥ $(١٠١٠١٠)_٢ - (١٠١٠١)_٢$

٦ $(١٠١١)_٢ + (١٠١٠٠)_٢ - (١٠٠١)_٢$

٧ $(١٠١١١١)_٢ - (١١١)_٢ + (١٠٠)_٢$

ثالثاً: أوجد قيمة س في كل مما يلي:

١ $(س)_٢ + (١١١)_٢ = (١٩)_{١٠}$

٢ $(س)_٢ - (٢٣)_{١٠} = (١٠٠١)_٢$

● ثالثًا: الضرب

الجدول المقابل يوضح الحقائق الأساسية لعملية الضرب في نظام العد الثنائي وهي:

×	٠	١
٠	٠	٠
١	٠	١

$(٠)_٢ \times (٠)_٢ = (٠)_٢$

$(٠)_٢ \times (١)_٢ = (٠)_٢$

$(١)_٢ \times (٠)_٢ = (٠)_٢$

$(١)_٢ \times (١)_٢ = (١)_٢$

واعتمادًا على هذه الحقائق وتطبيقًا لخوارزمية الضرب مع مراعاة أن عملية الضرب إبدالية وتجميعية في نظام العد الثنائي، تستطيع تعيين حاصل ضرب عددين أو أكثر.

مثال ٣ أوجد ناتج كل مما يلي:

أ $(١٠١٠)_٢ \times (١٠٠١)_٢$

ب $(١٠١)_٢ \times (١١١)_٢$

جـ $(١٠١٠)_٢ \times (١١١)_٢ \times (١٠١)_٢$

الحل

أ

```
      ١٠١٠
×     ١٠٠١
-----------
      ١٠١٠
     ٠٠٠٠
    ٠٠٠٠
   ١٠١٠
-----------
   ١٠١١٠١٠
```

$\therefore (١٠١٠)_٢ \times (١٠٠١)_٢ = (١٠١١٠١٠)_٢$

ب

```
      ١٠١
×     ١١١
-----------
      ١٠١
     ١٠١ (١)
    ١٠١ (١)
   ١٠١
-----------
   ١٠٠٠١١
```

$(١٠١)_٢ \times (١١١)_٢ = (١٠٠٠١١)_٢$

حـ

```
      ١٠١٠
×      ١١١
----------
      ١٠١٠
     ١٠١٠ ①
    ١٠١٠ ①
   ١٠١٠
----------
   ١٠٠٠١١٠
```

```
      ١٠٠٠١١٠
×         ١٠١
----------
      ١٠٠٠١١٠
     ٠٠٠٠٠٠٠
    ١٠٠٠١١٠
----------
   ١٠١٠١١١١٠
```

∴ $(١٠١٠)_٢ \times (١١١)_٢ \times (١٠١)_٢ = (١٠١٠١١١١٠)_٢$

رابعًا: القسمة

من الواضح أن:

$(١)_٢ \div (١)_٢ = (١)_٢$

$(٠)_٢ \div (١)_٢ = (٠)_٢$

$(١)_٢ \div (٠)_٢$ لا يتعين.

مثال ٤ أوجد ناتج $(١١٠١١٠)_٢ \div (١١)_٢$

الحل

```
        ١٠٠١٠
      ---------
١١ |  ١١٠١١٠
      ١١
      ---
       ٠٠٠
       ٠٠٠
       ----
        ٠٠١١
         ١١
         ---
         ٠٠٠
         ٠٠٠
         ---
         ٠٠٠
```

توضيح:

١ ÷ ١١ = ٠ والباقي ١

١١ ÷ ١١ = ١ والباقي ٠

٠ ÷ ١١ = ٠ والباقي ٠

١ ÷ ١١ = ٠ والباقي ١

١١ ÷ ١١ = ١ والباقي ٠

٠ ÷ ١١ = ٠ والباقي ٠

∴ $(١١٠١١٠)_٢ \div (١١)_٢ = (١٠٠١٠)_٢$

للتحقق من صحة الناتج:

$(١١٠١١٠)_٢ = ٠ + ٢ + ٤ + ١٦ + ٣٢ = ٥٤$

$(١١)_٢ = ١ + ٢ = ٣$

$(١٠٠١٠)_٢ = ٠ + ٢ + ١٦ = ١٨$

$\therefore ٥٤ \div ٣ = ١٨$

١-٢ب

تمارين

أولًا: أوجد ناتج الضرب (تحقق من صحة الناتج في (١)، (٢)):

١ $(١١٠٠١١)_٢ \times (١٠)_٢$

٢ $(١٠١٠١٠١)_٢ \times (١١)_٢$

٣ $(١٠١٠٠١١)_٢ \times (١٠١)_٢$

٤ $(١٠٠١٠٠)_٢ \times (١١١)_٢$

٥ $(١٠١)_٢ \times (١٠١)_٢ \times (١١٠٠)_٢$

ثانيًا: أوجد ناتج كل مما يلي: (تحقق من صحة الناتج في (٣)، (٤))

١ $(١١٠١١)_٢ \div (١١)_٢$

٢ $(١٠١٠٠)_٢ \div (١٠١)_٢$

٣ $(١٠٠٠٠١)_٢ \div (١٠١١)_٢$

٤ $(١٠٠١١١)_٢ \div (١١٠١)_٢$

١ - ٣ حاسبات الجيب الإلكترونية Calculators

تتعدد حاسبات الجيب الإلكترونية من حيث النوع والكفاءة وغرض الاستعمال فهناك:

• الحاسبة العادية

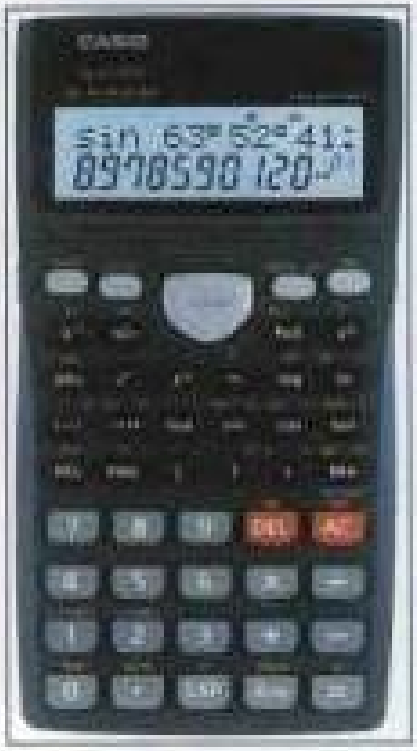
وتقتصر على العمليات الأربع الأساسية (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة)، إيجاد الجذر التربيعي، وحساب النسبة المئوية. وتوجه هذه الحاسبة إلى عامة الناس للاستخدام في المجالات التي لا تحتاج إلى حسابات معقدة.

انظر شكل (١ - ٣)

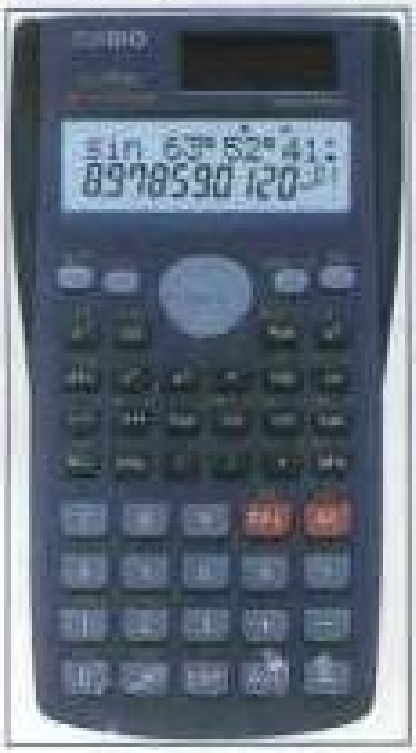
شكل (١ - ٣) نموذج لحاسبة عادية

• الحاسبة العلمية

وتستخدم في المجالات العلمية من قبل طلاب الجامعات، أو المتخصصين أو الباحثين، وتحوي مفاتيح لعديد من الدوال الرياضية ذات الاستخدامات العلمية والهندسية والتطبيقية. وتختلف أيضًا الحاسبات العلمية باختلاف الدوال الرياضية التي تتناولها وباختلاف العمليات المتاحة فيها.



شكل (١ - ٤) نموذج لحاسبة علمية



شكل (١ - ٥) نموذج لحاسبة علمية

الشكلان (١ - ٤)، (١ - ٥) لنموذجين مختلفين لحاسبة علمية.

تطالعنا التكنولوجيا الحديثة كل يوم بجديد في عالم الآلات الحاسبة:

ففي بعض الآلات يتم إدخال العدد قبل العملية، بينما يتم إدخال العملية أولاً قبل العدد في آلات أخرى.

لذا يجب ملاحظة ذلك.

• فهرس المفاتيح

١ مفاتيح عامة (توجد في كل الحاسبات)

المفتاح	الوظيفة
ON	التشغيل.
0 ، 1 ، 2 ، ... ، 9	الأرقام ٠، ١، ٢، ...، ٩
+ ، − ، × ، ÷	رموز العمليات الأربع (الجمع، الطرح، الضرب، القسمة)
=	رمز علاقة التساوي.
AC	إزالة جميع العمليات والنتائج.
DEL	إزالة عملية مختارة.
◄ ►	لتحريك العلامة إلى الوضع الذي نريده.
(−)	تغيير نوع العدد.
.	العلامة العشرية.

٢ مفاتيح خاصة (توجد في الحاسبات العلمية)

SHIFT أو INV	المعكوس (التحويل).
MODE	وضع التشغيل.
( )	فتح الأقواس وغلق الأقواس.
EXP	ناتج ١٠^س.
π	النسبة التقريبية.
°'"	التحويل من القيمة العشرية إلى القيمة الستينية وبالعكس.
RND	تقريب القيمة الداخلية.

ملاحظة: مفتاح MODE يفيد في تحديد وضع وحدة قياس الزاوية سواء كان بالدرجات الستينية (Deg) أو الزاوية نصف القطرية (راديان) RAD.

٣ مفاتيح الوظائف (بعض هذه الوظائف في متناولك الآن وبعضها ستعرفه فيما بعد):

X^{-1}	نظير أو مقلوب عدد ≠ صفر.
$\wedge$	القوة.
$\sqrt{\ }$	الجذر التربيعي.
$\sqrt[3]{\ }$	الجذر التكعيبي.
$\sqrt[x]{\ }$	الجذور.
X^2	مربع عدد.
X^3	مكعب عدد.
%	النسبة المئوية.
$a^{b/c}$ ، d/c	الكسر والعدد الكسري.
10^x	الدالة الأسية للأساس ١٠
e^x	الدالة الأسية للأساس e.
log	اللوغاريتم العادي (لو).
ln	اللوغاريتم الطبيعي (لط).
ENG ENG	الهندسة (تحويل الأصفار إلى ١ × ١٠^-٣).
X!	المضروب.
nPr	التباديل.
nCr	التوافيق.
sin	جيب الزاوية (حا).
cos	جيب تمام الزاوية (جتا).
tan	ظل الزاوية (طا).
$\sin^{-1}$	حا^-١ أي (نظير حا)
$\cos^{-1}$	جتا^-١ أي (نظير جتا)
$\tan^{-1}$	طا^-١ أي (نظير طا)
hyp	الدوال الزائدية.
RAN#	الرقم العشوائي.

١ - ٤ استخدام الحاسبة في إجراء العمليات

Using The Calculator in Operations

مثال ١ أوجد ناتج ٥٢ + ٧,٩ - ٣,١١

الخطوات:

أدخل العدد ٥٢ ثم اضغط على المفتاح [+] ،

أدخل العدد ٧,٩ ثم اضغط على المفتاح [−] ،

أدخل العدد ٣,١١ ثم اضغط على المفتاح [=] ،

يظهر على الشاشة 56.79

مثال ٢

أوجد ناتج $٥\frac{٣}{٧} + ٩\frac{١}{٥} - ٨\frac{٧}{٩}$ في صورة كسر اعتيادي.

الخطوات:

أدخل العدد $٥\frac{٣}{٧}$ ثم اضغط على المفتاح [+] :

[5] [a^b/c] [3] [a^b/c] [7] [+]

أدخل العدد $٩\frac{١}{٥}$ ثم اضغط على المفتاح [−] .

أدخل العدد $٨\frac{٧}{٩}$ ثم اضغط على المفتاح [=] .

يظهر على الشاشة 6 ر 142 ر 315

أي أن جواب $٦\frac{١٤٢}{٣١٥}$

مثال ٣ أوجد ناتج $٢ \times ١٠^{٩} + ٦ \times ١٠^{٩}$

الخطوات:

أدخل العدد ٢×١٠^{٩} ثم اضغط على المفتاح [+] :

[2] [EXP] [9] [+]

أدخل العدد ٦ × ١٠^٩ ثم اضغط على المفتاح [=] :

[6] [EXP] [9] [=]

فيظهر على الشاشة 800000000

ثم اضغط على المفتاح [ENG] فيظهر على الشاشة 8^09

مثال ٤ أوجد ناتج $\frac{٨٥٩,٠٧٤}{٩٧,٢ \times ٢٥,٧}$

الخطوات:

ندخل البسط أولًا ثم نستخدم [÷] ثم [(] ، ثم ندخل المقام ثم [)] ونضغط على المفتاح [=]

وتفصيلًا اضغط على المفاتيح التالية على التوالي في الاتجاه المبين:

[8] [5] [9] [.] [0] [7] [4] [÷] [(] [9] [7] [.] [2]

[×] [2] [5] [.] [7] [)] [=]

فيظهر على الشاشة الجواب 0.343899217

مثال ٥ أوجد ناتج (١٢ × ١٢٥) ÷ (١٥٥ ÷ ٣١) + (١٨٨ − ٤٥)

الخطوات:

نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[(] [1] [2] [×] [1] [2] [5] [)] [÷] [(] [1] [5] [5] [÷]

[3] [1] [)] [+] [(] [1] [8] [8] [−] [4] [5] [)] [=]

فيظهر على الشاشة 443

مثال ٦ أوجد $\sqrt{٤٣٩,٩٧}$

الخطوات:

ندخل $\sqrt{\ }$ ثم العدد ثم $=$

$\sqrt{\ }$ 4 3 9 . 9 7 =

فيظهر الجواب على الشاشة 20.97546185

مثال ٧ أوجد $\sqrt[٣]{٧٩,١١٤}$

الخطوات:

نقوم بإجراء الخطوات كما في المثال السابق مع استبدال علامة الجذر التربيعي بعلامة الجذر التكعيبي

SHIFT $\sqrt[3]{\ }$ 7 9 . 1 1 4 =

ويظهر الجواب على الشاشة 4.292903384

طريقة أخرى: (في حالة عدم وجود $\sqrt[3]{\ }$ في الحاسبة)

نستخدم المفتاح $\sqrt[x]{\ }$:

3 SHIFT $\sqrt[x]{\ }$ 7 9 . 1 1 4 =

فيظهر على الشاشة الجواب نفسه

تدريب:

باستخدام $\sqrt[x]{\ }$ أوجد $\sqrt[٥]{٧٩,١١٤}$

١ - ٤

تمارين

أولاً: استخدم حاسبة الجيب الإلكترونية في حساب ناتج كل مما يلي:

١ $٧٣٩,٧٠١١ - ٩٥٢,٠١٣ + ٦٤٥,٧$

٢ $١٥,٥٩٥ - ٣,٧٧ + ١١\frac{٧}{٩}$

٣ $٢,٣١ \times ١٠^{١١} - ٣,٩٥ \times ١٠^{١١}$

٤ $٧,٢ \times ١٠^{٣} + ١,٠٧ \times ١٠^{٥}$

٥ $(٩٤ \times ٧٨) + (١٠٢ \times ٤٤) - ١٣٧ \times ٢٥$

٦ $(٢ \times ١٠^{١٢}) \div (٦,٤ \times ١٠^{١٢})$

٧ $\frac{٢٣٩,٧ + ١٥,٠٩}{٧,٥٢ \times ٣٢٦}$

٨ $\frac{٣٠,٢ \times ٤٣,١}{(٣,١٠٣٢ - ١٣,١)\ ٩٦}$

٩ $\frac{(٢,٣ + ٥٥,١٢٦)\ ٢٢,٨}{(٣,٣ - ٢,٨٣ + ٥,١٣)\ ٨٤,٩}$

١٠ $\sqrt{١١٧,٢}$

١١ $\sqrt{٣,٧٥} + \sqrt{٤١,٢}$

١٢ $\sqrt{\frac{٤٧,١٥ \times ٣,٢٢}{٣٣,٤ \times ٢١,٧}}$

١٣ $\sqrt[٧]{٣٤٥,٩}$

١٤ $\sqrt[٣]{١٢\frac{٢}{٧} \times ٤٩,٠٧}$

١٥ $\sqrt[٣]{٧٧,٧٧} - \sqrt[٣]{٤٥,٠٢}$

١ - ٥ ملخص وتمارين عامة Summary and Exercises

- أرقام النظام الثنائي أو نظام العد الثنائي هي ٠، ١ فقط.
- أعداد النظام الثنائي هي: ٠، ١، ١٠، ١١، ١٠٠، ١٠١، . . .
- في نظام العد الثنائي:

  $٢^{٠}$ ترمز إلى منزلة الآحاد

  $٢^{١}$ ترمز إلى منزلة الاثنانات

  $٢^{٢}$ ترمز إلى منزلة الأربعات

  $٢^{٣}$ ترمز إلى منزلة الثمانيات. . . إلخ
- القيمة المكانية للرقم في العدد بالنظام الثنائي = الرقم × قيمة المنزلة التي يشغلها.
- لتحويل عدد من النظام الثنائي إلى النظام العشري نوجد مجموع القيم المكانية لأرقام هذا العدد، مثلاً:

$$(١٠١١٠)_{٢} = ٠ \times ٢^{٠} + ١ \times ٢ + ١ \times ٢^{٢} + ٠ \times ٢^{٣} + ١ \times ٢^{٤}$$

$$= ٠ + ٢ + ٤ + ١٦ = (٢٢)_{١٠}$$

- لتحويل عدد من النظام العشري إلى النظام الثنائي نجري عملية قسمة متكررة على ٢ لتعيين كم ٢ وكم ٤ وكم ٨ وكم ١٦ . . . إلخ في هذا العدد، فمثلاً، لتحويل $(٣٧)_{١٠}$ إلى النظام الثنائي نجري التالي:

٣٧	÷	٢	=	١٨	والباقي ١
١٨	÷	٢	=	٩	والباقي ٠
٩	÷	٢	=	٤	والباقي ١
٤	÷	٢	=	٢	والباقي ٠
٢	÷	٢	=	١	والباقي ٠
١	÷	٢	=	٠	والباقي ١

فيكون $(٣٧)_{١٠} = (١٠٠١٠١)_{٢}$

- حقائق الجمع الأساسية في نظام العد الثنائي موضحة في جدول (١)، وحقائق الضرب الأساسية موضحة في جدول (٢)

+	٠	١
٠	٠	١
٠	١	١٠

جدول (١)

×	٠	١
٠	٠	٠
١	٠	١

جدول (٢)

- خوارزميات الجمع والطرح والضرب والقسمة مثلها في نظام العد العشري بعد تغيير أسماء المنازل.
- تستخدم حقائق الجمع الأساسية في عملية الطرح ويضاف إليها الحقيقة التالية:

$(١٠)_٢ - (١)_٢ = (١)_٢$

- كل من عمليتي الجمع والضرب في نظام العد الثنائي تجميعية وإبدالية.

١ - ٥ تمارين عامة

• بنود موضوعية

أولًا - ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة غير الصحيحة:

١ $(٢)_{١٠} = (١٠)_{٢}$

٢ $(١٠٠٠)_{٢} = ٨$

٣ $(١١١١)_{٢} = ١٦$

٤ $(١٠)_{١٠} = (١٠١٠)_{٢}$

٥ $(١١)_{٢} \times (١١)_{٢} = (٩)_{١٠}$

٦ $(١٠٠٠)_{٢} \div (١٠١)_{٢} = (٤)_{١٠}$

٧ $(١١٠)_{٢} + (٧)_{١٠} = (١١٠١)_{٢}$

ثانيًا - لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ إذا كانت $(٢)_{١٠} \times (س)_{٢} = (١٠)_{٢}$ فإن القيمة العددية للرمز س هي:

(أ) صفر (ب) ١٠ (ج) ٢ (د) ١

٢ إذا كانت $(س)_{١٠} + (١٠٠)_{٢} = (١١٠)_{٢}$ فإن قيمة س هي:

(أ) ١ (ب) ١٠ (ج) ٢ (د) صفر

• أسئلة مقالية

١ أوجد العدد المقابل لكل عدد مما يلي في نظام العد العشري:

أ $(١١١٠٠٠٠)_{٢}$ ب $(١١١١٠٠)_{٢}$

ج $(١١١٠١١)_{٢}$ د $(١٠٠١٠٠١٠٠)_{٢}$

٢ أوجد العدد المقابل لكل عدد مما يلي في نظام العد الثنائي:

أ $(٢٤)_{١٠}$ ب $(٤٢)_{١٠}$

جـ $(٥٧)_{١٠}$ د $(٧٥)_{١٠}$

٣ رتب تصاعديًا $(١١١٠١١٠)_{٢}$ ، $(١١٠١١٠٠)_{٢}$ ، $(١١٠١١٠١١)_{٢}$

٤ أوجد القيمة العددية للرمز س في كل مما يلي:

أ $(١١١٠١)_{٢} + (س)_{٢} = (١١١١٠١)_{٢}$

ب $(١١)_{٢} \times (س)_{٢} = (١١١١١١)_{٢}$

جـ $(س)_{٢} \div (١٠١١)_{٢} = (١٠١٠١٠٠)_{٢}$

د $(س)_{٢} = (١٠)_{٢} \times (١١١)_{٢} \times (١٠٠١)_{٢}$

٥ أوجد قيمة كل مما يلي:

أ $٣\frac{٥}{٦} + ٧\frac{٩}{١٧} - ٣\frac{٧}{١٣} - ٣,٥$

ب $\frac{(٢٣,٧٤ + ٥٧,٢) \times ١١,٧٢}{٣٧,١٢ \times (٦٧,٧٥ - ١٤,١٧)}$

جـ $\frac{\sqrt{٣٧٤,٢} - ٧٥,٣٤}{\sqrt{٩٩٧,٤٠٥}}$

الفصل الثاني

حساب المثلثات
Trigonometry

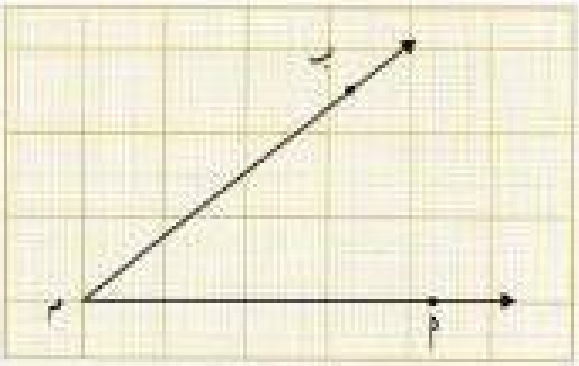
٢ - ١ الزاوية الموجهة The Directed Angle

تعلم أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة البدء نفسها في شكل (٢ - ١)

$\hat{أ م ب} = \overrightarrow{م أ} \cup \overleftarrow{م ب}$

م رأس هذه الزاوية.

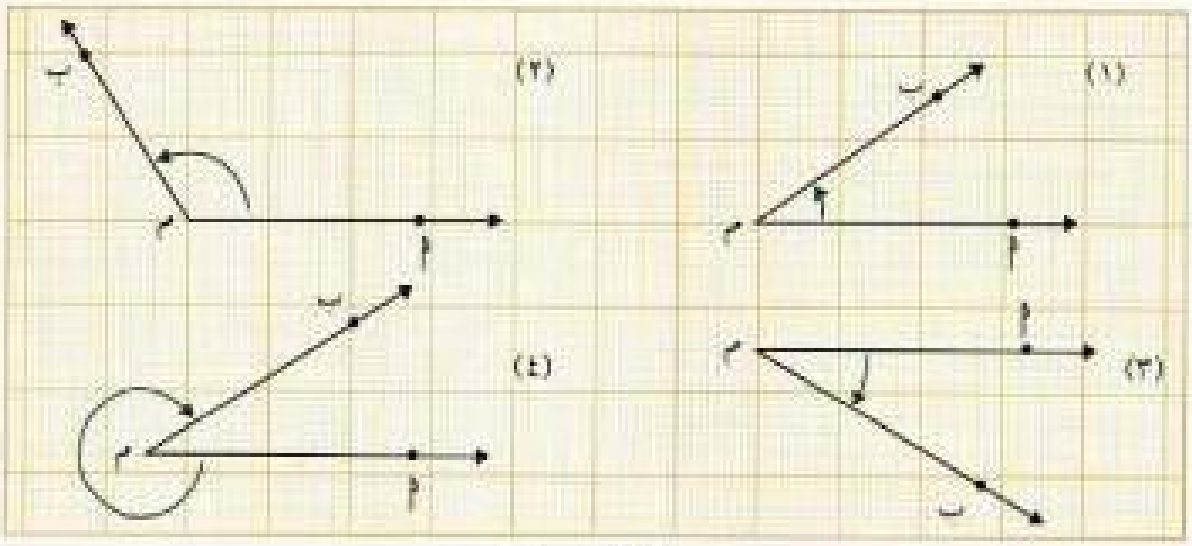
$\overrightarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ضلعاها.



شكل (٢ - ١)

إذا ثبتنا أحد هذين الشعاعين $\overrightarrow{م أ}$ مثلاً وسمحنا للشعاع الثاني $\overleftarrow{م ب}$ بالدوران حول م فإنه في كل وضع من أوضاعه يكوّن مع $\overrightarrow{م أ}$ زاوية ونسمي مثل هذه الزاوية «زاوية موجهة» ونسمي $\overrightarrow{م أ}$ «الضلع الابتدائي» لهذه الزاوية ونسمي $\overleftarrow{م ب}$ «الضلع النهائي» لها.

شكل (٢ - ٢) يوضح عدة زوايا موجهة حيث يشير السهم إلى اتجاه الدوران.



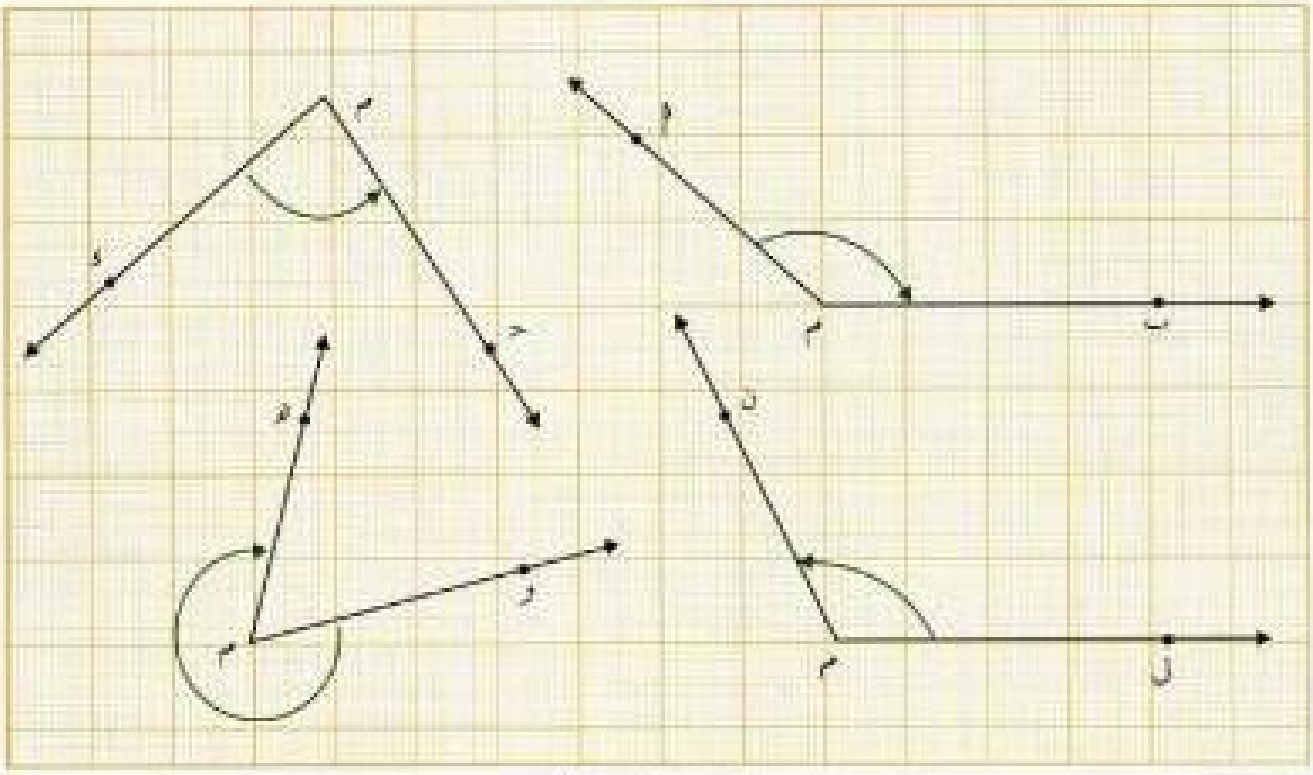
شكل (٢ - ٢)

لاحظ أن اتجاه الدوران بالنسبة للزاويتين الموجهتين (١) ، (٢) هو الاتجاه المضاد لحركة عقربي الساعة، في حين أن اتجاه الدوران بالنسبة للزاويتين (٣) ، (٤) هو اتجاه عقربي الساعة.

وقد اتفق على أن قياس الزاوية الموجهة يكون موجبا إذا كان الدوران في اتجاه يضاد حركة عقربي الساعة، ويكون سالبا إذا كان الدوران في اتجاه حركة عقربي الساعة.

مثال (١)

في شكل (٢ - ٣) مجموعة من الزوايا الموجهة. سمِّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي لكل منها، وعيّن نوع إشارة قياس كل زاوية.



شكل (٢ - ٣)

الحل

١ $\widehat{أ م ب}$ زاوية موجهة

$\overrightarrow{م أ}$ الضلع الابتدائي ، $\overleftarrow{م ب}$ الضلع النهائي

قياس ($\widehat{أ م ب}$) سالب حيث الدوران مع حركة عقربي الساعة.

٢ $\widehat{ء م حـ}$ زاوية موجهة ،

$\overrightarrow{م ء}$ الضلع الابتدائي ، $\overleftarrow{م حـ}$ الضلع النهائي

قياس ($\widehat{ء م حـ}$) موجب حيث الدوران مضاد لحركة عقربي الساعة.

٣ $\widehat{ل م ن}$ زاوية موجهة ، $\overrightarrow{م ل}$ الضلع الابتدائي ، $\overleftarrow{م ن}$ الضلع النهائي.

قياس ($\widehat{ل م ن}$) موجب. لماذا؟

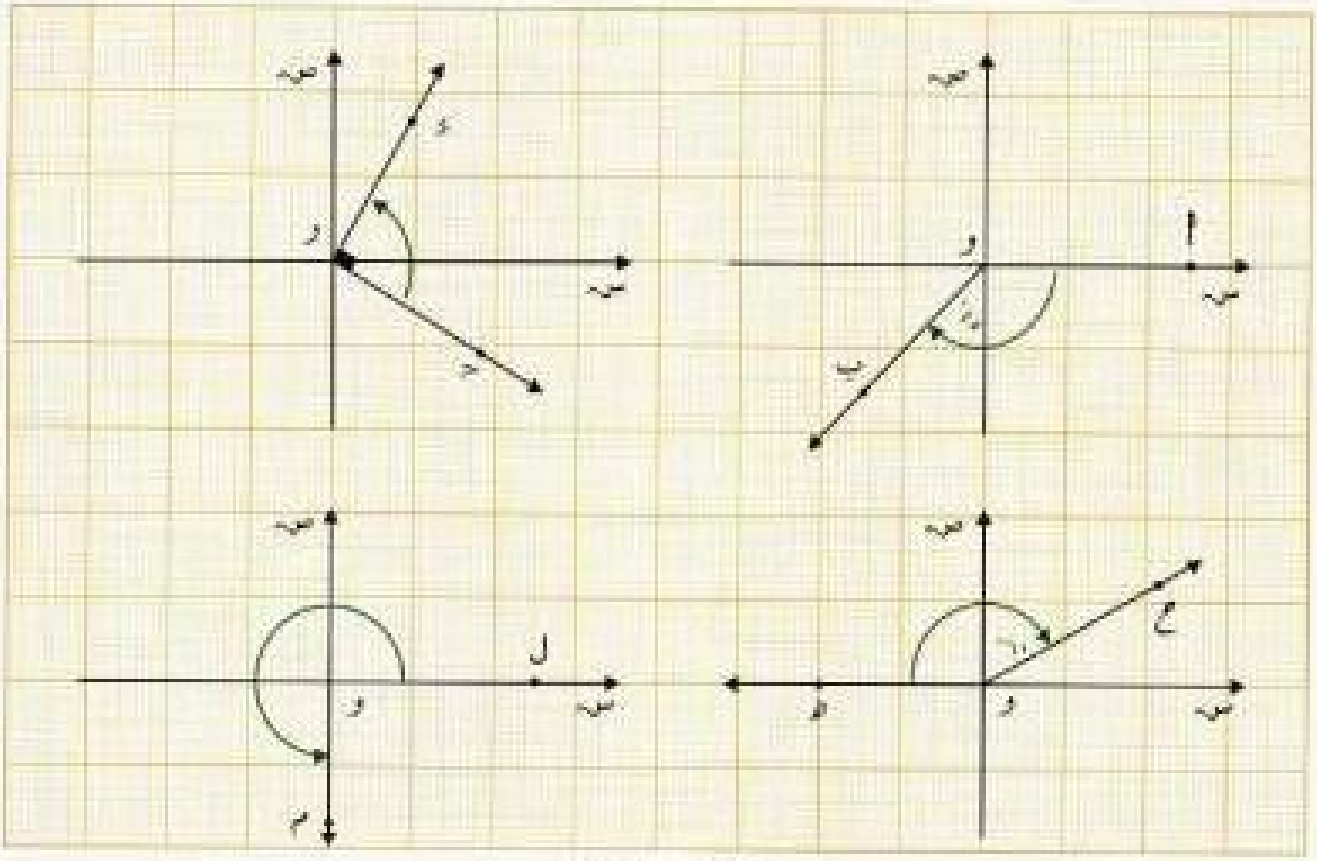
٤ و م هـ زاوية موجهة ،

$\overleftarrow{\text{م و}}$ الضلع الابتدائي ، $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ الضلع النهائي.

قياس (و م هـ) سالب. لماذا؟

مثال (٢)

في شكل (٢ – ٤) مجموعة من الزوايا الموجهة مرسومة في المستوى الإحداثي. سمِّ الضلع الابتدائي والضلع النهائي لكل منها، وعيّن قياس كل زاوية.



شكل (٢ – ٤)

الحل

١ أ و ب زاوية موجهة ،

الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ينطبق على الجزء الموجب من المحور السيني.

الضلع النهائي $\overleftarrow{\text{و ب}}$

قياس (أ و ب) = – (٩٠° + ٤٥°) لماذا الإشارة السالبة؟

قياس (أ و ب) = –١٣٥°

٢ حـ و̂ ء زاوية موجهة ،

الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ والضلع النهائي $\overleftarrow{\text{و ء}}$

قياس (حـ و̂ ء) = +٩٠° لماذا الإشارة الموجبة؟

٣ هـ و̂ ح زاوية موجهة ،

الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ والضلع النهائي $\overleftarrow{\text{و ح}}$

قياس (هـ و̂ ح) = -١٥٠° لماذا؟

٤ ل و̂ م زاوية موجهة ،

الضلع الابتدائي $\overleftarrow{\text{و ل}}$ ينطبق على الجزء الموجب من المحور السيني والضلع النهائي $\overleftarrow{\text{و م}}$ ينطبق على الجزء السالب من المحور الصادي.

قياس (ل و̂ م) = ٢٧٠° لماذا؟ ■

لاحظ أن كل زاوية من الزوايا الأربع الموجهة الواردة في المثال السابق رأسها نقطة الأصل. لاحظ أيضًا أن بعضها ينطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من المحور السيني. اذكرها.

تعريف

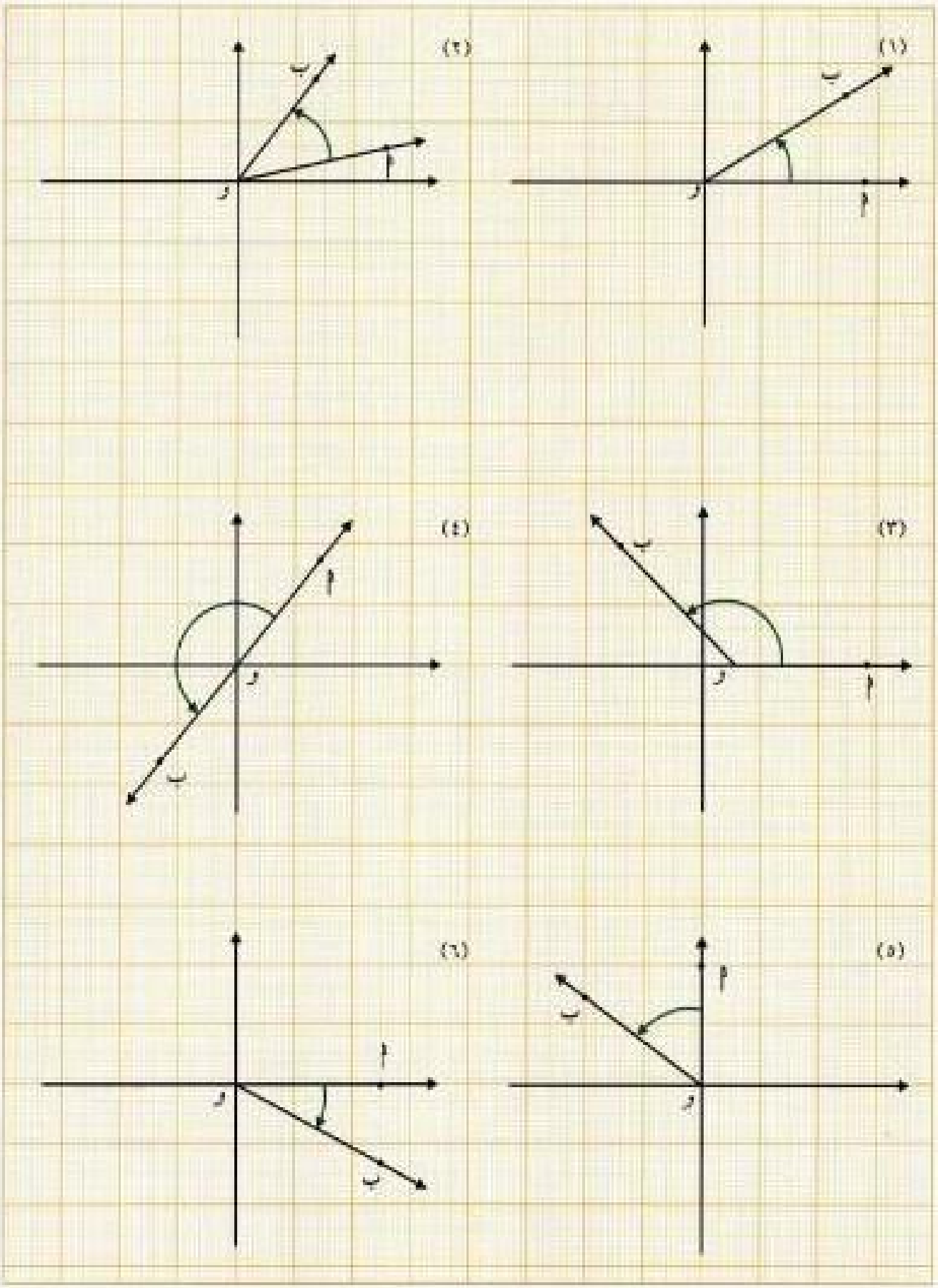
«الزاوية الموجهة في الوضع القياسي» هي زاوية رأسها نقطة الأصل وضلعها الابتدائي منطبق على الجزء الموجب من المحور السيني.

مثال (٣)

في الشكل (٢ - ٥) حدد الوضع القياسي للزاوية الموجهة أ و̂ ب . ولماذا؟

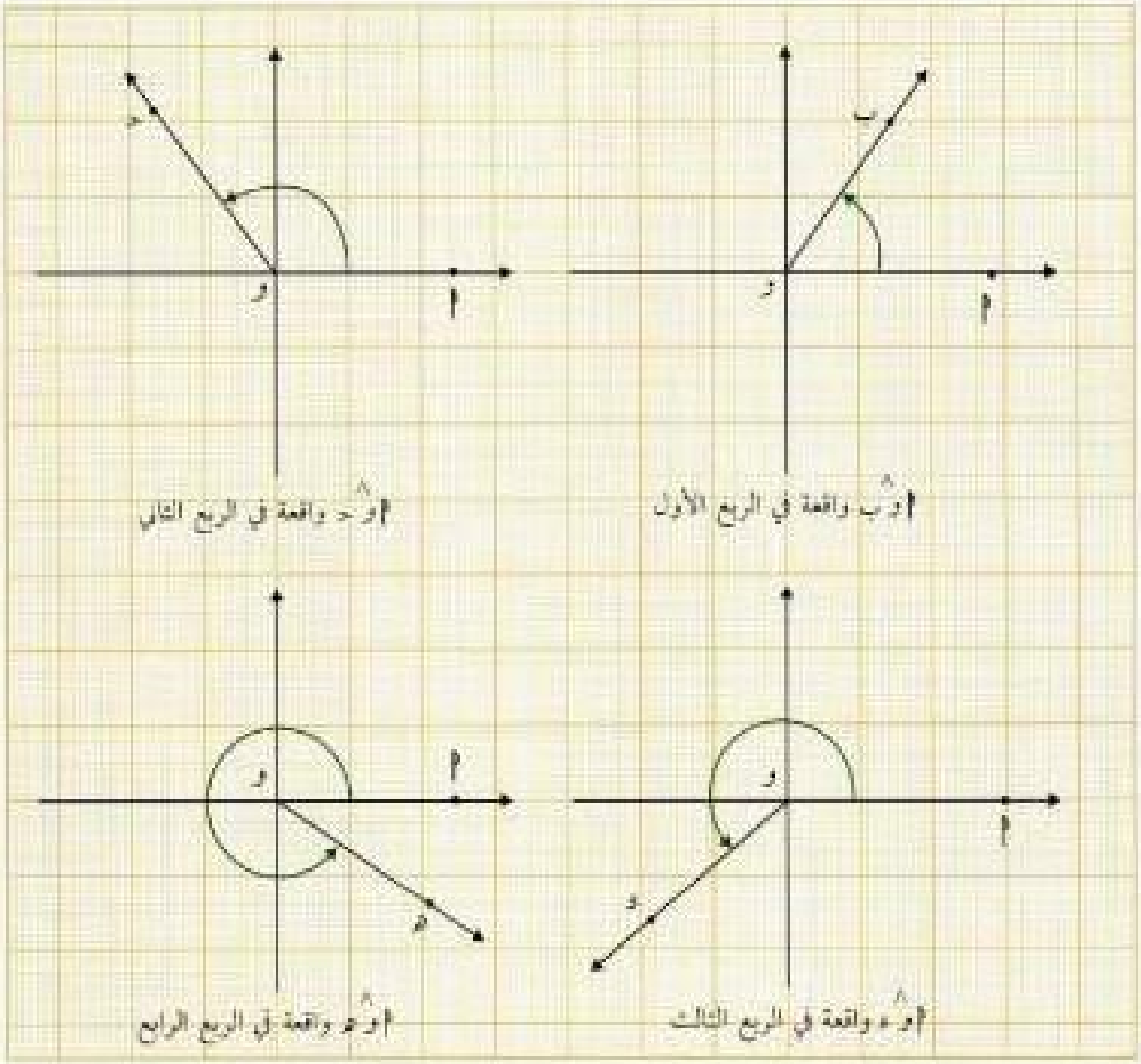
الحل

في شكل (٢ - ٥) الزاوية الموجهة أ و̂ ب في كل من الأشكال (١)، (٦) في الوضع القياسي، الزاوية الموجهة أ و̂ ب في كل من الأشكال (٢)، (٣)، (٤)، (٥) في وضع غير قياسي. لماذا؟ (راجع التعريف). ■



شكل (٢ – ٥)

إذا رسمت الزاوية الموجهة في الوضع القياسي، فإن وضع ضلعها النهائي يحدد الربع الذي تقع فيه، فالربع الذي يقع فيه الضلع النهائي هو الربع الذي تقع فيه الزاوية الموجهة انظر شكل (٢ - ٦).



شكل (٢ - ٦)

تعريف

«الزاوية الربعية» هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات.

مثال (٣)

ارسم كلاً من الزوايا الموجهة التالية حسب القياس الموضح وذلك في الوضع القياسي، ثم حدد الزوايا الربعية منها:

أ) ١٢٠°

ب) ٣٠٠°

جـ) ٤٥٠°

د) -١٥٠°

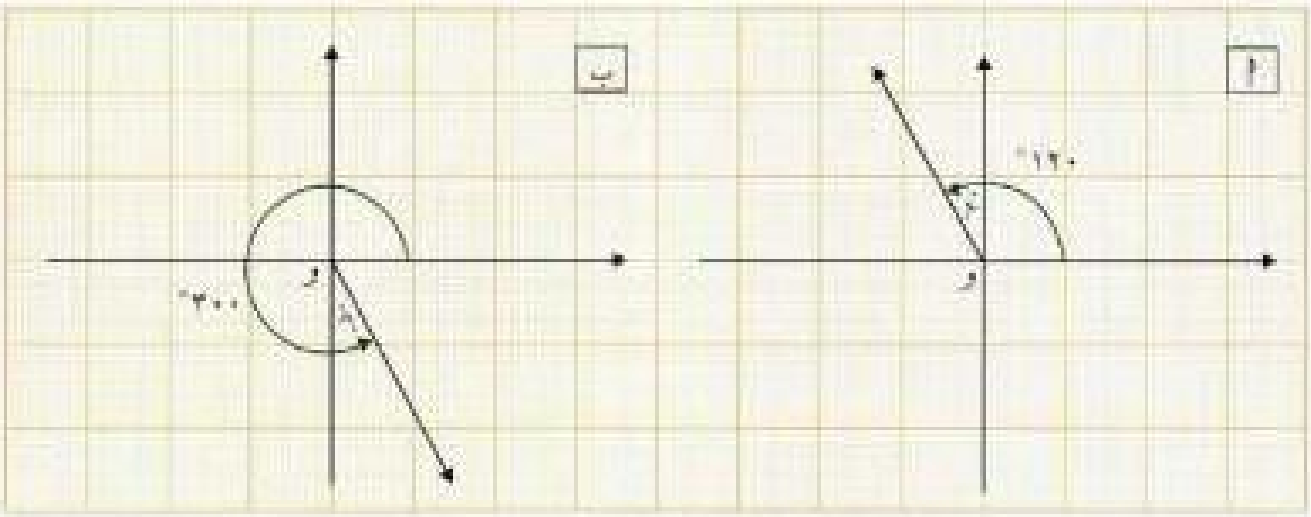
هـ) -٢٧٠°

و) ٥٤٠°

الحل

أ) $١٢٠^\circ = ٩٠^\circ + ٣٠^\circ$ ب) $٣٠٠^\circ = ٢٧٠^\circ + ٣٠^\circ$

انظر شكل (٢ – ٧).

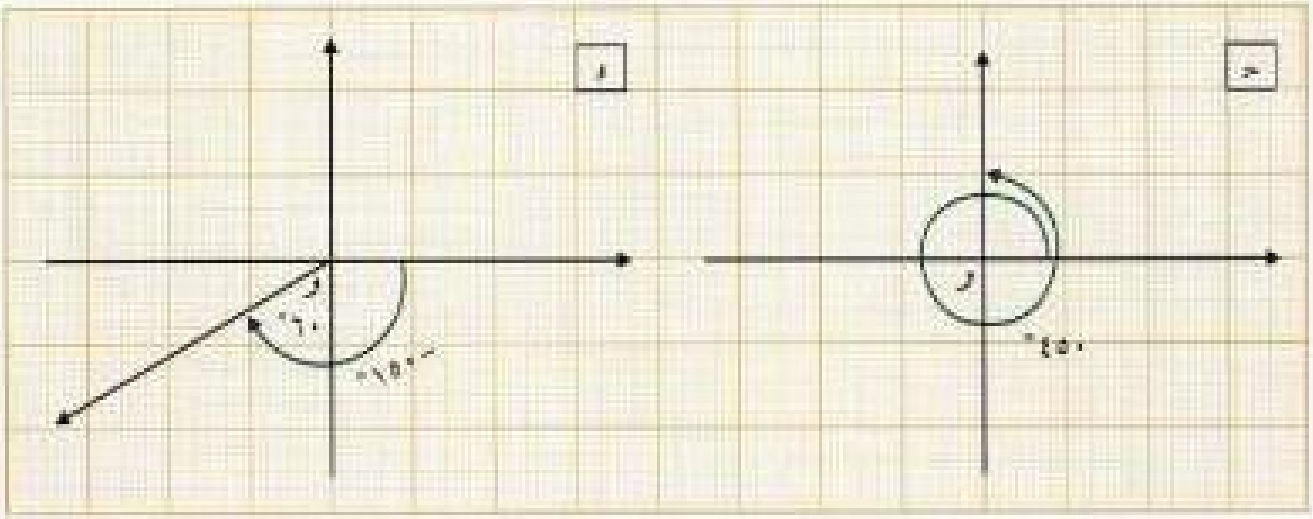


شكل (٢ – ٧)

جـ $٤٥٠^\circ = ٣٦٠^\circ + ٩٠^\circ$ زاوية ربعية.

د $-١٥٠^\circ = -(٩٠^\circ + ٦٠^\circ)$

انظر شكل (٢ - ٨)

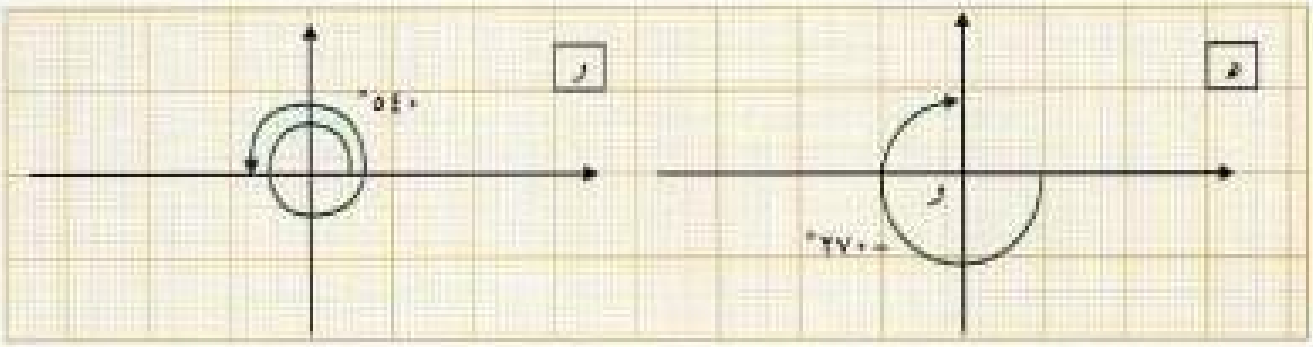


شكل (٢ – ٨)

هـ زاوية ربعية.

و $٥٤٠^\circ = ٣٦٠^\circ + ١٨٠^\circ$ زاوية ربعية.

انظر شكل (٢ - ٩).



شكل (٢ – ٩)

٢ - ١ تمارين

• بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ الزاوية التي قياسها ٣٠٠° تقع في الربع:

(أ) الأول (ب) الثاني

(ج) الثالث (د) الرابع

٢ الزاوية التي قياسها ٧٣٠° تقع في الربع:

(أ) الأول (ب) الثاني

(ج) الثالث (د) الرابع

٣ زاوية واحدة من الزوايا الموضحة قياساتها فيما يلي تقع في الربع الثالث. ما هي؟

(أ) ٣٩٠° (ب) ٥٥٠°

(ج) ٧٠° (د) ٦٥٠°

٤ زاوية واحدة من الزوايا الموضحة قياساتها فيما يلي تقع في الربع الثاني. ما هي؟

(أ) ٢٠٠° (ب) ٥١٠°

(ج) ٥٦٠° (د) ٢٦٠°

• أسئلة مقالية

أولًا - ارسم الزاوية الموجهة التي قياسها

أ	٤٥°	ب	-٨٥°	ج	١٠٥°
د	-٢٠٠°	هـ	٢٥٠°	و	٣١٥°
ز	-٤٨٠°	ح	٥٦٠°	ط	٧٥٠°

على أن تكون كل منها في وضع قياسي.

ثانيا - ارسم زاوية موجهة في وضع قياسي بحيث تكون:

أ (٤ ، ٤) ∈ الضلع النهائي.

ب (-٥ ، -٤) ∈ الضلع النهائي.

جـ (٠ ، ٤) ∈ الضلع النهائي.

د (-٣ ، ٠) ∈ الضلع النهائي.

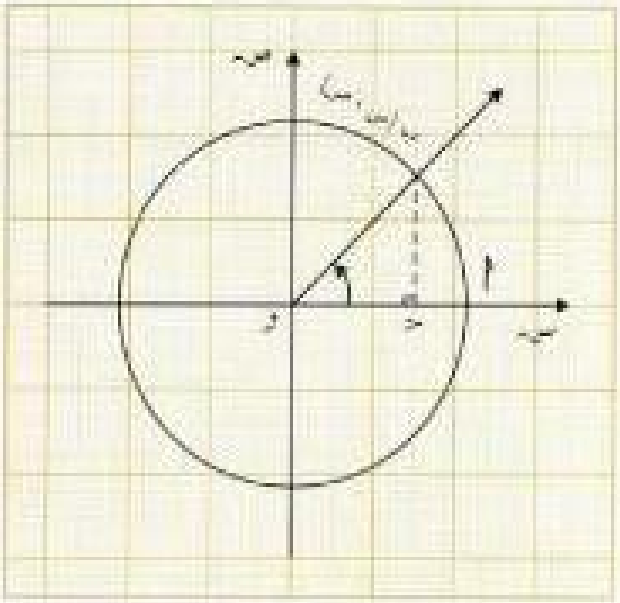
ثالثا - عين الزاوية الموجهة أ$\hat{ب}$جـ التي تكون في وضع قياسي إذا كانت النقاط أ ، ب ، جـ لها الإحداثيات التالية:

أ	أ (٣ ، ٠)	ب (٠ ، ٠)	جـ (-٢ ، ٣)
ب	أ (٢ ، ٢)	ب (٠ ، ٠)	جـ (٠ ، ٤)
جـ	أ (-٣ ، ٠)	ب (١ ، ١)	جـ (٣ ، ٠)
د	أ (-٣ ، ٠)	ب (٠ ، ٠)	جـ (٣ ، ٠)
هـ	أ (٥ ، ٠)	ب (٠ ، ٠)	جـ (٠ ، -٥)
و	أ (٤ ، ٠)	ب (٢ ، ٠)	جـ (-٤ ، ٠)

٢ - ٢ النسب المثلثية The Trigonometric Ratios

في شكل (٢ - ١٠) دائرة مركزها نقطة الأصل «و» وطول نصف قطرها الوحدة.

تسمى هذه الدائرة وأمثالها «دائرة الوحدة»



شكل (٢ - ١٠)

اعتبر أن الزاوية أ و̂ ب زاوية موجهة في وضع قياسي. سمِّ ضلعها الابتدائي وسمِّ ضلعها النهائي.

ب (س ، ص) هي نقطة تقاطع الضلع النهائي مع دائرة الوحدة. تسمى النقطة ب (س ، ص) المذكورة بالنقطة المثلثية للزاوية أ و̂ ب

أي أن:

تعريف

«النقطة المثلثية» هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في وضع قياسي مع دائرة الوحدة.

إذا كانت $\overline{\text{ب حـ}} \perp \overrightarrow{\text{و أ}}$ فإن Δ ب حـ و قائم الزاوية والزاوية القائمة هي حـ̂ .

وباستخدام نظرية فيثاغورث:

$(\text{و حـ})^2 + (\text{ب حـ})^2 = (\text{و ب})^2$

$\therefore$ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$ ..... (١)

نفرض أن قياس (أ و̂ ب) = هـ° ونقدم التعريف التالي:

تعريف

١ الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية لزاوية قياسها هـ يسمى جيب الزاوية هـ وتكتب جيب هـ = ص أو حا هـ = ص

٢ الإحداثي السيني للنقطة المثلثية لزاوية قياسها هـ يسمى جيب تمام الزاوية هـ وتكتب جيب تمام هـ = س أو حتا هـ = س

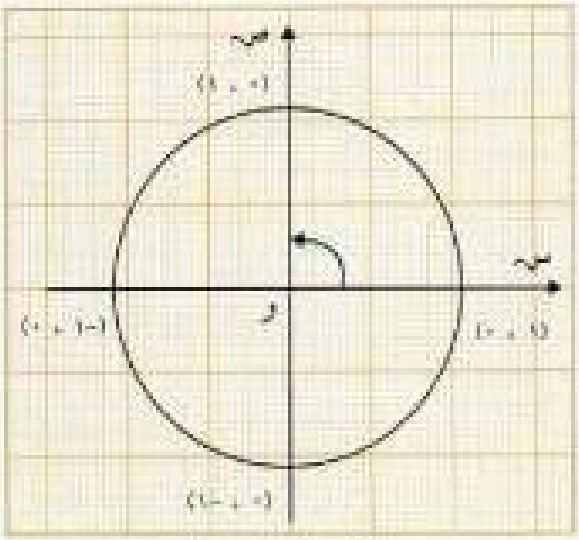
باستخدام العلاقة (١):

(حا هـ)^{٢} + (حتا هـ)^{٢} = ١ أو حا^{٢} هـ + حتا^{٢} هـ = ١ ـــــــــ (٢)

لأي زاوية قياسها هـ ، حيث ٠° ≤ هـ < ٣٦٠° .

مثال (١)

إذا كانت النقطة (٠ ، ١) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ فأوجد حا هـ، حتا هـ ثم استعن بدائرة الوحدة في تعيين هـ.



شكل (٢ – ١١)

الحل

حا هـ = ص = ١

، حتا هـ = س = ٠

دائرة الوحدة تتقاطع مع المحور السيني في النقطتين (١ ، ٠)، (-١ ، ٠). وتتقاطع مع المحور الصادي في النقطتين (٠ ، ١) (٠ ، -١).

من الشكل (٢ – ١١) يتضح أن هـ = ٩٠°

مثال (٢)

إذا كانت النقطة $(\frac{١}{٢}$ ، ص) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ، فأوجد حا هـ، حتا هـ، حيث ٠° < هـ < ٩٠°

الحل

حتا هـ = س = $\frac{١}{٢}$

∵ $(\frac{١}{٢}$ ، ص) نقطة مثلثية

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^٢$ + ص^٢ = ١ ومنها ص^٢ = $\frac{٣}{٤}$

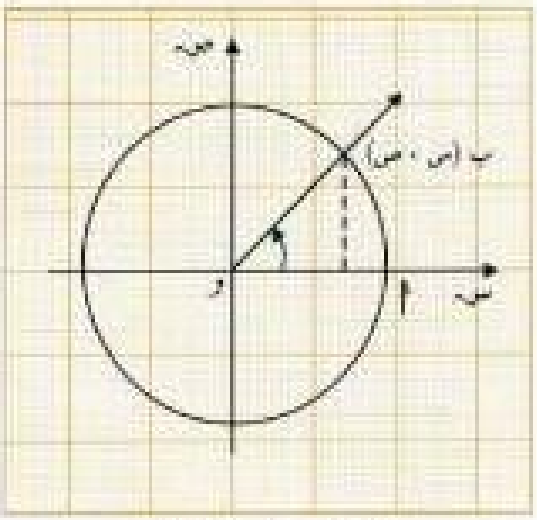
∴ ص = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحيث إن الزاوية التي قياسها هـ واقعة في الربع الأول،

∴ ص ينبغي أن تكون موجبة

∴ حا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

• إشارة كل من الجيب Sine وجيب التمام Cosine

اعتبر الزاوية الموجهة أ و ب والمرسومة في الوضع القياسي والتي قياسها هـ حيث ب (س، ص) هي النقطة المثلثية للزاوية أ و ب . ناقش إشارة كل من س، ص في الحالات الأربع التالية:



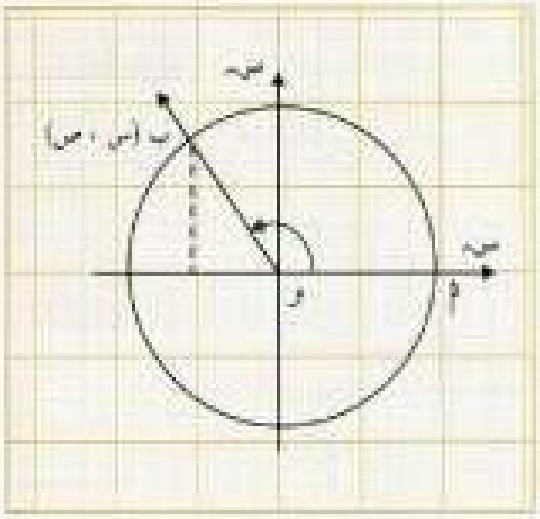
شكل (٢ – ١٢م)

١ – إذا وقعت أ و ب في الربع الأول تكون:
كل من س، ص موجبة.
ويكون:

حتا هـ موجبًا
، حا هـ موجبًا } عندما ٠° < هـ < ٩٠°

٢ - إذا وقعت أ و ب في الربع الثاني تكون:
س سالبة، ص موجبة.
ويكون:

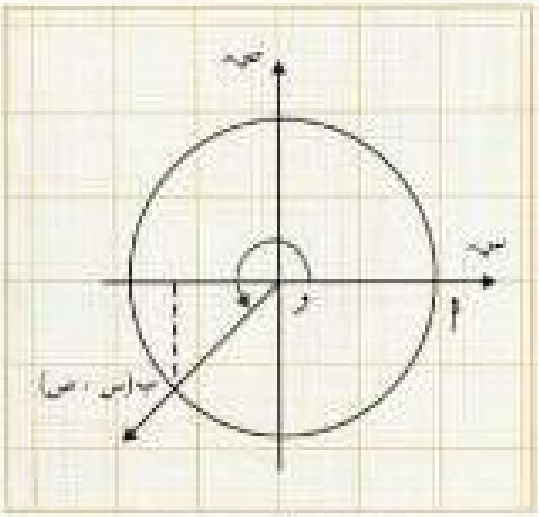
حتا هـ سالبًا
، حا هـ موجبًا } عندما ٩٠° < هـ < ١٨٠°



شكل (٢ - ١٢ب)

٣ - إذا وقعت أ و ب في الربع الثالث تكون:
س سالبة، ص سالبة.
ويكون:

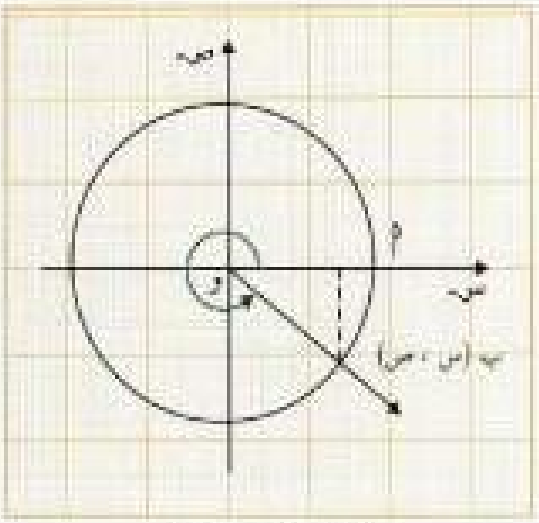
حتا هـ سالبًا
، حا هـ سالبًا } عندما ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°



شكل (٢ - ١٢جـ)

٤ - إذا وقعت أ و ب في الربع الرابع تكون:
س موجبة، ص سالبة.
ويكون:

حتا هـ موجبًا
، حا هـ سالبًا } عندما ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°



شكل (٢ - ١٢د)

مثال (٣)

إذا كان حا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فأوجد حتا هـ

حيث ٩٠° < هـ < ١٨٠°

الحل

نفرض أن (س ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ .

حيث حا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ص

∵ $س^٢ + \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢ = ١$

∴ $س^٢ = \frac{٢}{٣}$

∴ س = $\pm \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

∴ حتا هـ = $\pm \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

∵ ٩٠° < هـ < ١٨٠°

∴ حتا هـ = $- \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

تعريف

إذا كانت النقطة (س ، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها هـ فإن النسبة $\frac{ص}{س}$ تسمى **ظل الزاوية** التي قياسها هـ (حيث س ≠ ٠) ويرمز لها عادة بالرمز **ظا هـ**

أي أن ظا هـ = $\frac{حا هـ}{حتا هـ} = \frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

• إشارة ظل الزاوية

∵ ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

∴ ظا هـ تكون موجبة عندما تتفق س، ص معًا في الإشارة، ويحدث ذلك في الربعين الأول والثالث فقط.

∴ ظا هـ يكون موجبًا إذا كانت ، °٠ < هـ < °٩٠ أو °١٨٠ < هـ < °٢٧٠.

مثال (٤)

إذا كانت ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ . فأوجد ظا هـ.

الحل

∵ ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ ظا هـ = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$

مثال (٥)

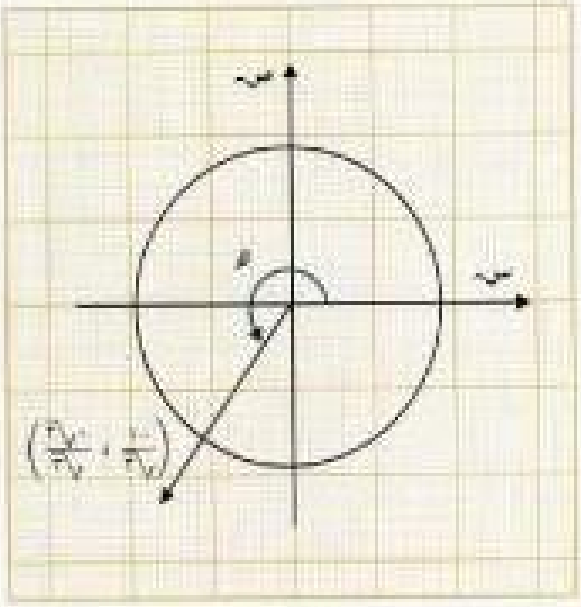
إذا كان حتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فأوجد ظا هـ حيث °١٨٠ < هـ < °٢٧٠ ثم مثل النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ على دائرة الوحدة.

الحل

حتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

لتكن ($-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، ص) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ

∴ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$ + ص^{٢} = ١



شكل (٢ – ١٣)

$\therefore$ ص^{٢} = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

$\therefore$ ص = ± $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

$\because$ ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° $\therefore$ حا هـ = − $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

، ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = $\left(-\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right) \div \left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ = $\sqrt{٢}$

تعريف

نسمي حا هـ ، حتا هـ ، ظا هـ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها هـ ويطلق عليها النسب المثلثية الأساسية.

ولكل نسبة من هذه النسب الثلاث مقلوب نعرفه كما يلي:

قتا هـ = $\frac{١}{\text{حا هـ}}$ ، حا هـ ≠ ٠

قا هـ = $\frac{١}{\text{حتا هـ}}$ ، حتا هـ ≠ ٠

ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$ ، حا هـ ≠ ٠

مثال (٦)

إذا كانت النقطة ($\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$) نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها هـ.

فأوجد حا هـ ، حتا هـ ، ظا هـ ، قتا هـ ، قا هـ ، ظتا هـ.

الحل

حا هـ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ $\therefore$ قتا هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

حتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ $\therefore$ قا هـ = $\sqrt{٥}$

ظا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = ٢ $\therefore$ ظتا هـ = $\frac{١}{٢}$

• إشارات النسب المثلثية The Signal Trigonometric Ratios

علمنا أن إشارة كل من حا هـ ، حتا هـ ، ظا هـ تعتمد على إشارة كل من س، ص حيث (س، ص) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ.

وحددنا متى تكون كل نسبة من هذه النسب الثلاث موجبة ومتى تكون سالبة، وحيث إن من البديهي أن تتفق كل نسبة مع مقلوبها في الإشارة فإننا نستطيع تلخيص قاعدة تحديد إشارة النسبة المثلثية كالتالي:

١ - جميع النسب المثلثية موجبة للزاوية الواقعة في الربع الأول.
٢ - الجيب ومقلوبه فقط موجبان للزاوية الواقعة في الربع الثاني.
٣ - الظل ومقلوبه فقط موجبان للزاوية الواقعة في الربع الثالث.
٤ - جيب التمام ومقلوبه فقط موجبان للزاوية الواقعة في الربع الرابع.

مثال (٧)

حدّد إشارة كل نسبة من النسب المثلثية التالية بعد تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية:

أ حا ٧٥° ب حتا ٣٥° جـ حتا ١٢٠°

د حا ٣٥٠° هـ ظا ٤٥° و ظا ٢٢٠°

ز قا ١٥٠° ح قتا ٢٨٠°

الحل

كل من حا ٧٥°، حتا ٣٥°، ظا ٤٥° موجبة، حيث تقع الزاوية في كل منها في الربع الأول.

جـ حتا ١٢٠° < ٠ حيث تقع الزاوية في الربع الثاني.

د حا ٣٥٠° < ٠ حيث تقع الزاوية في الربع الرابع.

و ظا ٢٢٠° > ٠ حيث تقع الزاوية في الربع الثالث.

ز قا ١٥٠° < ٠ حيث تقع الزاوية في الربع الثاني.

ح قتا ٢٨٠° < ٠ حيث تقع الزاوية في الربع الرابع. ■

٢ - ٢ تمارين

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ واحدة فقط من النقاط التالية نقطة مثلثية وهي:

(أ) $\left(\frac{١}{٢} ، ١\right)$ (ب) $\left(-\frac{١}{٢} ، ١\right)$

(جـ) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ (د) $\left(\frac{٣}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

٢ إذا كانت $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها هـ فإن ظا هـ =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(جـ) $\sqrt{٢}$ (د) صفر

٣ المقدار السالب فيما يلي هو:

(أ) جتا ٨٠° (ب) جا ٣٢٠°

(جـ) ظا ٢٥٠° (د) جتا (-٣٢٠°)

٤ إذا كانت $\left(-\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها هـ فإن قا هـ =

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$

(جـ) $-\frac{٥}{٣}$ (د) $-\frac{٥}{٤}$

أسئلة مقالية

١ إذا كانت $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ فأوجد النسب المثلثية ومقلوباتها لهذه الزاوية.

٢ إذا كانت $\left(\text{س} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ فأوجد جا هـ، جتا هـ، ظا هـ علمًا بأن $٢٧٠° < \text{هـ} < ٣٦٠°$

٣ إذا كانت $\left(-\frac{١}{٢} ، \text{ص}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ فأوجد جا هـ، جتا هـ، ظا هـ علمًا بأن $١٨٠° < \text{هـ} < ٢٧٠°$.

٤ إذا كان جا هـ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، حيث $٠° < \text{هـ} < ٩٠°$ فأوجد النسب المثلثية الأخرى ومقلوباتها للزاوية التي قياسها هـ.

٥ إذا كان جتا هـ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حيث $١٨٠° < \text{هـ} < ٢٧٠°$ فأوجد جا هـ، ظا هـ، قا هـ، قتا هـ، ظتا هـ.

النسب المثلثية للزوايا الخاصة وزاوية الإسناد

The Trigonometric Ratios of Special Angles and Reference Angle

٢ - ٣أ النسب المثلثية للزوايا الخاصة

The Trigonometric Ratios of Special Angles

● أولاً: الزوايا الربعية

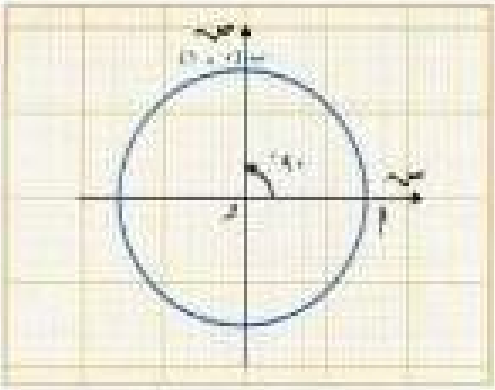
١ ق = ٩٠°

ب (٠ ، ١) هي النقطة المثلثية.

∴ جا ٩٠° = ١

جتا ٩٠° = ٠

ظا ٩٠° غير معرف - لماذا؟



شكل (٢ - ١٤أ)

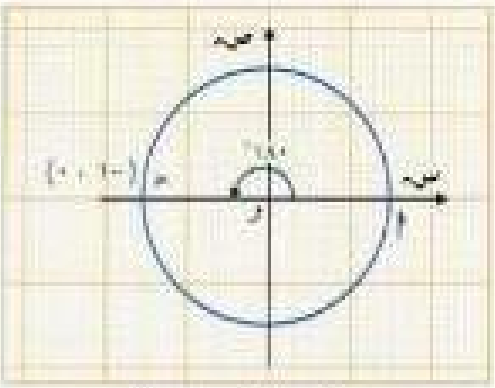
٢ ق = ١٨٠°

حـ (-١ ، ٠) هي النقطة المثلثية.

∴ جا ١٨٠° = ٠

جتا ١٨٠° = -١

ظا ١٨٠° = ٠ لماذا؟



شكل (٢ - ١٤ب)

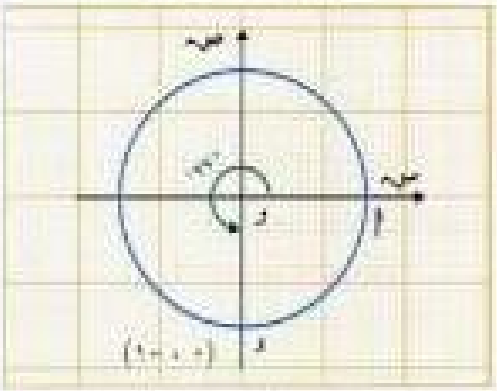
٣ ق = ٢٧٠°

ء (٠ ، -١) هي النقطة المثلثية.

∴ جا ٢٧٠° = -١

جتا ٢٧٠° = ٠

ظا ٢٧٠° غير معرف - لماذا؟



شكل (٢ - ١٤حـ)

٤

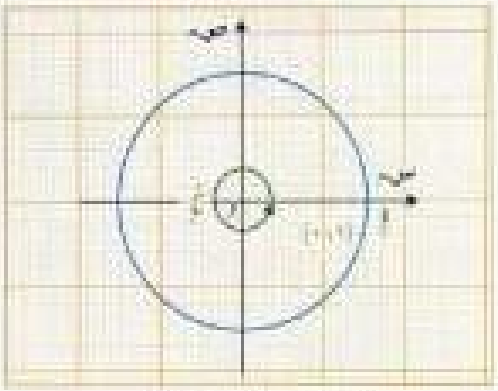
هـ = ٠° أو ٣٦٠°

أ (١ ، ٠) هي النقطة المثلثية.

∴ جتا ٠° = جتا ٣٦٠° = ١

جا ٠° = جا ٣٦٠° = ٠

ظا ٠° = ظا ٣٦٠° = ٠ لماذا؟



شكل (٢ – ١٤و)

● ثانيا: زوايا خاصة أخرى

٧

هـ = ٤٥°

نرسم زاوية قياسها ٤٥° في الوضع القياسي - كما في شكل (٢ - ١٥)

ق(أ و̂ ب) = ٤٥°

الدائرة و هي دائرة الوحدة،

ب النقطة المثلثية للزاوية أ و̂ ب

نفرض أن ب (س ، ص).

أسقط عمودًا من ب على $\overleftarrow{\text{و أ}}$ يقطعه في حـ

Δ ب حـ و قائم الزاوية حـ̂

∴ ق (حـ ب̂ و) = ٤٥° لماذا؟

∴ ب حـ = حـ و لماذا؟

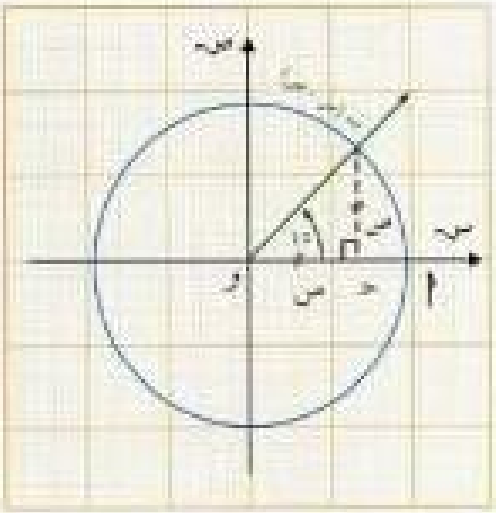
∴ س = ص

∵ س² + ص² = ١

∴ ٢س² = ١

∴ س² = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$



شكل (٢ – ١٥)

ولكن الزاوية واقعة في الربع الأول

∴ جتا ٤٥° = جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = $\frac{\text{جا ٤٥°}}{\text{جتا ٤٥°}}$ = ١

تدريب (١) أكمل:

قا ٤٥° = $\frac{١}{\text{حتا } ٤٥°}$ = $\frac{١}{\quad}$ =

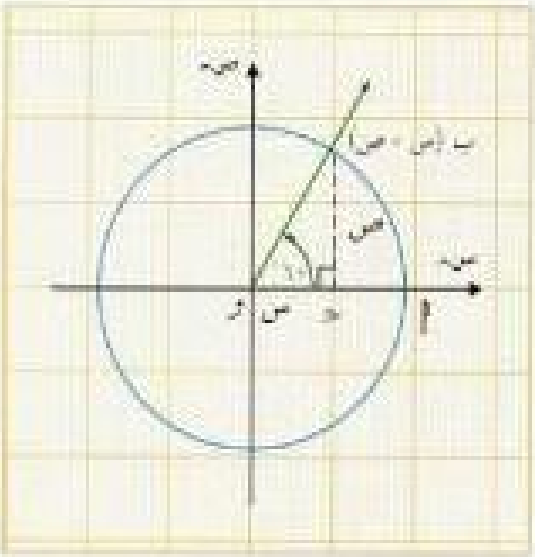
قتا ٤٥° = $\frac{١}{\quad}$ = ، ظتا ٤٥° =

٢ ق = ٦٠°

ارسم زاوية قياسها ٦٠° في الوضع القياسي ثم أوجد حا٦٠° ، حتا٦٠° ، ظا٦٠° ومقلوباتها.

في شكل (٢ - ١٦)

ب (س ، ص) النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٦٠°.



شكل (٢ - ١٦)

نسقط العمود $\overline{\text{ب حـ}}$ على $\overrightarrow{\text{و أ}}$ ليقطعه في حـ

∴ Δ ب حـ و قائم الزاوية حـ

وحيث إن ق (أ و̂ ب) = ٦٠°

∴ Δ ب حـ و ثلاثيني ستيني.

∴ حـ و = $\frac{١}{٢}$ و ب = $\frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

∴ س = $\frac{١}{٢}$ = حتا ٦٠°

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + ص^{٢} = ١

∴ ص^{٢} = $\frac{٣}{٤}$

∴ ص = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

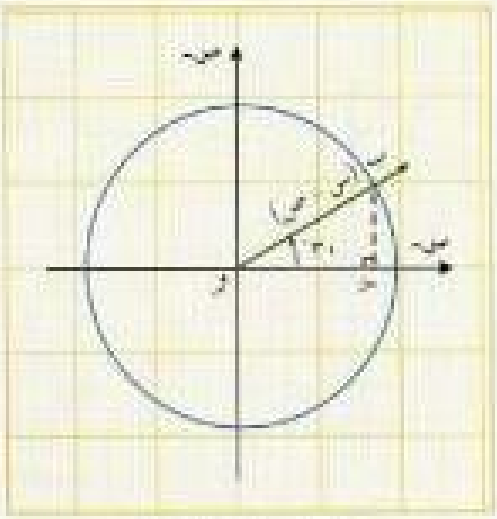
∴ حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لماذا أخذنا القيمة الموجبة؟)

∴ حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ٦٠° = $\frac{\text{حا ٦٠°}}{\text{حتا ٦٠°}}$ = $\sqrt{٣}$

تدريب (٢): أكمل

قا ٦٠° = ، قتا ٦٠° = ، ظتا ٦٠° =

٣ ق = ٣٠°



شكل (٢ – ١٧)

كما سبق، Δ ب ح و ثلاثيني ستيني.

ص = $\frac{١}{٢}$ و ب = $\frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

∴ حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

، س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ = ١

∴ س^{٢} = $\frac{٣}{٤}$

∴ س = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (لماذا أخذنا الإشارة الموجبة؟)

∴ حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا ٣٠° = $\frac{\text{حا ٣٠°}}{\text{حتا ٣٠°}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

تدريب (٣): أكمل:

قا ٣٠° = ، قتا ٣٠° = ، ظتا ٣٠° =

مثال (١) أوجد قيمة: ٤حا^{٢} ٣٠° حتا ٦٠° − ٢ حتا^{٢} ٤٥° حا^{٢} ٤٥° + ظا^{٢} ٦٠° قتا^{٢} ٦٠°

الحل

المقدار = ٤ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ × $\left(\frac{١}{٢}\right)$ − ٢ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ + $(\sqrt{٣})^{٢}$ × $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}$

= ٤ × $\frac{١}{٤}$ × $\frac{١}{٢}$ − ٢ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٣ × $\frac{٤}{٣}$

= $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ + ٤

= ٤ ■

العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين

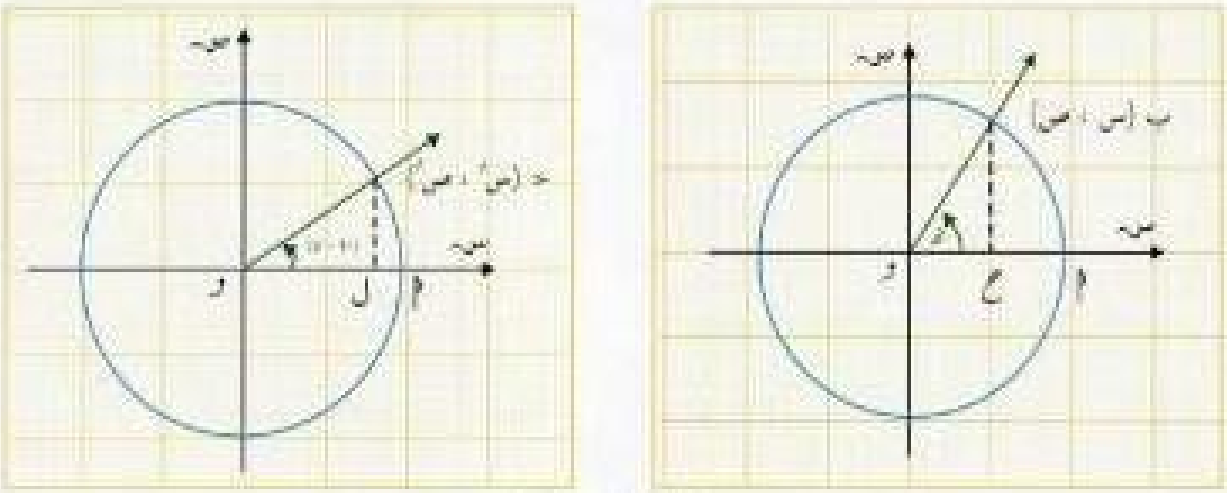
لاحظت فيما سبق أن:

$٣٠^\circ + ٦٠^\circ = ٩٠^\circ$ ، $\left\{ \begin{array}{l} \text{جا } ٣٠^\circ = \text{جتا } ٦٠^\circ \\ \text{جتا } ٣٠^\circ = \text{جا } ٦٠^\circ \end{array} \right.$

، $٠^\circ + ٩٠^\circ = ٩٠^\circ$ ، $\left\{ \begin{array}{l} \text{جا } ٠^\circ = \text{جتا } ٩٠^\circ \\ \text{جتا } ٠^\circ = \text{جا } ٩٠^\circ \end{array} \right.$

، $٤٥^\circ + ٤٥^\circ = ٩٠^\circ$ ، $\text{جا } ٤٥^\circ = \text{جتا } ٤٥^\circ$

فهل يعني ذلك وجود علاقة بين الجيب وجيب التمام لأي زاويتين متتامتين؟



شكل (٢ – ١٨)

في شكل (٢ – ١٨) الزاوية التي قياسها هـ مرسومة في الوضع القياسي بالشكل الأيمن.

ب (س ، ص) النقطة المثلثية لهذه الزاوية.

$\overline{\text{ب ح}} \perp \overleftrightarrow{\text{و أ}} \Leftarrow \Delta$ ب ح و قائم الزاوية $\hat{\text{ح}}$

والزاوية التي قياسها (٩٠° – هـ) مرسومة في الوضع القياسي بالشكل الأيسر.

ح (س' ، ص') النقطة المثلثية لهذه الزاوية

$\overline{\text{ح ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{و أ}} \Leftarrow \Delta$ ح ل و قائم الزاوية $\hat{\text{ل}}$

Δ ب ح و ، Δ ح ل و متطابقان – لماذا؟

∴ ص′ = س ، س′ = ص

أي أن

حا (٩٠° − هـ) = جتا هـ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٩٠°

جتا (٩٠° − هـ) = حا هـ حيث ٠° ≤ هـ ≤ ٩٠°

ظا (٩٠° − هـ) = ظتا هـ حيث ٠° < هـ < ٩٠°

مثال (٢) إذا كان حا ٥٠° = ٠,٧٦٦٠ فأوجد جتا ٤٠° .

الحل

جتا ٤٠° = جتا (٩٠° − ٥٠°) = حا ٥٠° = ٠,٧٦٦٠

مثال (٣) إذا كان جتا ٢٠° = ٠,٩٣٩٧ فأوجد حا ٧٠°

الحل

حا ٧٠° = جتا ٢٠° = ٠,٩٣٩٧

٢ - ٣ ب زاوية الإسناد

Reference Angle

لإيجاد قيم النسبة المثلثية لزاوية (هـ) موجودة في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع - يمكننا إسنادها إلى زاوية حادة (ح) حيث (ح) هي الزاوية المحددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية (هـ).

تعريف

زاوية الإسناد لزاوية موجهة في وضع قياسي هي الزاوية الحادة التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات

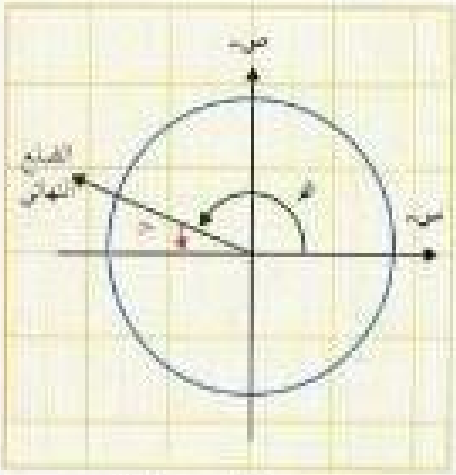
فإذا كان ح زاوية الإسناد فإن ٠° < ح < ٩٠°

١ فإذا وجدت الزاوية التي قياسها الأساسي هـ في الربع الثاني

فإن هـ = ١٨٠° - ح

مثلاً ١١٠° = ١٨٠° - ٧٠°

١٣٥° = ١٨٠° - ٤٥°



شكل (٢ - ١٩أ)

٢ وإذا وجدت الزاوية التي قياسها الأساسي هـ في الربع الثالث

فإن هـ = ١٨٠° + ح

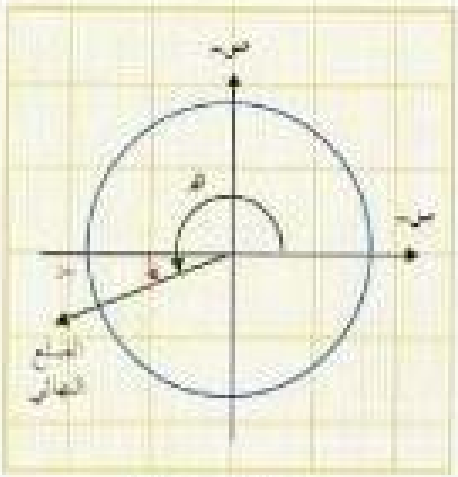
مثلاً ٢١٠° = ١٨٠° + ٣٠°

وكذلك ٢٥٠° = ١٨٠° + ٧٠°

علمًا بأن:

حا ح = |حا هـ| ،

حتا ح = |حتا هـ| ، ظا ح = |ظا هـ|



شكل (٢ - ١٩ب)

٣ إذا وقعت الزاوية التي قياسها الأساسي هـ في الربع الرابع

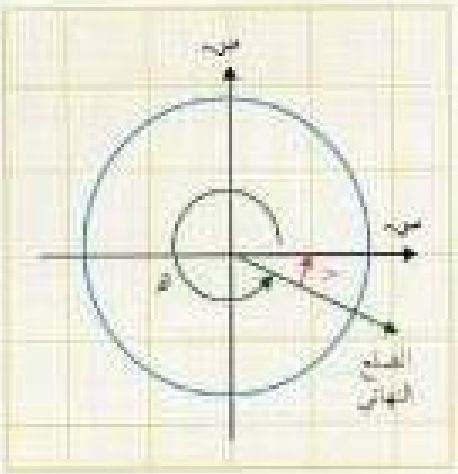
فإن هـ = ٣٦٠° − ح أو قياس آخر هـ = − ح

مثلاً ٣٠٥ = ٣٦٠° − ٥٥°

وعليه يكون القياس الأساسي ٣٠٥° والقياس الآخر −٥٥°

وكذلك ٣٣٠ = ٣٦٠° − ٣٠°

وعليه يكون القياس الأساسي ٣٣٠° والقياس الآخر −٣٠°



شكل (٢ − ١٩ح)

فإذا كانت ح زاوية الإسناد للزاوية هـ فإن أي قيمة لنسبة مثلثية للزاوية هـ تساوي النسبة المثلثية لزاوية الإسناد ح وقد يختلفان في الإشارة.

١ إذا كانت ٩٠° < هـ < ١٨٠°

فإن حا هـ = حا (١٨٠° − ح) = حا ح

حتا هـ = حتا (١٨٠° − ح) = −حتا ح

ظا هـ = ظا (١٨٠° − ح) = −ظا ح

٢ إذا كانت ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

فإن حا هـ = حا (١٨٠° + ح) = −حا ح

حتا هـ = حتا (١٨٠° + ح) = −حتا ح

ظا هـ = ظا (١٨٠° + ح) = ظا ح

٣ إذا كانت ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

فإن حا هـ = حا (٣٦٠° − ح) = حا (−ح) = −حا ح

حتا هـ = حتا (٣٦٠° − ح) = حتا (−ح) = حتا ح

ظا هـ = ظا (٣٦٠° − ح) = ظا (−ح) = −ظا ح

مثال (٤)

أوجد كلاً مما يلي: حا ١٢٠°، حتا ١٣٥°، ظا ٢٢٥°، حا ٣٣٠°

الحل

حا ١٢٠° = حا (١٨٠° − ٦٠°) = حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حتا ١٣٥° = حتا (١٨٠° − ٤٥°) = − حتا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

حا ٣٣٠° = حا (٣٦٠° − ٣٠°) = حا (−٣٠°) = − حا ٣٠° = − $\frac{١}{٢}$ ■

مثال (٥) أوجد قيم هـ : حتا هـ = − $\frac{١}{٢}$ حيث ٠° < هـ < ٣٦٠°

الحل

∵ حتا هـ = − $\frac{١}{٢}$ < ٠ حيث ٠° < هـ < ٣٦٠°

∴ الزاوية هـ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث توجد أولاً زاوية الإسناد ح للزاوية هـ

∵ |حتا هـ| = حتا ح

∴ حتا ح = $\frac{١}{٢}$

∴ ح = ٦٠° ■

إذا كانت الزاوية هـ تقع في الربع الثاني

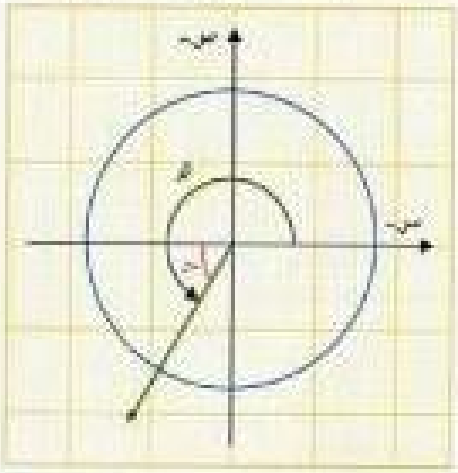
شكل (٢ − ٢٠أ)

∴ هـ = ١٨٠° − ح

= ١٨٠° − ٦٠°

= ١٢٠°

إذا كانت الزاوية هـ تقع في الربع الثالث



شكل (٢ − ٢٠ب)

∴ هـ = ١٨٠° + ح

= ١٨٠° + ٦٠°

= ٢٤٠° ■

٢ - ٣ تمارين

بنود موضوعية

أولًا - ضع العلامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وصحح العبارة الخطأ فيما يلي:

أ) حا^{٢}٥٠° + حا^{٢}٤٠° = ١

ب) حا^{٢}٧٠° + حا^{٢}٢٠° = ٠

جـ) أكبر قيمة لجيب الزاوية التي قياسها هـ، حيث ٠° < هـ < ٣٦٠° هي الواحد.

د) أصغر قيمة لجيب تمام الزاوية التي قياسها هـ ، حيث ٠° < هـ < ٣٦٠° هي الصفر.

هـ) حا ٣٠° حتا ٦٠° = حا^{٢}٣٠°

و) محيط دائرة الوحدة ٤π

ثانيًا - لكل بند مما يلي أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح. ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١) إذا كانت $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها هـ فإن ظا هـ =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) صفر

٢) إذا كانت $\left(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$ نقطة مثلثية للزاوية التي قياسها هـ فإن قا هـ =

(أ) $-\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $-\frac{٥}{٣}$ (د) $-\frac{٥}{٤}$

أسئلة مقالية

١) احسب قيمة كل مما يلي:

أ) ٤ حتا ٦٠° - ٢ ظا ٤٥°

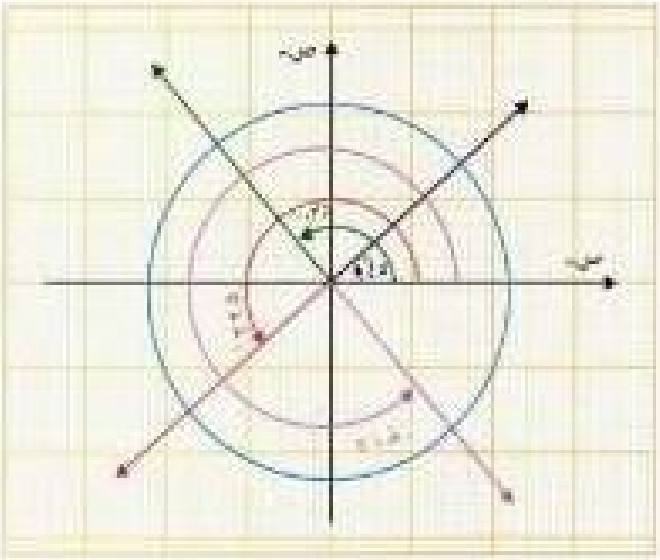
ب) حا^{٢}٣٠° + حتا^{٢}٣٠° - حتا^{٢}٨٥° - حا^{٢}٨٥°

٢) تحقق من أن $\frac{\text{ظا}٤٥° \text{ حا}٩٠°}{١ + \text{حتا}^{٢}٠°} = \frac{١}{٢}$

٣) مستعينًا بالشكل المقابل أوجد إحداثيات النقط المثلثية للزوايا التي قياساتها: ٤٥°، ١٣٥°، ٢٢٥°، ٣١٥°، ثم أوجد:

أ ظا ١٣٥°، ظا ٢٢٥°، ظا ٣١٥°

ب قا ١٣٥° قا ٢٢٥° + قتا ٢٢٥° قتا ٣١٥°



٤ تعلم أن $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°. استعن برسم مشابه للموجود في السؤال السابق في إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا التي قياساتها: ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°

٥ عيِّن النسب المثلثية للزوايا التي قياساتها:
١٢٠° ، ٢٤٠° ، ٣٠٠°

٦ أوجد قيم س : ٠° ≤ س < ٣٦٠° في كل مما يلي:

أ ظا س = −١

ب حتا س = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جـ حا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٧ احسب قيمة المقدار:
حا ١° + حا ٢° + حا ٣° + ... + حا ٣٥٧° + حا ٣٥٨° + حا ٣٥٩°

٨ برهن على أن:

أ حاس ظاس = $\frac{١ - \text{حتا}^٢\text{س}}{\text{حتا س}}$

ب ١ + ظا^٢ س = قا^٢ س

٢ - ٤ استخدام حاسبة الجيب الإلكترونية في إيجاد قيم النسب المثلثية

Using Calculators to Find Values of Trigonometric Ratios

توجد المفاتيح التالية على جميع الحاسبات العلمية:

[sin] مفتاح «حا»، (sin) اختصار كلمة Sine التي تعني «جيب» عند الضغط عليه قبل إدخال عدد ما مثل أ تحصل على حا أ°

[cos] مفتاح «حتا»، (cos) اختصار كلمة cosine التي تعني «جيب تمام»، عند الضغط عليه قبل إدخال عدد ما مثل أ تحصل على حتا أ°

[tan] مفتاح «ظا»، (tan) اختصار كلمة tangent التي تعني «ظل» عند الضغط عليه قبل إدخال عدد ما مثل أ تحصل على ظا أ°

[°'''] يستخدم لإدخال أجزاء الدرجة (الدقيقة، والثانية)

[SHIFT] يستخدم لمعرفة قياس الزاوية التي علمت إحدى نسبها المثلثية.

• أولا - إدخال قياس زاوية

مثال تمهيدي

لإدخال ٤٥″ ١٥′ ٣٥° إلى الحاسبة نستخدم المفاتيح التالية على التوالي من اليسار إلى اليمين،

[3] [5] [°'''] [1] [5] [°'''] [4] [5] [°'''] [=]

فيظهر على الشاشة 35° 15′ 45″

نستخدم المفتاح [°''']

فيظهر على الشاشة 35.2625

ملاحظة

لاحظ أن الدرجة (°) وحدة القياس الستيني للزاوية تقسم إلى ستين جزءًا متساويًا يسمى كل منها دقيقة (′) وكذلك تقسم الدقيقة إلى ستين جزءًا متساويًا يسمى كل منها ثانية (″)

∴ الدرجة = ٦٠′ والدقيقة = ٦٠″

● ثانيا - إيجاد النسب المثلثية لزاوية قياسها معلوم

تستخدم الحاسبة في إيجاد جا، جتا، ظا إذا علم قياس الزاوية، وعندما يكون القياس معروفًا بالدرجات وأجزائها تُهيأ الآلة للاستخدام بالضغط على المفتاح [MODE] لتحديد وضع التشغيل DEG.

مثال (١) استخدم الحاسبة وأوجد جا ٨٠°

الحل

لحساب جا ٨٠° نستخدم المفاتيح التالية على التوالي: [sin] [8] [0] [=]

فيظهر على الشاشة 0.9848

∴ جا ٨٠° = ٠,٩٨٤٨

(النواتج في هذا المثال والأمثلة التالية مقربة لأربعة أرقام عشرية) ■

مثال (٢) أوجد:

أ جتا ٥٠° ب ظا ٤٠°

الحل

أ لحساب جتا ٥٠° نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[cos] [5] [0] [=]

فيظهر على الشاشة 0.6428

∴ جتا ٥٠° = ٠,٦٤٢٨

ب لحساب ظا ٤٠° نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[tan] [4] [0] [=]

فيظهر على الشاشة 0.8391

∴ ظا ٤٠° = ٠,٨٣٩١ ■

مثال (٣) أوجد:

أ حا ٤٥,٥° **ب** حا ٤٥° ٣٠′

الحل

أ نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[sin] [4] [5] [.] [5] [=]

فيظهر على الشاشة 0.7133

∴ حا ٤٥,٥° = ٠,٧١٣٣

ب نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[sin] [4] [5] [°'''] [3] [0] [°'''] [=]

فيظهر على الشاشة 0.7133

∴ حا ٤٥° ٣٠′ = ٠,٧١٣٣

ماذا تلاحظ؟

مثال (٤) أوجد ظا ٢٣° ٣٠′ ١٥″

الحل

نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[tan] [2] [3] [°'''] [3] [0] [°'''] [1] [5] [°'''] [=]

فيظهر على الشاشة 0.4349

∴ ظا ٢٣° ٣٠′ ١٥″ = ٠,٤٣٤٩

مثال (٥) أوجد قيمة المقدار جتا ٧٥° − ٤ حا ١٥° + ١

الحل

نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

[cos] [7] [5] [−] [4] [sin] [1] [5] [+] [1] [=]

فيظهر على الشاشة 0.2235

∴ قيمة المقدار = ٠,٢٢٣٥

تدريب أكمل الجدول الآتي مستعينًا بحاسبة الجيب الإلكترونية:

س	جا س	جتا س	ظا س
١٥°	٠,٢٥٨٨		
٣٠°		٠,٨٦٦٠	
٤٥°	٠,٧٠٧١		
٦٠°			١,٧٣٢١
٧٥°	٠,٩٦٥٩		
٩٠°		صفر	غير معرف

ثم أكمل ما يلي: في الربع الأول

١ تزداد قيمة كل من جيب الزاوية، ..... كلما زاد قياس الزاوية

٢ تتناقص قيمة ..... كلما زاد قياس الزاوية

٣ تتساوى قيم ..... ، ..... الزوايا عندما يكون مجموع قياسي الزاويتين .....

● ثالثًا - إيجاد قياس الزاوية إذا علمت قيمة إحدى النسب المثلثية

مثال ٦ أوجد قيمة س حيث ٠° ≤ س ≤ ٩٠° إذا كان:

أ جا س = ١ ب جتا س = ١

جـ ظا س = ١

الحل

أ لإيجاد قيمة س نستخدم المفتاح SHIFT قبل إدخال القيمة:

∴ نستخدم المفاتيح التالية على التوالي:

SHIFT sin 1 =

فيظهر على الشاشة 90

∴ س = ٩٠°

ب

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | cos | 1 | =

فيظهر على الشاشة 0 ∴ س = ٠°

جـ

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | tan | 1 | =

فيظهر على الشاشة 45 ∴ س = ٤٥°

مثال (٧) أوجد قيمة س حيث ٠° ≤ س ≤ ٩٠° إذا علم أن

أ حتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ظا س = $\sqrt{٣}$

جـ حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

د جا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

هـ قا س = ٢

و ظتا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الحل

نستخدم المفاتيح التالية على التوالي من اليسار إلى اليمين

أ

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | cos | 1 | $a^{b/c}$ | 2 | =

فيظهر على الشاشة 60 ∴ س = ٦٠°

ب

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | tan | $\sqrt{\ }$ | 3 | =

فيظهر على الشاشة 60 ∴ س = ٦٠°

جـ

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | cos | (| $\sqrt{\ }$ | 3 | + | 2 |) | =

فيظهر على الشاشة 30 ∴ س = ٣٠°

د

$\overrightarrow{\text{SHIFT}}$ | sin | $\sqrt{\ }$ | 2 | x^{-1} | =

فيظهر على الشاشة 45 ∴ س = ٤٥°

هـ

نعلم أن قاس = $\frac{١}{\text{حتاس}}$

$\frac{١}{\text{حتاس}}$ = ٢

∴ حتاس = $\frac{١}{٢}$

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة س

و ظتاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ س = ٦٠° لماذا؟

مثال (٨)

أوجد قيم س حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠° إذا علم أن:

أ) قتا س = ١,٨٣٢ ب) جا س = -٠,٨٦٩٦

الحل

أ) تعلم أن قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$

$\frac{١}{\text{جا س}}$ = ١,٨٣٢

∴ جا س = ٠,٥٤٥٩ وحيث إن ٠° ≤ س < ٣٦٠°،

∵ جا س > ٠

∴ الزاوية تقع إما في الربع الأول أو في الربع الثاني

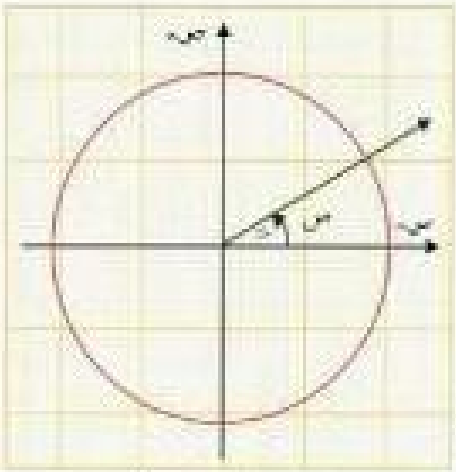
نوجد أولاً زاوية الإسناد ح للزاوية س

∵ |جا س| = جا ح

∴ جا ح = ٠,٥٤٥٩

∴ ح = ٣٣,٠٨٦١٨٧٩٦

∴ ح = ٣٣° ٥′ ١٠″



شكل (٢ – ٢١أ)

إذا كانت الزاوية س تقع في الربع الأول

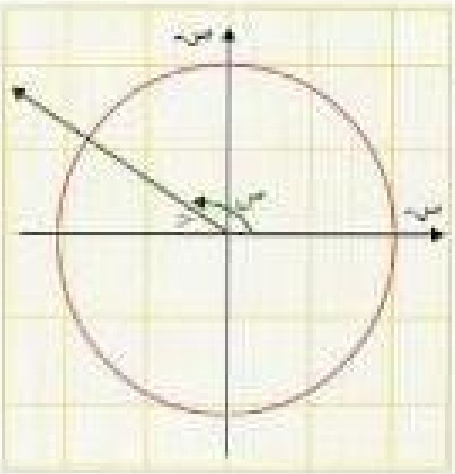
∴ س = ٣٣° ٥′ ١٠″

إذا كانت الزاوية س تقع في الربع الثاني

∴ س = ١٨٠ – ٣٣,٠٨٦١٨٧٩٦

= ١٤٦,٩١٣٨١٢

∴ س = ١٤٦° ٥٤′ ٥٠″



شكل (٢ – ٢١ب)

ب

جاس = −٠,٨٦٩٦

∵ جاس = −٠,٨٦٩٦ وحيث إن ٠° ≤ س < ٣٦٠°

∵ جاس < ٠

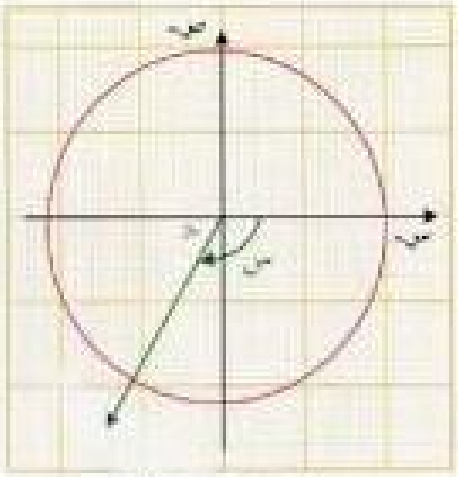
∴ الزاوية إما أن تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع.

نوجد أولًا زاوية الإسناد ح للزاوية س

∵ |جاس| = جاح

∴ جاح = ٠,٨٦٩٦

∴ ح = ٦٠° ٢٤′ ٤٤″

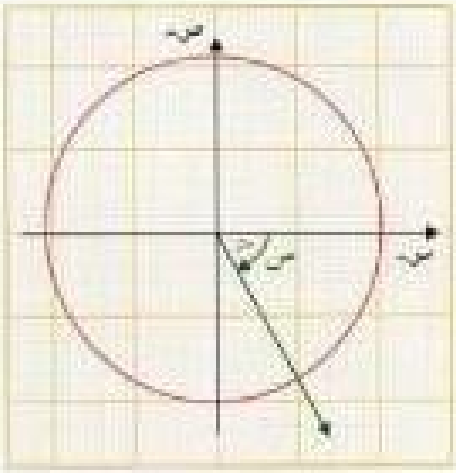


شكل (٢ − ٢٢أ)

إذا كانت الزاوية س تقع في الربع الثالث

∴ س = ١٨٠° + ٦٠° ٢٤′ ٤٤″

∴ س = ٢٤٠° ٢٤′ ٤٤″



شكل (٢ − ٢٢ب)

وإذا كانت الزاوية س تقع في الربع الرابع

∴ س = ٣٦٠° − ٦٠° ٢٤′ ٤٤″

∴ س = ٢٩٩° ٣٥′ ١٦″ ■

٢ - ٤

تمارين

١ باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ) حتا ٨٥°
ب) حا ٨٥°
جـ) ظا ٨٥°
د) حا ٣٢′ ٩١°
هـ) حتا ٣٢′ ٩١°
و) ظا ٣٢′ ٩١°
ز) حا (−٢١٥°)
ح) حتا ٢١٠°
ط) ظا ٥٠″ ٢٥′ ١١٥°
ى) حا ٤٥,٩°
ك) حتا ٣٢,٤°

٢ أوجد قيمة كل مقدار فيما يلي باستخدام الحاسبة:

أ) حتا ١٨٠° − حا ٩٠° + ظا ١٣٥°

ب) ٢ − ٣ حتا ٥٠° + حا ٤٠°

جـ) $\frac{\text{حا ٦٠° − حا ٣٥°}}{\text{حتا ٦٥° + حتا ٣٥°}}$

د) حتا ٦٥° حتا ١٠° − حا ٦٥° حا ١٠°

هـ) حتا ٧٥°

هل توجد علاقة بين ما ورد في كل من (د) ، (هـ)؟

و) هل حا ١٠٥° = حا ٩٠° حتا ١٥° + حتا ٩٠° حا ١٥°؟

٣ تحقق باستخدام الحاسبة أن:

$$\text{١ + حتا ٧٠°} = \frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٧٠°}}{\text{١ − حتا ٧٠°}}$$

٤ أوجد قيم س حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠° إذا علم أن:

أ) حا س = ٠,٩٩٢٦
ب) حتا س = ٠,٦٥٦١
جـ) ظا س = ٢,٠٣٥٣
د) قا س = ٢,٥٤١
هـ) قتا س = ٢
و) ظتا س = −٠,٧٦٤٥

٢ - ٥ حل المثلث قائم الزاوية Solution of a Right Triangle

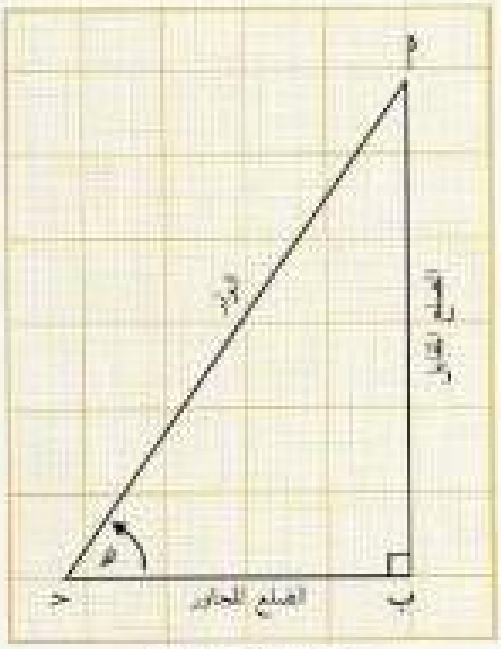
• أولا - النسب المثلثية لزاوية في مثلث قائم الزاوية

إذا اعتبرنا الزاوية $\hat{\text{حـ}}$ إحدى زوايا المثلث أ ب حـ القائم في $\hat{\text{ب}}$ والموضح في شكل (٢ - ٢٣) فإننا عادة نسمي:

$\overline{\text{أحـ}}$ وتر المثلث أ ب حـ

$\overline{\text{أب}}$ الضلع المقابل للزاوية $\hat{\text{حـ}}$

$\overline{\text{ب حـ}}$ الضلع المجاور للزاوية $\hat{\text{حـ}}$



شكل (٢ - ٢٣)

تدريب (١):

استعن بالمثلث أ ب حـ الموضح في شكل (٢ - ٢٣) ثم أكمل:

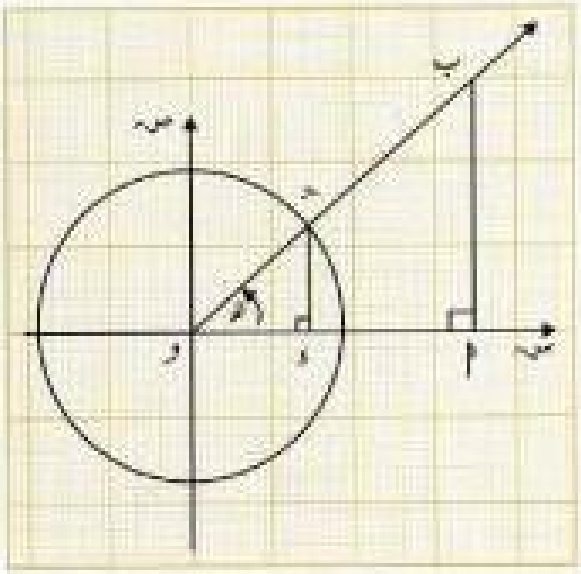
أ إذا كان قياس ($\hat{\text{أحـ ب}}$) = هـ فإن قياس ($\hat{\text{ب أ حـ}}$) = ...

ب الضلع المقابل للزاوية $\hat{\text{ب أ حـ}}$ هو .....

حـ الضلع المجاور للزاوية $\hat{\text{ب أ حـ}}$ هو .....

في شكل (٢ - ٢٤):

$\hat{\text{أ و ب}}$ زاوية موجهة في وضع قياسي، وهي مرسومة في دائرة الوحدة، حـ النقطة المثلثية للزاوية $\hat{\text{أ و ب}}$، قياس ($\hat{\text{أ و ب}}$) = هـ، $\overline{\text{ب أ}} \perp \overleftarrow{\text{و أ}}$، $\overline{\text{حـ ء}} \perp \overleftarrow{\text{و أ}}$



شكل (٢ - ٢٤)

هل يتشابه المثلثان حـ ء و، ب أ و؟ (قارن قياسات زواياهما) لتطابق الزوايا المتناظرة. يتشابه المثلثان حـ ء و، ب أ و ويتج أن:

$\frac{\text{حـ د}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{د و}}{\text{أ و}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{ب و}}$ ..... (١)

حـ (د و ، حـ د) هي النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها هـ

∴ جاهـ = حـ د ، جتاهـ = د و ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

$\frac{\text{جاهـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{جتاهـ}}{\text{أ و}} = \frac{١}{\text{ب و}}$ ..... (٣)

من (٣) ينتج أن:

$\text{جاهـ} = \frac{\text{ب أ}}{\text{ب و}}$ ، $\text{جتاهـ} = \frac{\text{أ و}}{\text{ب و}}$ ، $\text{ظاهـ} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ و}}$

أي أن:

$\text{جاهـ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها هـ}}{\text{طول الوتر}}$

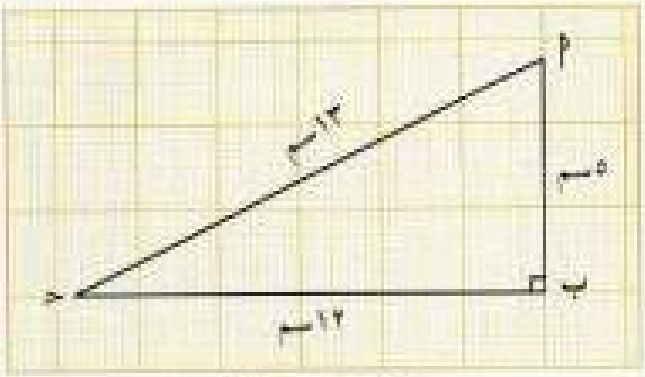
$\text{جتاهـ} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية التي قياسها هـ}}{\text{طول الوتر}}$ (٤)

$\text{ظاهـ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها هـ}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية التي قياسها هـ}}$

وتستخدم عادة ما ورد في (٤) لحساب النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

مثال ١

أوجد النسب المثلثية الأساسية (حا، حتا، ظا) لكل من الزاويتين الحادتين $\hat{ح}$ ، $\hat{أ}$ في شكل (٢ - ٢٥)



شكل (٢ - ٢٥)

الحل

$$\text{حا ح} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{حتا ح} = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أح}} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$\text{ظا ح} = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب ح}} = \frac{٥}{١٢}$$

$$\text{حا أ} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أح}} = \frac{١٢}{١٣} \text{ ، حتا أ} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}} = \frac{٥}{١٣}$$

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{ب ح}}{\text{أب}} = \frac{١٢}{٥}$$

مثال ٢ عيِّن النسب المثلثية الأساسية لزاوية قياسها ٤٥°

الحل

نرسم المثلث أ ب ح قائم الزاوية في $\hat{ب}$ ،

قياس ($\hat{أ ح ب}$) = ٤٥°

شكل (٢ - ٢٦) المثلث أب ح متطابق الضلعين (لماذا؟)

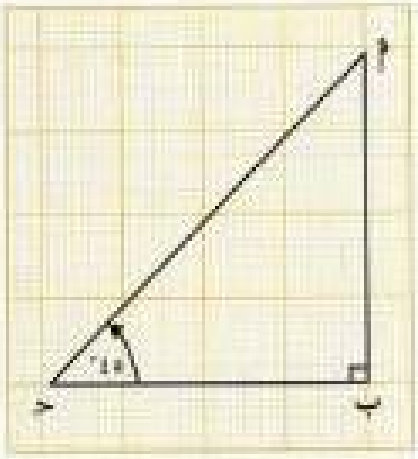
∴ أ ب = ب ح

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$(\text{أح})^٢ = (\text{أب})^٢ + (\text{ب ح})^٢$$

$$(\text{أح})^٢ = (\text{أب})^٢ + (\text{أب})^٢ = ٢\,(\text{أب})^٢ = ٢\,(\text{ب ح})^٢$$

$$\therefore \text{أح} = \sqrt{٢}\,\text{أب} \text{ ، أح} = \sqrt{٢}\,\text{ب ح}$$



شكل (٢ - ٢٦)

$$\text{حا } ٤٥^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{أب}}{\sqrt{٢}\,\text{أب}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

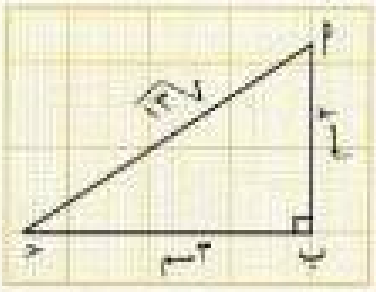
$$\text{حتا } ٤٥^\circ = \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بحـ}}{\sqrt{٢}\,\text{بحـ}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ظا } ٤٥^\circ = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = ١$$

وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في صفحة ٦٤

مثال (٣)

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية $\hat{\text{ب}}$ فيه أب = ٢سم، ب حـ = ٣سم أوجد النسب المثلثية الأساسية لكل من الزاويتين $\hat{\text{حـ}}$ ، $\hat{\text{أ}}$



شكل (٢ – ٢٧)

الحل

في شكل (٢ – ٢٧) $\hat{\text{ب}}$ قائمة

$\therefore$ $(\text{أحـ})^٢ = (\text{أب})^٢ + (\text{بحـ})^٢$ (لماذا؟)

$= ٤ + ٩ = ١٣$

$\therefore$ $\text{أحـ} = \sqrt{١٣}$

$\therefore$ $\text{حا حـ} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ،

$\text{حتا حـ} = \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}} = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$

$\text{ظا حـ} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{٢}{٣}$

بالمثل: $\text{حا أ} = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ،

$\text{حتا أ} = \frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ،

$\text{ظا أ} = \frac{٣}{٢}$

أو بطريقة أخرى:

حا أ = حا (٩٠° − .....) = حتا (...) =

، حتا أ = حتا (٩٠° − .....) = ... (...) =

• ثانيا - حل المثلث قائم الزاوية

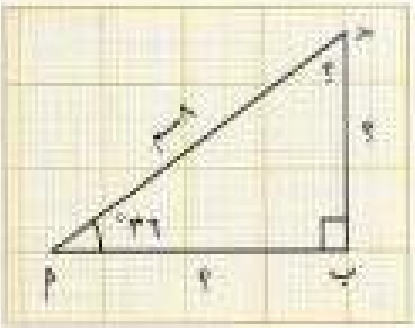
لأي مثلث أ ب حـ تتعين ستة عناصر هي:

- أطوال أضلاعه الثلاثة أب ، ب حـ ، حـ أ
- قياسات زواياه الثلاث: ق($\hat{أ}$) ، ق($\hat{ب}$) ، ق($\hat{حـ}$) ونعني بحل المثلث تعيين عناصره الستة، وعادة ما تعطى ثلاثة عناصر أحدها على الأقل طول ضلع للمثلث ويلزم تعيين الباقي.

مثال (٩)

حل المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في $\hat{ب}$ والذي فيه أ حـ = ٨سم، ق($\hat{أ}$) = ٣٦°

الحل



شكل (٢ – ٢٨)

العناصر الثلاثة المعطاة هي:

ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، ق ($\hat{أ}$) = ٣٦° ،

أ حـ = ٨ سم شكل (٢ – ٢٨)

والعناصر المجهولة هي:

ق ($\hat{حـ}$) ، أب ، ب حـ

ق ($\hat{حـ}$) = ٩٠° − ٣٦° = ٥٤°

∴ $\frac{ب حـ}{أ حـ}$ = حا ٣٦°

∴ $\frac{ب حـ}{٨}$ = حا ٣٦°

∴ ب حـ = ٨ حا ٣٦°

∴ ب حـ ≈ ٤,٧٠٢٣ سم

(باستخدام الحاسبة والتقريب لأربعة أرقام عشرية)

∴ ب حـ ≈ ٤,٧ سم

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$ = حتا ٣٦°

∴ $\frac{\text{أب}}{٨}$ = حتا ٣٦°

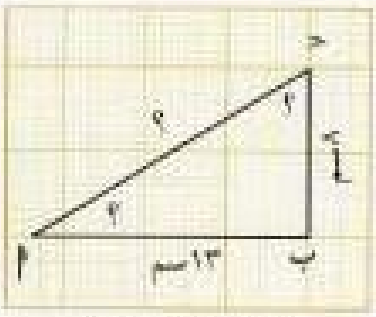
∴ أب = ٨ حتا ٣٦°

∴ أب ≈ ٦,٤٧٢١ ≈ ٦,٥ سم

مثال (٢)

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في $\hat{\text{ب}}$ إذا كان أب = ١٣ سم، ب حـ = ٨سم فأوجد: أ حـ، ق ($\hat{\text{أ}}$)، ق ($\hat{\text{حـ}}$)

الحل



شكل (٢ – ٢٩)

حيث إن $\hat{\text{ب}}$ قائمة

∴ (أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} (لماذا؟)

= ١٦٩ + ٦٤ = ٢٣٣

∴ أ حـ = $\sqrt{٢٣٣}$ ≈ ١٥,٢٦٤٣ سم

(باستخدام الحاسبة والتقريب لأربعة أرقام عشرية)

بفرض أن ق ($\hat{\text{حـ}}$) = هـ

∴ ظا هـ = $\frac{١٣}{٨}$ = ١,٦٢٥ (باستخدام الحاسبة)

∴ هـ = ٥٨° ٢٣′ ٣٣″

وبذلك يكون ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٩٠° – (٥٨° ٢٣′ ٣٣″)

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣١° ٣٦′ ٢٧″

٢ - ٥ تمارين

(استخدم حاسبة الجيب في إيجاد نواتج العمليات مقربًا الجواب لأربعة أرقام عشرية)

١ إذا كان Δ أ ب حـ قائم الزاوية في $\hat{ب}$ وكان أب = ٧سم، ق ($\hat{أ}$) = ٧٠° فارسم Δ أ ب حـ ثم أكمل:

أ ق ($\hat{حـ}$) =

ب جتا ٧٠° = $\frac{أب}{أحـ}$ = $\frac{\quad}{أحـ}$

∴ أحـ =

حـ جا ٧٠° = $\frac{بحـ}{أحـ}$ = $\frac{\quad}{\quad}$

∴ بحـ = × =

٢ حل المثلث س ص ع قائم الزاوية في $\hat{ص}$ لكل من الحالات التالية:

أ س ع = ٢٠سم ، س ص = ١٠سم.

ب ق ($\hat{س}$) = ٣٨° ، س ص = ١٠سم.

حـ ق ($\hat{س}$) = ٣٠° ، ص ع = ٨,٤سم.

٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في $\hat{ب}$ فيه أب = ٨,٢سم، أحـ = ١٠سم. حدد العناصر المجهولة وأوجدها.

٤ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في $\hat{ب}$ فيه ق ($\hat{حـ}$) = ٦٢° ٢٦′، أحـ = ١٥٠,٤سم، أوجد كلاً من أب ، ق ($\hat{أ}$).

٥ س ص ع مثلث قائم الزاوية في $\hat{ص}$ فيه س ص = ٢٤,٣٧ مترًا، س ع = ٦٢,٩٩ مترًا. أوجد كلاً من ق ($\hat{س}$)، ق ($\hat{ع}$).

٦ حل المثلث قائم الزاوية الذي فيه طول الوتر ١٤,٦سم، وإحدى الزاويتين قياسها ٣٣,٢°.

٢ - ٦

تطبيقات على حل المثلث القائم

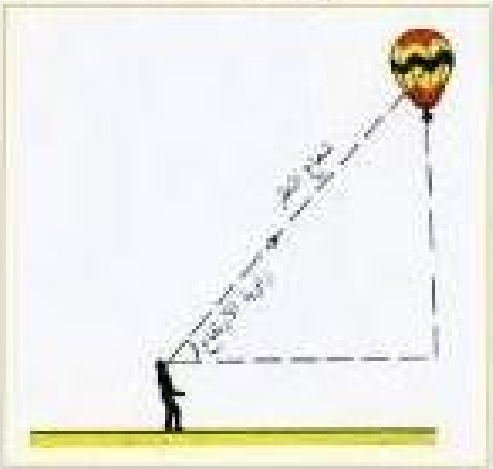
Applying Solution of a Right Triangle

زوايا الارتفاع Elevation Angles
وزوايا الانخفاض Depression Angles

إذا نظر شخص إلى شيء ما بعيد عنه فإن الخط الواصل بين العين والشيء المنظور يسمى عادة **خط النظر أو شعاع النظر**. انظر شكل (٢ - ٣٠).

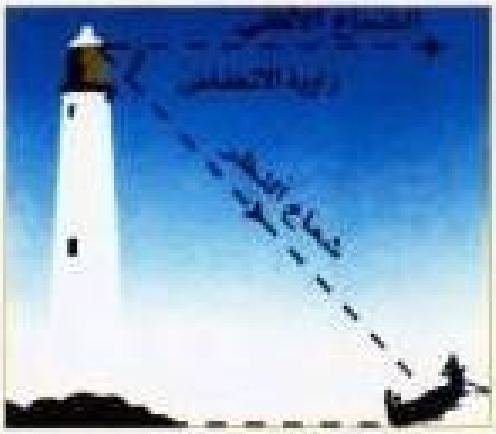
شكل (٢ - ٣٠)

إذا نظر شخص إلى منطاد (مثلاً) فإن الزاوية الناتجة من اتحاد شعاع النظر إلى المنطاد (خط النظر) والشعاع الأفقي البادئ من العين تسمى عادة زاوية ارتفاع. انظر شكل (٢ - ٣١).



شكل (٢ - ٣١)

أما إذا نظر شخص من فوق برج (مثلاً) إلى قارب على سطح الأرض وفي مستوى قاعدة البرج فإن الزاوية الناتجة من اتحاد الشعاع الأفقي للنظر وشعاع النظر (خط النظر) تسمى عادة زاوية انخفاض القارب. انظر شكل (٢ - ٣٢).

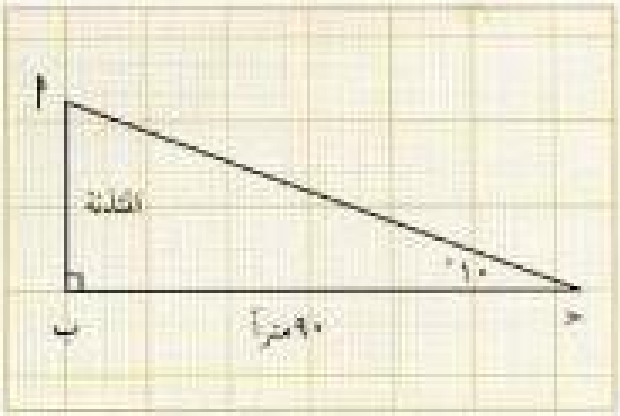


شكل (٢ - ٣٢)

تفيد دراسة حساب المثلثات بوجه عام وموضوع حل المثلثات بوجه خاص في تناول كثير من المواقف الحياتية، وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٩)

من نقطة على سطح الأرض تبعد ٩٠ مترًا عن قاعدة مئذنة وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٠° أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.



شكل (٢ – ٣٣)

الحل

في شكل (٢ – ٣٣): $\overline{أب}$ يمثل المئذنة، جـ نقطة الرصد، $\overline{أب} \perp \overline{ب جـ}$، ب $\hat{جـ}$ أ زاوية الارتفاع، ب جـ = بعد قاعدة المئذنة عند نقطة الرصد جـ = ٩٠ مترًا. لدينا مثلث قائم معلوم فيه ثلاثة عناصر:

ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، ق ($\hat{جـ}$) = ١٠° ، ب جـ = ٩٠ مترًا والمطلوب تعيين أب

$$\frac{أب}{ب جـ} = ظا\ ١٠°$$

$$\therefore \frac{أب}{٩٠} = ظا\ ١٠°$$

$$\therefore أب = ٩٠ \times ظا\ ١٠°$$

$$\therefore أب \approx ١٥,٨٦٩٤ \text{ مترًا}$$

$\therefore$ ارتفاع المئذنة $\approx$ ١٥,٨٧ مترًا.

مثال (١٠)

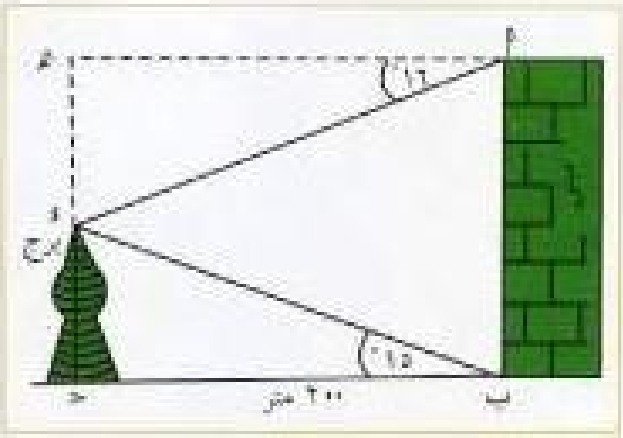
من نقطة أ على سطح مبنى وجد أن قياس زاوية انخفاض قمة برج يساوي ١٦°، ومن نقطة ب أسفل المبنى وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج يساوي ١٥°. أوجد ارتفاع المبنى علمًا بأن المسافة الأفقية بين قاعدتي المبنى والبرج ٢٠٠ متر.

الحل

من الرسم التخطيطي للمسألة في شكل (٢ – ٣٤)

زاوية انخفاض قمة البرج = ق ($\hat{ء أ هـ}$) = ١٦°

ق (زاوية ارتفاع قمة البرج) = ق ($\hat{ء ب جـ}$) = ١٥°



شكل (٢ – ٣٤)

ارتفاع المبنى = ب أ

= جـ هـ

= جـ د + د هـ

في Δ د ب جـ: ظا ١٥° = $\frac{\text{جـ د}}{٢٠٠}$

∴ جـ د = ٢٠٠ × ظا ١٥°

≈ ٥٣,٥٨٩٨ مترًا

في Δ أ د هـ: ظا ١٦° = $\frac{\text{د هـ}}{\text{أ هـ}}$ = $\frac{\text{د هـ}}{٢٠٠}$ (لماذا؟)

∴ د هـ = ٢٠٠ × ظا ١٦° ≈ ٥٧,٣٤٩١ مترًا

∴ ارتفاع المبنى ≈ ٥٣,٥٨٩٨ + ٥٧,٣٤٩١

≈ ١١٠,٩٣٨٩ أمتار ≈ ١١٠,٩٤ أمتار

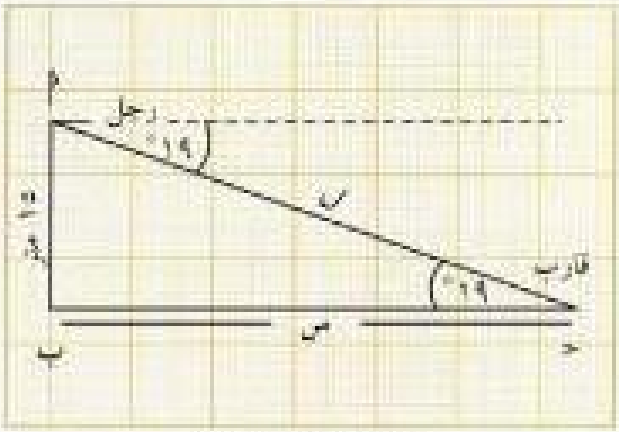
مثال (٣)

يقف رجل على رصيف ميناء يرتفع عن سطح البحر بمقدار ١٥ مترًا وقد ربط قاربًا بحبل طويل ودفعه تيار ليبتعد عن الرصيف في البحر، وبعد فترة رصد الرجل زاوية انخفاض القارب فوجد أن قياسها ١٩°. أوجد:

أ بعد القارب عن قاعدة رصيف الميناء عند لحظة الرصد.

ب المسافة بين الرجل والقارب في تلك اللحظة.

الحل



شكل (٢ – ٣٥)

يفرض أن:

س = بعد القارب عن قاعدة الرصيف،

ل = طول الحبل

أ في المثلث أ ب جـ:

ظا ١٩° = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

= $\frac{١٥}{\text{س}}$

∴ س = $\frac{١٥}{\text{ظا } ١٩°}$

∴ س ≈ ٤٣,٥٦٣٢ مترًا

∴ بعد القارب عن قاعدة الرصيف ≈ ٤٣,٥٦ مترًا

ب حا ١٩° = $\frac{\text{أب}}{\text{ل}}$ = $\frac{١٥}{\text{ل}}$

∴ ل = $\frac{١٥}{\text{حا } ١٩°}$ ∴ ل ≈ ٤٦,٠٧٣٣ مترًا

∴ طول الحبل ≈ ٤٦,٠٧ مترًا

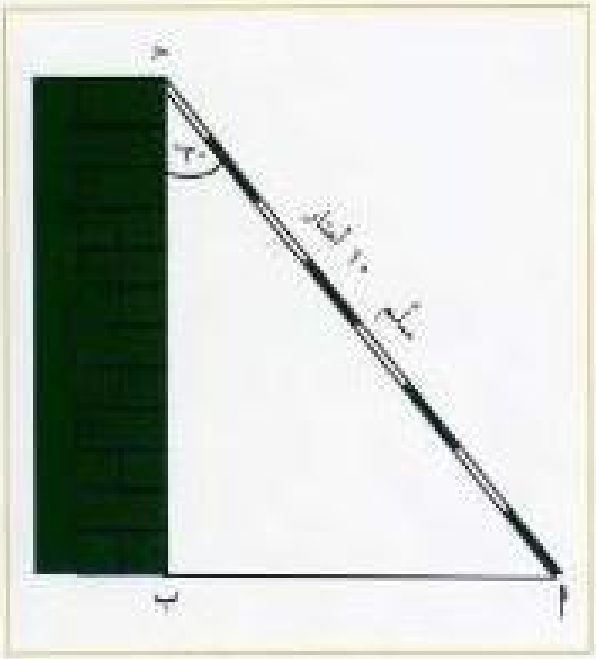
مثال (٤)

$\overline{\text{أجـ}}$ سلم طوله ١٠ أمتار يستند إلى حائط رأسي $\overline{\text{ب جـ}}$ ويصنع معه زاوية قياسها ٣٠° أوجد:

أولًا: ارتفاع الحائط.

ثانيًا: بعد الطرف الأدنى للسلّم عن قاعدة الحائط.

الحل



شكل (٢ – ٣٦)

شكل (٢ – ٣٦) يوضح رسمًا تخطيطيًا للمسألة حيث ب جـ هو ارتفاع الحائط

أولًا: حتا ٣٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{١٠}$

∴ ب جـ = ١٠ حتا ٣٠°

= ٨,٦٦٠٣ مترًا

∴ ارتفاع الحائط = ٨,٦٦ مترًا

ثانيًا: حا ٣٠° = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ = $\frac{\text{أب}}{١٠}$

∴ أب = ١٠ حا ٣٠°

= ١٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٥ أمتار

∴ بعد الطرف الأدنى للسلّم عن قاعدة الحائط = ٥ أمتار.

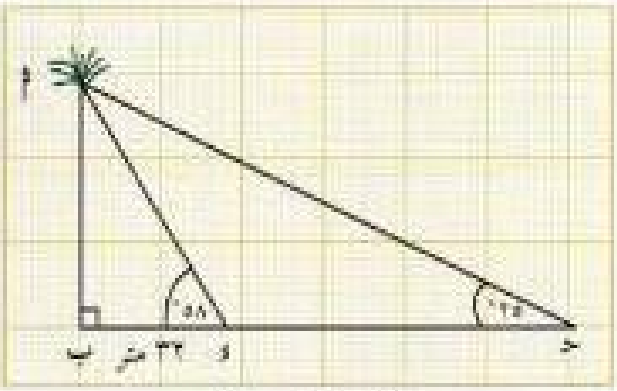
مثال (٥)

قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة من نقطة ما ٢٥°، وقياس زاوية ارتفاع الشجرة نفسها من نقطة أخرى أقرب للشجرة وتبعد عنها ٣٢ مترًا هو ٥٨° أوجد:

١ ارتفاع الشجرة.

٢ البعد بين نقطتي الرصد (علمًا بأنهما على استقامة واحدة).

الحل



شكل (٢ – ٣٧)

في شكل (٢ – ٣٧) رسم تخطيطي للمسألة، حيث أب = طول الشجرة، حـ، و نقطتا الرصد

١ في المثلث أ ب و

ظا ٥٨° = $\frac{\text{أب}}{٣٢}$

∴ أب = ٣٢ ظا ٥٨° ≈ ٥١,٢١٠٧ مترًا

∴ ارتفاع الشجرة ≈ ٥١,٢١٠٧ مترًا (٥١,٢١ مترًا تقريبًا).

٢ في المثلث أ ب حـ:

ظا ٢٥° = $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}}$ = $\frac{٥١,٢١٠٧}{\text{ب حـ}}$

∴ ب حـ = $\frac{٥١,٢١٠٧}{\text{ظا ٢٥°}}$

∴ ب حـ ≈ ١٠٩,٨٢١٧ أمتار

∴ ب حـ ≈ ١٠٩,٨٢ أمتار

∴ البعد بين نقطتي الرصد ≈ ١٠٩,٨٢ – ٣٢

≈ ٧٧,٨٢ مترًا

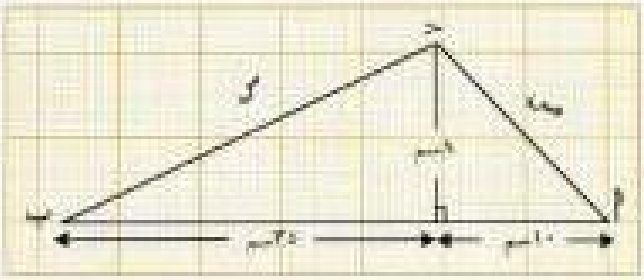
٢ - ٦

تمارين

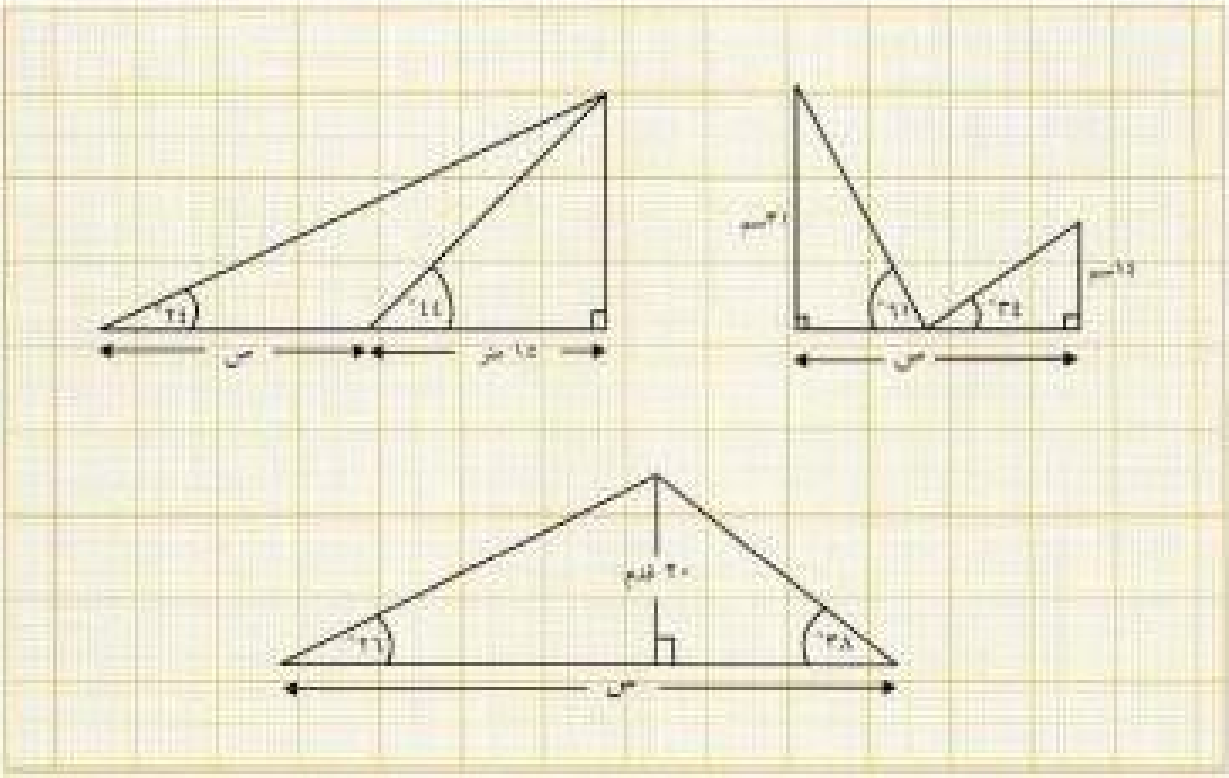
١ في الشكل المجاور أوجد:

أولاً: س، ص

ثانياً: ق ($\hat{أ}$) ، ق ($\hat{ب}$)



٢ عين س في كل من الأشكال التالية:



٣ يقف رجل على بعد ٢٥٠ مترًا من قاعدة مبنى فإذا كان قياس زاوية ارتفاع المبنى يساوي ٣١° فأوجد ارتفاع هذا المبنى.

٤ من قمة برج ارتفاعه ١٢٠ مترًا كان قياس زاوية انخفاض قارب على سطح البحر يساوي ٩,٤° أوجد بعد القارب عن قمة البرج.

٥ أراد شخص قياس ارتفاع مبنى إحدى المدارس. فوقف على بعد ٢٠ مترًا من قاعدة المبنى وعين قياس زاوية ارتفاع المبنى فوجده ٣٠' ٦٠° أوجد ارتفاع المبنى وبعد الشخص عن سطحه.

٦ يستند سلم طوله ٤ أمتار بطرفه الأعلى على حائط رأسي. فإذا كان بعد قاعدة السلم عن الحائط $\frac{١}{٢}$ ١ متر فأوجد:

أولًا: ارتفاع الحائط.

ثانيًا: قياس الزاوية التي يصنعها السلم مع الحائط.

٧ عندما كانت إحدى الطائرات تحلق فوق موقع أحد الأودية، شاهد قائدها أشخاصًا يحتجزهم الوادي على الضفة الأخرى بزاوية انخفاض قياسها ٣٥°

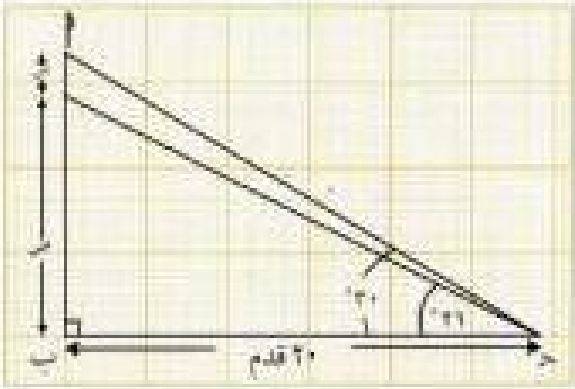
فإذا كانت الطائرة على ارتفاع ١٠٠٠ متر عن سطح الوادي فاحسب:

أ بعد الطائرة عن موقع الأشخاص في تلك اللحظة.

ب بعد مسقط الطائرة على الأرض المستوية عن موقع الأشخاص.

٨ في الشكل المجاور أوجد:

س، ص، أ حـ



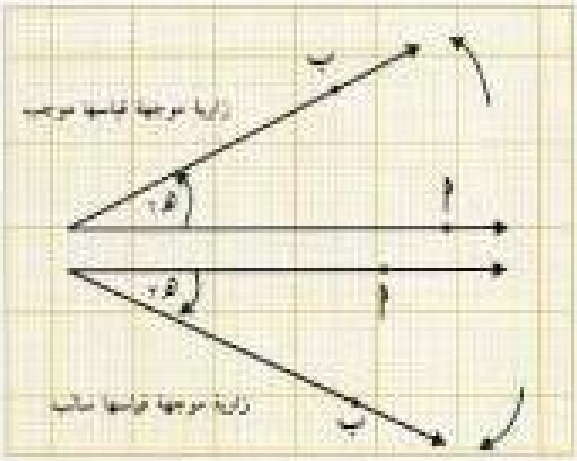
٩ بينما كان أحد أفراد الدفاع المدني يحلق بطائرته العمودية على ارتفاع ١٥٠٠ متر من أرض مستوية شاهد حريقًا على سطح الأرض بزاوية انخفاض قياسها ٢٠° فكم يبعد موقع الحريق عن الطائرة في تلك اللحظة؟

١٠ تسير سفينة مقتربة من منارة على الشاطئ ارتفاعها ١٨٥ مترًا، فإذا كان قياس زاوية ارتفاع المنارة في لحظة ما ٣٧°، وكان قياس زاوية ارتفاع المنارة نفسها بعد مرور ٥ ثوان يساوي ٤٨° فاحسب سرعة السفينة.

ملخص وتمارين عامة Summary and Exercises

١ الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة البدء نفسها.

٢ الزاوية الموجهة يكون قياسها موجبًا إذا كان الدوران عكس دوران عقربي الساعة، ويكون قياسها سالبًا إذا كان الدوران مع دوران عقربي الساعة.

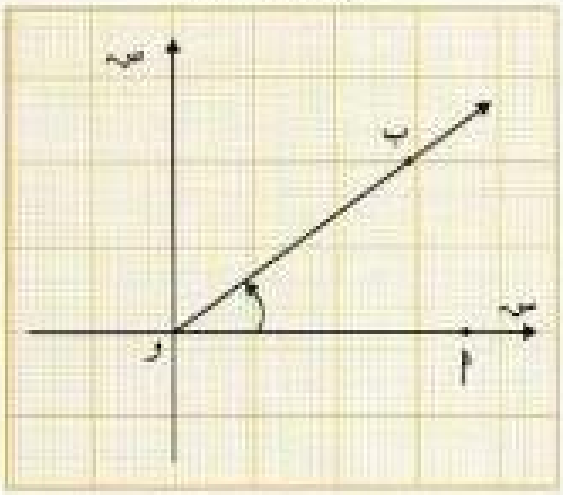


شكل (٢ – ٣٨)

ق١ > ٠° ، ق٢ < ٠°

انظر شكل (٢ – ٣٨)

٣ تكون الزاوية الموجهة أ و ب في وضع قياسي إذا كان رأسها و نقطة الأصل وينطبق ضلعها الابتدائي و أ على الجزء الموجب من المحور السيني، انظر شكل (٢ – ٣٩)



شكل (٢ – ٣٩)

٤ دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها الوحدة.

٥ نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في وضع قياسي مع دائرة الوحدة تسمى نقطة مثلثية.

٦ تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا كان $س^٢ + ص^٢ = ١$

٧ لأي نقطة مثلثية (س، ص) للزاوية الموجهة التي قياسها ق:

حا ق = ص ، حتا ق = س ، ظا ق = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

٨ العلاقة $حا^٢ق + حتا^٢ق = ١$ صحيحة لأي زاوية قياسها ق

٩ حا ق، حتا ق، ظا ق هي النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها ق وتوجد ثلاث نسب مثلثية أخرى هي مقلوبات تلك النسب وهي:

قتا ق = $\frac{١}{حا ق}$ ، قا ق = $\frac{١}{حتا ق}$ ، ظتا ق = $\frac{١}{ظا ق}$

١٠ لأي زاوية قياسها هـ ، ٠° < هـ < ٩٠° يكون
حا هـ = حتا (٩٠° − هـ) ، حتا هـ = حا (٩٠° − هـ)

١١ زاوية الإسناد لزاوية موجهة في وضع قياسي هي الزاوية الحادة التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

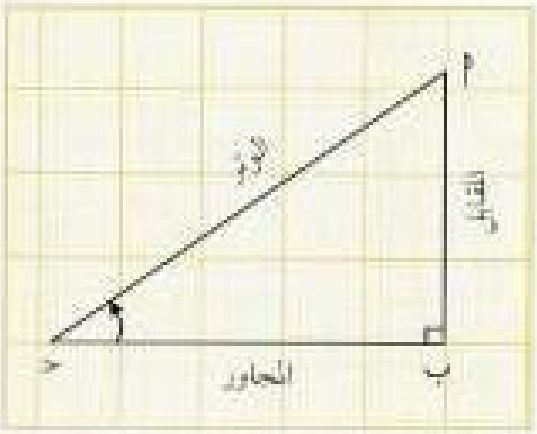
١٢ إذا كانت $\hat{\text{ح}}$ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، وكان قياس ($\hat{\text{ح}}$) = هـ فإن:

حا هـ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ح}}{\text{طول الوتر}}$

، حتا هـ = $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ح}}{\text{طول الوتر}}$

، ظا هـ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ح}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ح}}$

انظر شكل (٢ − ٤٠)



شكل (٢ − ٤٠)

٢ - ٧ تمارين عامة

١ ارسم الزوايا الموضح قياس كل منها فيما يلي على أن تكون في الوضع القياسي.

أ ٣٠٥° ب ١٤٧° جـ −١٨٥°

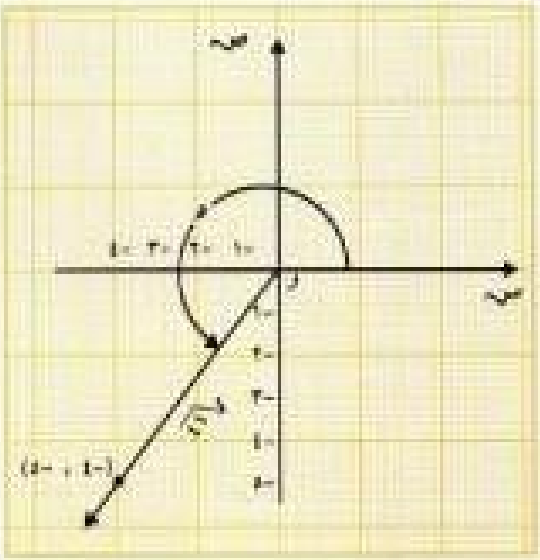
د ٣٥٩° هـ −٦٨°

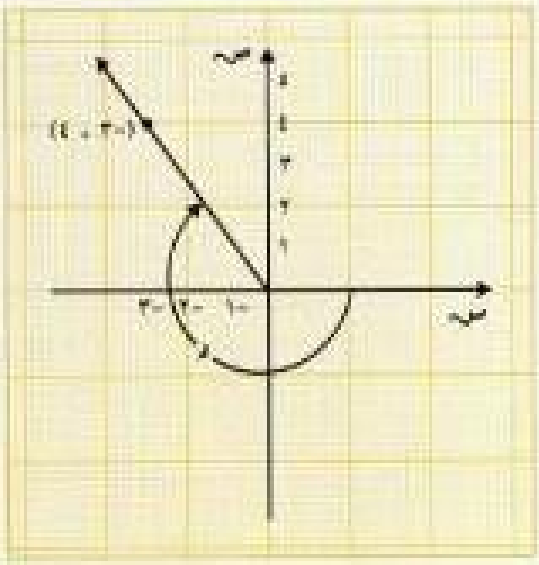
٢ أثبت أن النقاط التالية نقاط مثلثية:

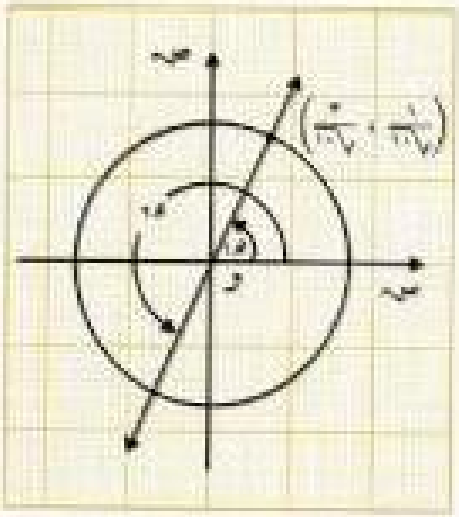
أ $\left(\frac{١}{\sqrt{٥}} ، \frac{٢}{\sqrt{٥}}\right)$ ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

جـ $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، -\frac{١}{٢}\right)$

٣ أوجد النسب المثلثية للزاوية التي قياسها هـ في كل من الشكلين التاليين:







٤ أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين $\hat{هـ}_١$ ، $\hat{هـ}_٢$ في الشكل المجاور.

٥ أوجد قيمة كل مما يلي:

أ ٦ حا ٢٠°

ب ٨ حتا ١٠°

جـ ٣,٤ حا ٨٠°

د $\frac{٨}{\text{حا } ١٠°}$

هـ $\frac{٥,٤ \text{ حا } ٣٢°}{\text{حا } ٤٠°}$

و $\frac{\text{حا } ٨٠°}{\text{ظا } ٨٠°}$

٦ أوجد قيم س حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠°

أ حتا س = ٠,٧٠٧

ب ظا س = -١,٧٣٢

جـ حا س = ٠,٦٥٢

د حا س = ٠,٦٦٩١

هـ حتا س = ٠,٥٥١٩

و ظا س = ٢,٣١١

٧ أوجد قيم س، حيث ٠° ≤ س < ٣٦٠°

أ ظا س = $\sqrt{٣}$

ب حتا س = $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جـ حا^{٢}٤٧° + حتا^{٢}س = ١

د حتا^٢ س = ١ - حا^{٢}٨٠°

هـ ظا س = ظا ٢٤٠°

٨ مثلث قائم الزاوية قياس زاوية من زواياه ٧٣,٤° عين النسب المثلثية الأساسية لكل زاوية من زواياه.

٩ إذا كان $\left(س ، \frac{-١}{٢}\right)$ نقطة مثلثية لزاوية قياسها هـ حيث ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°.
فأوجد حا هـ، حتا هـ، ظا هـ، قتا هـ، قا هـ، ظتا هـ.

١٠ أوجد قيم كل من المقادير التالية (بدون استخدام الآلة الحاسبة):

أ حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا ٤٥° حتا ٤٥°

ب حا ٤٥° حتا ٩٠° + حتا ٤٥° حا ٩٠°

جـ حا ٣٣° حتا ٥٧° + حتا ٣٣° حا ٥٧°

د حتا ٢٠٠° حتا ١٦٠° - حا ٢٠٠° حا ١٦٠°

١١ أثبت أن (حا هـ - حتا هـ)^{٢} = ١ - ٢ حا هـ حتا هـ

١٢ رصدت زاوية انخفاض قارب من قمة فنار ارتفاعه ٤٥ مترًا عن سطح البحر فكان قياسها ١٨° ٣٠′ أوجد بعد القارب عن قاعدة الفنار.

١٣ يقف رجل على بعد ١٠٠ متر من قاعدة مئذنة. نظر إلى قمة المئذنة فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٤٠°، أوجد ارتفاع المئذنة.

١٤ رصد رجل كان يقف عند نقطة ترتفع ٨٠ مترًا عن سطح البحر جسمًا طافيًا فكانت زاوية انخفاض الجسم قياسها ١٢° أوجد المسافة بين الرجل والجسم الطافي.

١٥ طارت طائرة عمودية رأسيًا إلى أعلى بسرعة منتظمة وأراد أحد الأشخاص القريبين من موقع طيرانها معرفة سرعتها، حيث وجد بعد لحظات من طيرانها أن قياس زاوية ارتفاعها ١٥° وبعد دقيقتين وجد أن قياس زاوية ارتفاعها ٣٣° فإذا كان الشخص يقف على بعد ١٠٠٠ متر من موقع إقلاعها. فأوجد سرعة الطائرة.

١٦ أراد رجل قياس عرض نهر يمر أمام منزله، فوقف على سطح المنزل الذي يرتفع ٥٠ مترًا ووجد أن قياس زاوية انخفاض حجر ب على الضفة البعيدة يساوي ٣٠° وأن قياس زاوية انخفاض حجر حـ على الحافة القريبة يساوي ٤٠°. فإذا علم أن الحجرين ب، حـ وقاعدة المنزل على استقامة واحدة. فأوجد عرض النهر.

الفصل الثالث

الجمل الرياضية
Mathematical Phrase

٣ - ١ المعادلة التربيعية Quadratic Equation

تعلم أن الصورة العامة للمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هي:

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث أ، ب ، جـ $\in$ ح، أ $\neq$ ٠

فكل مما يلي معادلة من الدرجة الثانية في س:

$س^٢ + ٥س + ٤ = ٠$ ، $٦س^٢ - ٧س - ٥ = ٠$

$٤س^٢ + ٥س = ٠$ ، $٣س^٢ - ١٥ = ٠$

$س (س + ٥) = ٦$ ، $(س - ٧)^٢ = ١٦$

تسمى المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد «معادلة تربيعية» ويمكن حل المعادلة التربيعية بطرق مختلفة منها طريقة التحليل وطريقة إكمال المربع، والتي تتضح من خلال الأمثلة التالية:

مثال ١ حل المعادلة: $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$ حيث س $\in$ ح

الحل

$\because$ $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$

$\therefore$ $(٢س - ٣)(س + ٢) = ٠$ بالتحليل

$\therefore$ $٢س - ٣ = ٠$ أو $س + ٢ = ٠$

$\therefore$ $س = \frac{٣}{٢}$ أو $س = -٢$

التحقق: عندما $س = \frac{٣}{٢}$

الطرف الأيمن $= ٢ \times \frac{٩}{٤} + \frac{٣}{٢} - ٦ = \frac{٩}{٢} + \frac{٣}{٢} - ٦ = ٠ =$ الطرف الأيسر.

وعندما $س = -٢$

الطرف الأيمن $= ٨ - ٢ - ٦ = ٠ =$ الطرف الأيسر.

مثال ٢ أوجد مجموعة حل المعادلة: $٣س^٢ = ٢٤٣$ في ح

الحل

∵ $٣س^٢ = ٢٤٣$

∴ $٣س^٢ - ٢٤٣ = ٠$

∴ $س^٢ - ٨١ = ٠$ لماذا؟

∴ $(س - ٩)(س + ٩) = ٠$

∴ $س - ٩ = ٠$ أو $س + ٩ = ٠$

∴ $س = ٩$ أو $س = -٩$

∴ مجموعة حل المعادلة هي: $\{٩ ، -٩\}$

طريقة أخرى للحل:

$٣س^٢ = ٢٤٣$

$س^٢ = \frac{١}{٣} \times ٢٤٣ = ٨١$

∴ $س = \pm ٩$ (لماذا؟)

∴ مجموعة الحل هي: $\{٩ ، -٩\}$

أي الحلان أسهل؟

مثال ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: $(س - ٦)^٢ = ١٥$

الحل

واضح أن الطرف الأيمن هو مقدار مربع.

∵ $(س - ٦)^٢ = ١٥$

∴ $(س - ٦) = \pm\sqrt{١٥}$

∴ $س = ٦ \pm \sqrt{١٥}$

∴ $س = ٦ + \sqrt{١٥}$ أو $س = ٦ - \sqrt{١٥}$

∴ مجموعة الحل هي: $\{٦ + \sqrt{١٥} ، ٦ - \sqrt{١٥}\}$

ملاحظة: إذا لم تحدد مجموعة التعويض فسنعتبرها مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

مثال ٤ أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^٢ + ٨س - ٣ = ٠$

الحل

المقدار $س^٢ + ٨ س - ٣$ يمكن تحليله بطريقة إكمال المربع كالتالي:

$\because$ $س^٢ + ٨س - ٣ = ٠$

$\therefore$ $س^٢ + ٨س = ٣$

بإضافة $\left(\frac{٨}{٢}\right)^٢$ «مربع نصف معامل س» إلى كل من الطرفين:

$\therefore$ $س^٢ + ٨س + \left(\frac{٨}{٢}\right)^٢ = ٣ + \left(\frac{٨}{٢}\right)^٢$

$\therefore$ $س^٢ + ٨س + ١٦ = ٣ + ١٦$

$\therefore$ $(س + ٤)^٢ = ١٩$

$\therefore$ $س + ٤ = \pm\sqrt{١٩}$

$\therefore$ $س = -٤ + \sqrt{١٩}$ أو $س = -٤ - \sqrt{١٩}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: $\{-٤ + \sqrt{١٩} ، -٤ - \sqrt{١٩}\}$

مثال ٥ أوجد مجموعة حل المعادلة: $٢ص^٢ - ٣ ص - ١ = ٠$

الحل

باستخدام طريقة إكمال المربع:

$\because$ $٢ص^٢ - ٣ص - ١ = ٠$

$\therefore$ $ص^٢ - \frac{٣}{٢} ص - \frac{١}{٢} = ٠$ لماذا؟

$\therefore$ $ص^٢ - \frac{٣}{٢} ص = \frac{١}{٢}$

بإضافة $\left(\frac{-٣}{٢ \times ٢}\right)^٢$ لكل من الطرفين

$\therefore$ $ص^٢ - \frac{٣}{٢} ص + \frac{٩}{١٦} = \frac{١}{٢} + \frac{٩}{١٦}$

$\therefore$ $\left(ص - \frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{١٧}{١٦}$

$$\therefore \quad ص - \frac{٣}{٤} = \pm \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$$

$$\therefore \quad ص = \frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{١٧}}{٤} \quad أو \quad ص = \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$$

وتكون مجموعة الحل هي:

$$\left\{ \frac{٣}{٤} + \frac{\sqrt{١٧}}{٤} \ ، \ \frac{٣}{٤} - \frac{\sqrt{١٧}}{٤} \right\}$$

مثال ٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^٢ + س + ١ = ٠$

الحل

باستخدام طريقة إكمال المربع:

$$س^٢ + س + ١ = ٠$$

$$س^٢ + س + \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ٠$$

$$\left(س + \frac{١}{٢}\right)^٢ = -\frac{٣}{٤}$$

مجموعة الحل = ϕ لماذا؟

٣ - ١

تمارين

● بنود موضوعية

أولًا - ضع العلامة (✓) أمام المعادلة التربيعية فيما يلي:

أ	$٣س^٢ + ٢س = -٥$	ب	$س (س + ٤) + ٥ = ٠$
جـ	$ع^٢ - ٤ = ٠$	د	$ص^٣ = ٢٧$
هـ	$س^٢ (س+١) + ٢س = ٤$	و	$٥ص - ٢ص^٢ - ٣ = ٠$
ز	$ع^٢ + ٥ع^٢ + ٣ع + ١ = ٠$	ح	$(س - ٤) (٢س - ٥) = ٠$
ط	$١٨س - ٤ = ٠$	ى	$(س^٢ - ٢) (س + ١) = ٢$

ثانيًا - لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ مجموعة حل المعادلة: $س (س - ٢) = ٠$ هي:

(أ) $\{-٢\}$ (ب) $\{٢\}$

(جـ) $\{٠ ، -٢\}$ (د) $\{٠ ، ٢\}$

٢ المعادلة التربيعية التي تكافئ المعادلة: $س^٢ = ٣س$ هي:

(أ) $س = ٣$ (ب) $س^٢ + ٣س = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٣س = ٠$ (د) $٣س^٢ = ٣$

(تكون المعادلتان متكافئتين إذا كانت لهما الدرجة نفسها ومجموعة الحل نفسها).

٣ مجموعة حل المعادلة: $س^٢ + ١٦ = ٠$ هي:

(أ) $\{-٤ ، ٤\}$ (ب) $\{٤\}$

(جـ) $\{-٤\}$ (د) ϕ

٤ المعادلة التربيعية التي جذراها ٥ ، -٥ هي:

(أ) $ص^٢ + ٢٥ = ٠$ (ب) $ص^٢ - ٢٥ = ٠$

(ج) (ص + ٥) (ص - ٥) = ٢٥ (د) (ص + ٥) (ص - ٥) = -٢٥

٥ قيمة ك التي تجعل المقدار $س^٢ + ١٢س + ك$ مربعًا كاملًا هي:

(أ) ١٤٤ (ب) -١٤٤

(ج) ٣٦ (د) -٣٦

٦ مجموعة حل المعادلة $٤أ^٢ + ١٢أ + ٩ = ٠$ هي:

(أ) $\{\frac{٣}{٢}\}$ (ب) $\{-\frac{٣}{٢}\}$

(ج) $\{\frac{٣}{٢}\}$ (د) $\{-\frac{٣}{٢}\}$

• أسئلة مقالية

أولًا - اذكر مجموعة حل كل من المعادلات التربيعية التالية:

١ $ص^٢ = ١٦$

٢ $ص^٢ - ٠,٦٤ = ٠$

٣ $٤س^٢ - ٤٩ = ٠$

٤ $٩هـ^٢ - ٢٥ = ٠$

ثانيًا - أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

١ س (٣س - ٤) = ٠

٢ $س^٢ - ٥س = ٠$

٣ $٢ل^٢ = ١٤ل$

٤ $٣س^٢ - ٢٧ = ٠$

٥ $(ع - ٣)^٢ = ١$

٦ $\left(س - \frac{١}{٥}\right)^٢ = \frac{١}{٢٥}$

٧ $(ل - ٥)^٢ = ٧$

٨ $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

٩ $٩س^٢ - ٣٠س + ٢٥ = ٠$

١٠ $هـ^٢ + ٢٠هـ + ٦٤ = ٠$

١١ $١٨س^٢ - ٩س - ٢ = ٠$

١٢ $س^٢ + ٨س + ٦ = ٠$

١٣ $ص^٢ - ٣ص - ٢ = ٠$

١٤ $٤س^٢ - ٢٠س + ٢٢ = ٠$

١٥ $٢س^٢ - س + ١ = ٠$

١٦ $هـ (هـ + ٦) = ٠$

١٧ $\frac{٦}{س} = \frac{س - ٣}{٩}$

١٨ $س - ٢ = \frac{٢}{س}$

ثالثًا - حل كلاً من المعادلات التالية: (إرشاد: ضع ص = $س^٢$):

١ $س^٤ - ٥س^٢ + ٤ = ٠$

٢ $س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦ = ٠$

٣ $٤س^٤ - ٥س^٢ + ٩ = ٠$

٤ $س^٤ + ٢س^٢ - ٣ = ٠$

كم جذرًا مختلفًا لكل معادلة؟

رابعًا - إذا كان أحد جذري المعادلة $٣س^٢ + ٥س + ك = ٠$ هو الصفر فأوجد قيمة ك ثم أكمل:

١ جذرا المعادلة $٣س^٢ + ٥س = صفرًا$ هما .....

٢ جذرا المعادلة $أس^٢ + بس = صفرًا$ هما .....

٣ - ٢

حل المعادلة التربيعية باستخدام القانون

Solution of Quadratic Equation by The Law

إذا أردنا حل المعادلة التربيعية:

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث أ، ب، جـ $\in$ ح، أ $\neq$ ٠

بطريقة إكمال المربع، سنسير في الحل كما جاء في مثال (٥) بالبند السابق وذلك على النحو التالي:

$\because$ $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$

$\therefore$ $س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠$ (لجعل معامل $س^٢$ الوحدة)

$\therefore$ $س^٢ + \frac{ب}{أ} س = - \frac{جـ}{أ}$

وبإضافة $\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢$ إلى كل من الطرفين (لماذا؟)

$\therefore$ $س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^٢ - \frac{جـ}{أ}$

$\therefore$ $\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{٤أ^٢} - \frac{جـ}{أ}$

$= \frac{ب^٢ - ٤أجـ}{٤أ^٢}$

$\therefore$ $س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$\therefore$ $س = - \frac{ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$\therefore$ $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

أي أن جذري المعادلة $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ هما

$$س = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ} \quad ، \quad س = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

والقانون السابق يصلح لحل أي معادلة تربيعية حيث أ معامل $س^٢$ ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق.

سنرى فيما يلي أن المقدار $ب^٢ - ٤ أ حـ$ في القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

هو الذي يحدد طبيعة الجذرين، ولذلك فهو يسمى «مميز المعادلة التربيعية».

١ إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ > ٠$

ففي هذه الحالة: $\sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ} \in ح$

ويكون للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

٢ إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٠$

ففي هذه الحالة يكون $\sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ} = ٠$

ويكون للمعادلة جذران حقيقيان متساويان $\left(س = \frac{-ب}{٢ أ}\right)$

٣ إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠$

ففي هذه الحالة $\sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ} \notin ح$

ولا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

المميز $ب^٢ - ٤ أ حـ$	عدد عناصر مجموعة الحل في ح	نوع الجذرين
موجب	٢	الجذران حقيقيان مختلفان
صفر	١	الجذران حقيقيان متساويان
سالب	٠	لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية

مثال (١) أوجد مجموعة حل المعادلة: $٢ص^٢ - ٣ص - ١ = ٠$

الحل

$أ = ٢ ، ب = -٣ ، حـ = -١$

المميز $= ب^٢ - ٤أحـ$

$= (-٣)^٢ - ٤ \times ٢ \times (-١)$

$= ١٧ > ٠$

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$ص = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أحـ}}{٢أ}$$

$$ص = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{١٧}}{٢ \times ٢}$$

$$= \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي: $\left\{ \frac{٣ + \sqrt{١٧}}{٤} ، \frac{٣ - \sqrt{١٧}}{٤} \right\}$

لعلك لاحظت أن المثال السابق سبق حلّه باستخدام طريقة إكمال المربع - مثال (٥) من (٣ - ١)، ولعلك اكتشفت مدى سهولة استخدام القانون مقارنة بطريقة إكمال المربع. ولكن لا تزال طريقة التحليل - إن أمكن - هي الأسهل.

مثال (٢) أوجد مجموعة حل المعادلة: $٢ص^٢ + ٥ص - ٣ = ٠$

الحل

$أ = ٢ ، ب = ٥ ، حـ = -٣$

$$\therefore ص = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أحـ}}{٢أ}$$

$$\therefore ص = \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٢ \times (-٣)}}{٢ \times ٢}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ٢٤}}{٤} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٤٩}}{٤} = \frac{-٥ \pm ٧}{٤}$$

ص = $\frac{١}{٢}$ أو -٣

∴ مجموعة الحل: $\left\{\frac{١}{٢} ، -٣\right\}$

ولعلك لاحظت أن المثال السابق قد تم حله باستخدام القانون ويمكن إيجاد جذري المعادلة باستخدام التحليل مباشرة.

طريقة أخرى للحل (باستخدام التحليل Factorization):

$٢ص^٢ + ٥ص - ٣ = ٠$

∴ (٢ص - ١) (ص + ٣) = ٠

∴ ٢ص - ١ = ٠ أو ص + ٣ = ٠

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ أو ص = -٣

∴ مجموعة الحل = $\left\{\frac{١}{٢} ، -٣\right\}$

مثال ٣ أوجد جذري المعادلة: ٢س (س + ٢) = ٤.

الحل

∵ ٢س (س + ٢) = ٤

∴ $٢س^٢ + ٤س - ٤ = ٠$

أ = ٢ ، ب = ٤ ، جـ = -٤

∴ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

∴ $س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ٢ \times (-٤)}}{٢ \times ٢} = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ + ٣٢}}{٤}$

$= \frac{-٤ \pm \sqrt{٤٨}}{٤} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٣ \times ١٦}}{٤} = \frac{-٤ \pm ٤\sqrt{٣}}{٤} = -١ \pm \sqrt{٣}$

∴ $س = -١ + \sqrt{٣}$ أو $س = -١ - \sqrt{٣}$

مثال ٤ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦ = ٠

الحل

أ = ٩ ، ب = ٢٤ ، جـ = ١٦

المميز = ب^{٢} − ٤أجـ

= (٢٤)^{٢} − ٤ × ٩ × ١٦

= ٥٧٦ − ٥٧٦

= صفر

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

∴ س = $\frac{-ب}{٢أ}$

= $\frac{-٢٤}{١٨}$ = − $\frac{٤}{٣}$

∴ مجموعة الحل هي $\left\{-\frac{٤}{٣}\right\}$

لاحظ أنه إذا كان ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ فإن مجموعة الحل مجموعة أحادية وهذا يعني أن جذري المعادلة متساويان.

مثال ٥ أوجد مجموعة حل المعادلة: ٣س^{٢} − ٧س + ٦ = ٠

الحل

أ = ٣ ، ب = −٧ ، جـ = ٦

المميز = ب^{٢} − ٤أجـ

= (−٧)^{٢} − ٤ × ٣ × ٦

= ٤٩ − ٧٢

= −٢٣ < ٠

∴ لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية

∴ مجموعة الحل هي ∅

لاحظ أنه: إذا كان ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ فلا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

مثال ٦ بيّن أن للمعادلة $٣س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$ جذرين مختلفين ثم أوجدهما:

الحل

$أ = ٣ ، ب = -٤ ، جـ = -٥$

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= ١٦ - ٤ \times ٣ \times (-٥)$

$= ١٦ + ٦٠ = ٧٦ > ٠$

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان:

وحيث إن $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{٧٦}}{٦} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{١٩}}{٦}$

$\therefore س = \frac{٢ + \sqrt{١٩}}{٣}$ أو $س = \frac{٢ - \sqrt{١٩}}{٣}$

تدريب:

بيّن أن للمعادلة $س^٢ - ٤س - ٢١ = ٠$ جذرين حقيقيين مختلفين ثم أوجدهما.

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ = ...$

هل قيمة المميز مربع كامل؟

$\therefore س =$ ..... أو .....

مثال ٧

بيّن أن للمعادلة $٢٥س^٢ - ١٠س + ١ = ٠$ جذرين حقيقيين متساويين ثم أوجدهما.

الحل

$أ = ٢٥ ، ب = -١٠ ، جـ = ١$

المميز $= ب^٢ - ٤أجـ$

$= ١٠٠ - ٤ \times ٢٥ \times ١ =$ صفر

$\therefore$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

$\therefore س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{١٠}{٥٠} = \frac{١}{٥}$

وتكون مجموعة الحل هي $\left\{\frac{١}{٥}\right\}$

مثال ٨

أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلة ٩ س^{٢} + ك س + ٦٤ = ٠ جذرين متساويين.

الحل

لكي يكون للمعادلة جذران متساويان يكون:

ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠

∵ أ = ٩ ، ب = ك ، حـ = ٦٤

∴ ك^{٢} − ٤ × ٩ × ٦٤ = ٠

∴ ك^{٢} = ٤ × ٩ × ٦٤

∴ ك = ± ٢ × ٣ × ٨ = ±٤٨

مثال ٩ أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين:

ص − س = ١

، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

الحل

ص − س = ١ ..... (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ..... (٢)

من المعادلة (١) ص = س + ١

بالتعويض عن ص في المعادلة (٢):

∴ س^{٢} + (س + ١)^{٢} = ٢٥

∴ س^{٢} + س^{٢} + ٢س + ١ − ٢٥ = ٠

∴ ٢س^{٢} + ٢س − ٢٤ = ٠

∴ س^{٢} + س − ١٢ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٤ أو س = ٣

نعوض عن كل قيمة من قيم س في المعادلة (١):

عندما س = -٤ فإن ص = ١ + (-٤) = -٣

وعندما س = ٣ فإن ص = ١ + ٣ = ٤

∴ مجموعة الحل هي {(-٤ ، -٣) ، (٣ ، ٤)}

مثال ١٠ أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين:

س^{٢} + ص^{٢} = ١ ..... (١)

، س^{٢} + ص^{٢} + س + ص = ٠ ..... (٢)

الحل

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢):

∴ س + ص = -١

∴ س = -ص -١ ..... (٣)

بالتعويض في المعادلة (١)

∴ (-ص - ١)^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ ص^{٢} + ٢ص + ١ + ص^{٢} - ١ = ٠

∴ ص^{٢} + ص = ٠

∴ ص (ص + ١) = ٠

∴ ص = ٠ أو ص = -١

نعوض عن كل قيمة من قيم ص في المعادلة (٣):

عندما ص = ٠ فإن س = ٠ - ١ = -١

عندما ص = -١ فإن س = ١ - ١ = ٠

∴ مجموعة الحل هي {(-١ ، ٠) ، (٠ ، -١)}

٣ - ٢

تمارين

• أسئلة مقالية

أولًا - عين قيمة كل من أ ، ب ، جـ لكل معادلة تربيعية فيما يلي:

١ $س^٢ + ٤س + ٣ = ٠$

٢ $٢س^٢ - ٩س + ٦ = ٠$

٣ $ص^٢ - ٨ص = -٣$

٤ $٧س - ٢ = ٩س^٢$

٥ $٤ - ن^٢ = ٣ن$

٦ $٣س^٢ = ٥س$

٧ $٣س^٢ = ١٢$

٨ $٤ - ق^٢ = ٠$

٩ $س (س + ٦) = ٣٠$

١٠ $\frac{س^٢}{٢} - \frac{س}{٤} = ٢$

ثانيًا - بدون حل المعادلة عين عدد الجذور الحقيقية لكل من المعادلات التالية:

١ $س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

٢ $٦س^٢ - س - ٣٥ = ٠$

٣ $س^٢ + ١٤س + ٤٩ = ٠$

٤ $س^٢ + ١٤س + ٥٠ = ٠$

٥ $٥س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

٦ $٧س^٢ - ٦س + ١ = ٠$

٧ $٣س^٢ - ٢س - ٦ = ٠$

٨ $-س^٢ + ٥س + ٣ = ٠$

ثالثًا - أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية باستخدام القانون:

أ $س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$

ب $٩س^٢ + ٢٥ + ٣٠س = ٠$

جـ $س^٢ + ٣ = س$

رابعًا - أوجد المميز ثم حل كلًا من المعادلات التربيعية التالية باستخدام القانون:

١ $س^٢ + ٥س + ٢ = ٠$

٢ $٣س^٢ + ٢س - ١ = ٠$

٣ $٥س^٢ = س - ١$

٤ $س^٢ = -٢س + ١$

٥ س (س − ٨) = −٩

٦ ٢س + ١١ = س^{٢}

٧ س^{٢} + ١٢س = ٢٨٨

٨ س^{٢} + ٣ = ٨س

٩ −٢س^{٢} + ٣س − ٢٤ = ٠

١٠ س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ س − $\frac{١}{٣}$ = ٠

١١ $\frac{١}{س + ٣}$ + ٢ = ٢س

١٢ $\frac{٣س}{س + ٢}$ − $\frac{س − ١}{س + ١}$ = ٠

خامسًا – أوجد قيمة ب التي تجعل للمعادلة التالية جذرين متساويين موجبين:

١٦س^{٢} + ب س + ٢٥ = ٠

سادسًا – بين أن للمعادلة س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٠ جذرين متساويين ثم اذكر عدد جذور كل من المعادلتين:

أ س^{٢} + ٨س + ١٧ = ٠

ب س^{٢} + ٨س + ١٥ = ٠

ناقش الحل.

سابعًا – حل كلاً من المعادلات التالية بالطريقة التي تراها أفضل:

١ ٢س^{٢} + ٣س = ٠

٢ ٤س^{٢} = ١٢س

٣ س^{٢} − ٦٤ = ٠

٤ ١٨س^{٢} = ٥٠

٥ س^{٢} − ٦س − ١ = ٠

٦ ٤س^{٢} + ١٢س + ٩ = ٠

٧ (٢س − ٣)^{٢} = ١٦

٨ س^{٢} − ٨س − ٢٠ = ٠

٩ س^{٤} − ٧س^{٢} + ١٠ = ٠

١٠ س^{٢} − ٢س − ١١ = ٠

١١ ٣س^{٢} − ٢س − ٣٣ = ٠

١٢ س^{٢} + ٥س − ٢ = ٠

١٣ س^{٤} − س^{٢} − ١٢ = ٠

١٤ س^{٢} − ٦س − ١٦٠ = ٠

ثامنًا – أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

أ ص = س^{٢} ، ص − ٥س = ٠

ب ص = ٢س^{٢} + ٦س + ٥ ، ص = س + ٣

حـ ص = س + ١٧ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٦٩$

د $س^٢ + ص^٢ = ١٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ص = ١٥$

هـ $س^٢ + ص^٢ = ١٠$ ، $٢س^٢ - ص^٢ = ١٧$

و $٣س^٢ - ٢ص^٢ = ٥٨$ ، $س^٢ - ص^٢ = ١١$

ز $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص - ٢٠ = ٠$ ، ٣س + ص - ١٠ = ٠

بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح. ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ إذا كان أ = ٥ ، ب = -٣ ، حـ = ٠ فإن المعادلة التربيعية التي معاملاتها أ، ب، حـ هي:

(أ) $٥س^٢ - ٣س = ٠$ (ب) $٥س^٢ + ٣س = ٠$

(حـ) $٥س^٢ - ٣ = ٠$ (د) $٥س^٢ + ٣ = ٠$

٢ إذا كان $\frac{١}{٢}$ هو أحد جذري المعادلة $٢س^٢ + ٥س + حـ = ٠$ فإن قيمة حـ هي:

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) $-\frac{٧}{٢}$

(حـ) ٣ (د) -٣

٣ مجموعة حل المعادلة (٣س + ٥) (س - ٥) = -٢٥ هي:

(أ) $\{٥ ، \frac{٥}{٣}\}$ (ب) $\{٥ ، -\frac{٥}{٣}\}$

(حـ) $\{٠ ، \frac{١٠}{٣}\}$ (د) $\{٠ ، \frac{٣}{١٠}\}$

٤ قيمة حـ التي تجعل جذري المعادلة $٢٥س^٢ - ٧٠س + حـ = ٠$ متساويين هي:

(أ) ٤٩ (ب) -٤٩

(حـ) $\frac{٧}{١٠}$ (د) $-\frac{٧}{١٠}$

٣ - ٣ تطبيقات على حل المعادلة التربيعية

Applying Solution of Quadratic Equation

إن كثيرًا من العلاقات الرياضية والمواقف الحياتية وغيرها يمكن التعبير عنه بمعادلات تربيعية، كما يتضح في الأمثلة التالية:

مثال توضيحي (١)

عددان زوجيان موجبان متتاليان حاصل ضربهما ١٦٨ للتعبير عن ذلك جبريًا:

نفرض أن العدد الأول س فيكون العدد التالي س + ٢

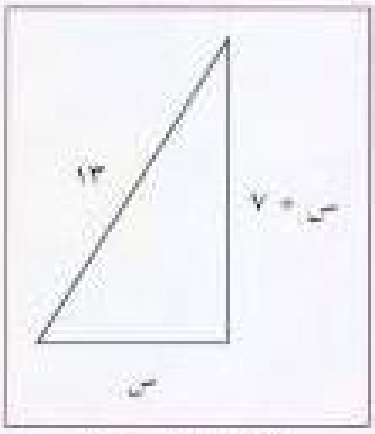
ويكون: س (س + ٢) = ١٦٨

أي $س^٢$ + ٢س − ١٦٨ = ٠

وهي معادلة تربيعية المتغير فيها س.

مثال توضيحي (٢)

جانب من حديقة مزروع بالحشائش، وهذا الجانب على شكل منطقة مثلثة قائمة الزاوية طول ضلعها الأكبر ١٣ مترًا وأحد ضلعيها الآخرين يزيد طوله عن طول الضلع الآخر بمقدار ٧ أمتار. شكل (٣ − ١)



شكل (٣ − ١)

للتعبير عن ذلك جبريًا، نفرض أن طول الضلع الأصغر س متر فيكون طول الضلع الثاني س + ٧ أمتار. وحيث إن طول الضلع الأكبر ١٣ مترًا، وتطبيقًا لنظرية فيثاغورث يكون:

$س^٢$ + $(س + ٧)^٢$ = $(١٣)^٢$

∴ ٢$س^٢$ + ١٤س − ١٢٠ = ٠

∴ $س^٢$ + ٧س − ٦٠ = ٠ وهي معادلة تربيعية.

مما تقدم يتضح أنه بالإمكان التعبير عن كثير من المشكلات الرياضية والمواقف الحياتية بمعادلات تربيعية، وبحل هذه المعادلات نتوصل إلى حل هذه المشكلات أو تفسير تلك المواقف، الأمر الذي يصعب تنفيذه مباشرة دون الاعتماد على حل تلك المعادلات، ويمكن ترتيب خطوات حل المشكلة كالتالي:

١ تحليل المشكلة: قراءة المسألة قراءة واعية لتحديد:

المعطيات مدى كفاية المعطيات لحل المشكلة.

المطلوب محاولة رسم شكل تخطيطي يساعد على فهم المشكلة.

٢ التخطيط للحل (تكوين المعادلة):

اختيار المجهول وترميزه.

استخدام الترميز في تنظيم المعلومات المعطاة.

تكوين المعادلة في ضوء البيانات والعلاقات المعطاة.

٣ حل المعادلة.

٤ التحقق من صحة الحل.

هل نقبل الجذرين أو أحدهما فقط؟

هل يتوافق الجذران مع المعطيات؟

وفيما يلي بعض الأمثلة:

مثال ١

مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه، ولو زيد كل من بعديه بمقدار ٤سم لأصبحت مساحة منطقته ١٧١سم^{٢}. كما في شكل (٣ - ٢) أوجد بعدي المستطيل.

الحل

١ تحليل المشكلة:

طول المستطيل = ٣ أمثال عرضه.

الطول بعد الزيادة = الطول الأصلي + ٤سم.

والعرض بعد الزيادة = العرض الأصلي + ٤سم.

المساحة الجديدة = ١٧١سم^{٢}

(الطول الأصلي + ٤) (العرض الأصلي + ٤) = ١٧١سم^{٢}

مطلوب: الطول الأصلي والعرض الأصلي.

٢ تكوين المعادلة:

نرمز للعرض الأصلي بالرمز س مثلاً

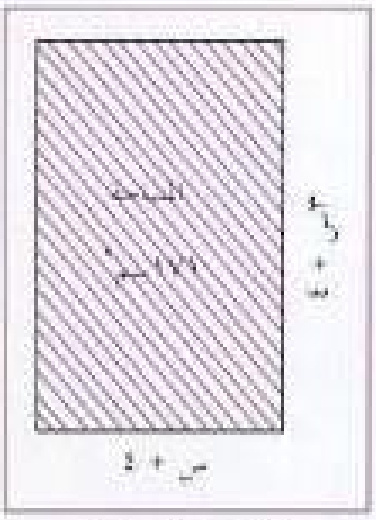
∴ الطول الأصلي: ٣س

والطول الجديد = ٣س + ٤

والعرض الجديد = س + ٤

والمساحة الجديدة = (٣س+٤) (س+٤)

∴ (٣س+٤) (س+٤) = ١٧١



شكل (٣ - ٢)

٣ حل المعادلة: (٣س+٤) (س+٤) = ١٧١

∴ ٣س² + ١٦س + ١٦ − ١٧١ = ٠

∴ ٣س² + ١٦س − ١٥٥ = ٠

∴ (٣س+٣١) (س−٥) = ٠

∴ س = − $\frac{٣١}{٣}$ أو س = ٥

٤ التحقق من صحة الحل:

س = − $\frac{٣١}{٣}$ مرفوض لأن العرض لا يمكن أن يكون سالبًا.

∴ س = ٥

∴ عرض المستطيل = ٥ سم

∴ طول المستطيل = ٣ × ٥ = ١٥سم

المساحة = (٣س + ٤) (س + ٤) = (٣ × ٥ + ٤) (٥ + ٤)

= ١٩ × ٩ = ١٧١سم² = المساحة المعطاة في المسألة. ■

تدريب (١):

في المثال السابق، إذا فرضنا أن الطول الأصلي = س

فإن العرض = ...

والمساحة الجديدة = ( )( )

والمعادلة في هذه الحالة هي:

حل المعادلة الناتجة وعيّن الطول والعرض.

مثال (٢)

استأجر مجموعة من الأشخاص سيارة بمبلغ ٤٠٠ دينار للسفر إلى المملكة العربية السعودية لأداء فريضة الحج على أن يقسم هذا المبلغ عليهم بالتساوي. وقد وجد أنه لو انضم إليهم ٥ أشخاص آخرين فإن المبلغ الذي يدفعه كل منهم ينقص بمقدار ٤ دنانير. فما عدد الأشخاص؟

الحل

نفرض أن عدد الأشخاص في البداية س

فيكون عددهم بعد الزيادة س + ٥

ويكون المبلغ الذي يخص كل شخص في البداية $\frac{٤٠٠}{س}$ دينارًا

والمبلغ الذي يخص كل شخص بعد الزيادة $\frac{٤٠٠}{س + ٥}$ دينارًا

فيكون $\frac{٤٠٠}{س + ٥} = \frac{٤٠٠}{س} - ٤$

$\therefore \frac{١٠٠}{س + ٥} = \frac{١٠٠}{س} - ١$ (لماذا؟)

$\therefore \frac{١٠٠}{س + ٥} = \frac{١٠٠ - س}{س}$

$\therefore$ ١٠٠س = (س + ٥) (١٠٠ − س)

$\therefore$ ١٠٠س = ١٠٠س − $س^٢$ + ٥٠٠ − ٥س

$\therefore$ $س^٢$ + ٥س − ٥٠٠ = ٠

$\therefore$ (س + ٢٥) (س − ٢٠) = ٠

$\therefore$ س = −٢٥ وهذا مرفوض (لماذا؟) أو س = ٢٠

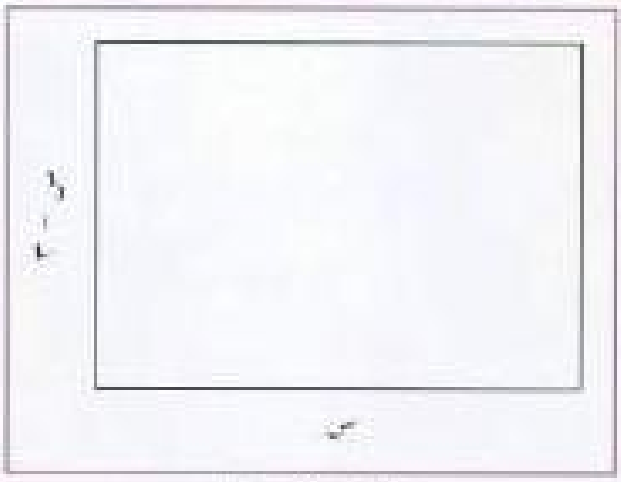
وللتحقق: عدد الأشخاص = ٢٠ يخص كل منهم = $\frac{٤٠٠}{٢٠}$ = ٢٠ دينارًا

عدد الأشخاص بعد الزيادة = ٢٥ يخص كل منهم = $\frac{٤٠٠}{٢٥}$ = ١٦ دينارًا

، ١٦ = ٢٠ − ٤

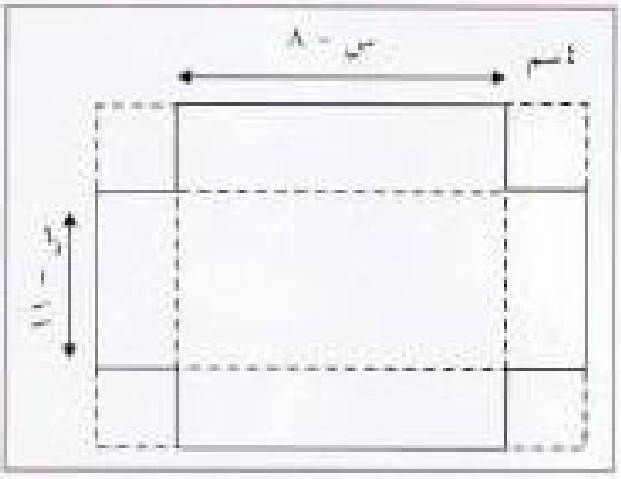
مثال ٣

قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل كما في شكل (٣ - ٣) طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٣سم، استخدمت القطعة لصنع علبة مفتوحة وذلك بقطع مناطق مربعة متطابقة من كل زاوية من زوايا القطعة طول كل منها ٤سم ثم طويت الأطراف كما في شكل (٣ - ٤). إذا كان حجم العلبة الناتجة ٧٢٠سم^{٣} أوجد بعدي قطعة الورق.



شكل (٣ - ٣)

الحل



شكل (٣ - ٤)

نفرض أن طول قطعة الورق س

∴ العرض س + ٣

ويكون طول العلبة س - ٨

وعرض العلبة س - ١١

وارتفاع العلبة ٤سم

∴ حجم العلبة = ٧٢٠سم^{٣}

∴ (س - ٨) (س - ١١) × ٤ = ٧٢٠

∴ (س - ٨) (س - ١١) = ١٨٠

∴ س^{٢} - ١٩س + ٨٨ - ١٨٠ = ٠

∴ س^{٢} - ١٩س - ٩٢ = ٠

∴ (س + ٤) (س - ٢٣) = ٠

∴ س = -٤ وهذا مرفوض أو س = ٢٣

∴ طول قطعة الورق = ٢٣سم

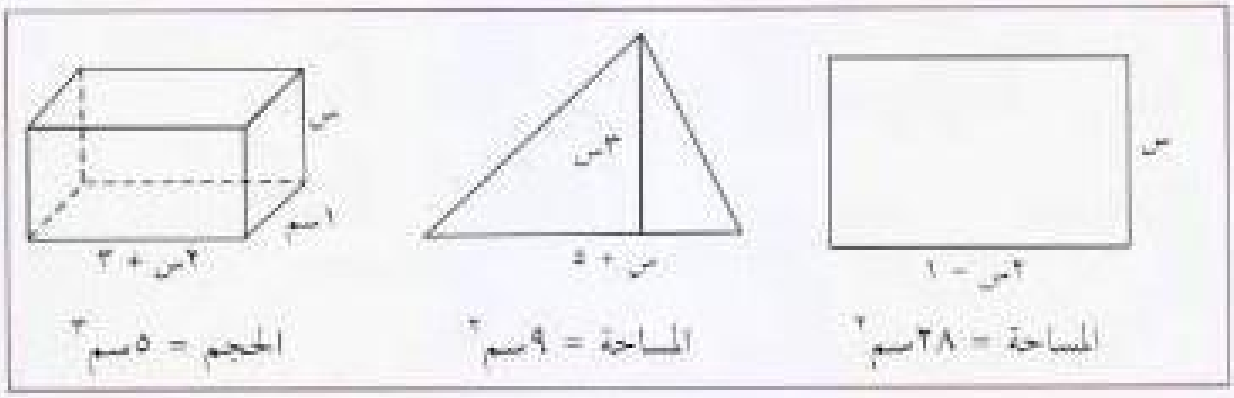
وعرض قطعة الورق = ٢٣ - ٣ = ٢٠سم

تحقق من صحة الحل.

٣ - ٣

تمارين

١ أوجد قيمة س في كل مما يلي:



٢ قال جاسم: أنا أفكر في عدد إذا ربعته ثم أضفت عليه ثلاثة أمثاله أصبح الناتج ٨٨. فما العدد؟

٣ مثلث قاعدته تزيد عن ارتفاعه بمقدار ٤سم. أوجد ارتفاع المثلث إذا كانت مساحة منطقته ٤٨سم٢.

٤ إذا كان طول ضلع مربع يزيد عن طول ضلع مربع آخر بمقدار ٨سم وكان مجموع مساحتيهما ١٣٠سم٢. فأوجد طول ضلع المربع الأكبر.

٥ عددان الفرق بينهما ١١ إذا كان مجموعهما ينقص عن حاصل ضربهما بمقدار ٧٩ فما العددان؟

٦ إذا علمت أن مجموع ن من الأعداد الطبيعية ابتداء بالواحد يعطى بالقانون $\frac{١}{٢}$ ن (ن+١) فأوجد:

١ ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ١٧

٢ قيمة ن إذا كان: ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ... + ن = ١٠٥

٧ مستطيل مساحة منطقته ٢١٠سم٢. إذا كان طوله يزيد عن ٤ أمثال عرضه بمقدار ٢سم فأوجد بعديه.

٨ إذا كان محيط مستطيل هو ٢٨سم. وكان طول قطره ١٠سم. فأوجد بعديه.

٩ سلك طوله ٦٠سم شكل لصنع مربعين منفصلين طول ضلع أحدهما بالسنتيمتر = س فما طول ضلع المربع الآخر؟ وإذا كان مجموع مساحتي المنطقتين المربعتين الناتجتين ١١٣سم^{٢} فبين أن:

س^{٢} - ١٥س + ٥٦ = ٠

ومن ثم أوجد طول ضلع كل مربع.

١٠ أوجد بعدي قطعة مستطيلة من الألومونيوم تحتاجها لصنع صندوق مفتوح عن طريق قطع مناطق مربعة متطابقة من كل زاوية من زوايا القطعة، طول ضلع كل منها ٣سم، ثم طويت الأطراف. إذا كان طول القطعة يزيد عن عرضها بمقدار ٥سم وكان حجم الصندوق ٩٠٠سم^{٣}.

١١ سجادة مستطيلة الشكل مفروشة في وسط غرفة أرضيتها مستطيلة متروك من كل جانب س سم. إذا كانت أبعاد السجادة ٢م، ٤م وكانت مساحة الغرفة ١٥م^{٢} فأوجد بعدي أرضية الغرفة.

١٢ قطعة من الخشب طولها ٥١سم قطعت إلى شرائح صغيرة طول كل منها س سم، وقطعة أخرى مساوية لها في الطول قطعت إلى شرائح أيضًا يزيد طول كل منها عن طول الشريحة من النوع الأول بمقدار ١,٣ سم. اكتب تعبيرًا لعدد الشرائح في كل قطعة. وإذا كان هناك ١٣ شريحة زيادة في القطعة الأولى عنها في القطعة الثانية فأوجد قيمة س.

١٣ خطط مجموعة من الطلاب للقيام برحلة تكاليفها ٤٢ دينارًا على أن يدفعوا مبالغ متساوية وإذا اعتذر ٧ طلاب عن القيام بالرحلة أصبح على كل من الآخرين أن يدفع $\frac{١}{٢}$ دينار زيادة فكم طالبًا ذهب إلى الرحلة؟

٣ - ٤

العلاقة بين معاملات المعادلة التربيعية وبين مجموع وناتج ضرب الجذرين

The relation between quadratic coefficient & summation and result of product two roots

تعلم أن جذري المعادلة:

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث أ، ب، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

هما: $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

وإذا فرضنا أن الجذرين هما ل، م حيث ك = $ب^٢ - ٤ أ جـ$ = المميز فإن:

$$ل = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-ب + \sqrt{ك}}{٢ أ}$$

$$، م = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-ب - \sqrt{ك}}{٢ أ}$$

$$\therefore ل + م = \frac{-ب + \sqrt{ك} - ب - \sqrt{ك}}{٢ أ}$$

$$\therefore \boxed{ل + م = \frac{-ب}{أ}}$$

$$، ل \times م = \frac{(-ب + \sqrt{ك})(-ب - \sqrt{ك})}{٤ أ^٢}$$

$$= \frac{ب^٢ - ك}{٤ أ^٢} = \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤ أ جـ)}{٤ أ^٢}$$

$$= \frac{٤ أ جـ}{٤ أ^٢}$$

$$\therefore \boxed{ل \times م = \frac{جـ}{أ}}$$

مثال ١ أوجد مجموع جذري المعادلة التالية وحاصل ضربهما: ٦س^{٢} + ٢س − ١ = ٠

الحل

مجموع الجذرين = − $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-٢}{٦}$ = − $\frac{١}{٣}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = − $\frac{١}{٦}$

تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

بالرجوع إلى المعادلة:

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

∴ س^{٢} + $\frac{ب}{أ}$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

∴ س^{٢} − $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ س + $\frac{جـ}{أ}$ = ٠

∴ س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

وعليه نستطيع تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذراها.

مثال ٢ كوّن معادلة جذراها $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٤}$

الحل

مجموع الجذرين = $\frac{١}{٢}$ + $\left(-\frac{٣}{٤}\right)$ = − $\frac{١}{٤}$ ،

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{٢}$ × $\left(-\frac{٣}{٤}\right)$ = − $\frac{٣}{٨}$

∴ س^{٢} − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ س^{٢} − $\left(-\frac{١}{٤}\right)$ س + $\left(-\frac{٣}{٨}\right)$ = ٠

∴ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{٣}{٨}$ = ٠

∴ ٨س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠

مثال ٣

حل المعادلة $س^٢ + ١٠س + ٢٥ = ٤٣$ ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

$\because$ $س^٢ + ١٠س + ٢٥ = ٤٣$

$\therefore$ $س^٢ + ١٠س - ١٨ = ٠$

$\because$ $س = \frac{-١٠ \pm \sqrt{١٠٠ + ٤ \times ١٨}}{٢}$

$\therefore$ $س = \frac{-١٠ \pm \sqrt{١٠٠ + ٧٢}}{٢} = \frac{-١٠ \pm \sqrt{١٧٢}}{٢}$

$= \frac{-١٠ \pm \sqrt{٤ \times ٤٣}}{٢} = \frac{-١٠ \pm ٢\sqrt{٤٣}}{٢} = -٥ \pm \sqrt{٤٣}$

التحقق:

مجموع الجذرين $= -٥ + \sqrt{٤٣} - ٥ - \sqrt{٤٣}$

$= -١٠ = \frac{-١٠}{١} = \frac{-ب}{أ}$

حاصل ضرب الجذرين $= (-٥ + \sqrt{٤٣})(-٥ - \sqrt{٤٣})$

$= ٢٥ - ٤٣ = -١٨ = -\frac{١٨}{١} = \frac{جـ}{أ}$

مثال ٤

كون معادلة تربيعية أحد جذريها هو مجموع جذري المعادلة $٢س^٢ - ١٣س + ٦ = ٠$ وجذرها الآخر هو حاصل ضربهما.

الحل

مجموع جذري المعادلة المعطاة $= \frac{-(-١٣)}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

حاصل ضرب جذري المعادلة المعطاة $= \frac{٦}{٢} = ٣$

$\therefore$ جذرا المعادلة المطلوب تكوينها هما $\frac{١٣}{٢}$ ، ٣

∴ المعادلة المطلوب تكوينها هي:

$$\text{س}^{٢} - \left(\frac{١٣}{٢} + ٣\right) \text{س} + \frac{١٣}{٢} \times ٣ = ٠$$

$$\therefore \text{س}^{٢} - \frac{١٩}{٢} \text{س} + \frac{٣٩}{٢} = ٠$$

$$\therefore ٢\text{س}^{٢} - ١٩\text{س} + ٣٩ = ٠$$

مثال (٥)

إذا علم أن جذري المعادلة $٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣ = ٠$ هما ل ، م فأوجد دون حل المعادلة:

أ $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢}$ **ب** $\text{ل} - \text{م}$

الحل

ل ، م هما جذرا المعادلة $٨\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} - ٣ = ٠$

$$\therefore \text{ل} + \text{م} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤} \text{ ، } \text{ل} \times \text{م} = -\frac{٣}{٨}$$

أ $(\text{ل} + \text{م})^{٢} = \text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} + ٢\,\text{ل}\,\text{م}$

$$\therefore \text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} = (\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\,\text{ل}\,\text{م}$$

$$= \left(\frac{٥}{٤}\right)^{٢} - ٢ \times \left(-\frac{٣}{٨}\right)$$

$$= \frac{٣٧}{١٦}$$

ب $(\text{ل} - \text{م})^{٢} = \text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} - ٢\,\text{ل}\,\text{م}$

$$= \frac{٣٧}{١٦} - ٢ \times \left(-\frac{٣}{٨}\right)$$

$$= \frac{٣٧}{١٦} + \frac{٦}{٨} = \frac{٤٩}{١٦}$$

$$\therefore \text{ل} - \text{م} = \pm \frac{٧}{٤}$$

٣ - ٤ تمارين

• أسئلة مقالية

١ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل معادلة مما يلي:

أ) $س^٢ + ٣س - ٤ = ٠$

ب) $٢س^٢ + س - ٥ = ٠$

جـ) $٥س^٢ - س - ١ = ٠$

د) $س - س^٢ = ٥$

هـ) $س^٢ + ٣س = ٠$

و) $(٢س + ١)^٢ = س$

٢ إذا كان $س^٢ + ب س + جـ = ٠$ فأوجد قيمة كل من ب، جـ إذا كانت مجموعة حل المعادلة هي:

أ) $\{٣ ، ٤\}$

ب) $\{-٢ ، ٣\}$

جـ) $\{٢ ، -٣\}$

د) $\{-٢ ، -٥\}$

هـ) $\{-١ ، -\frac{١}{٢}\}$

و) $\{٠ ، ٥\}$

ز) $\{٣ ، -٣\}$

ح) $\{٤\}$

٣ أوجد:

أ) المعادلة التربيعية التي جذراها ٢ ، -٢

ب) المعادلة التربيعية التي مجموعة حلها $\{٥ ، ٠\}$

جـ) المعادلة التربيعية التي مجموعة حلها $\{٦\}$

د) إذا كان $٢ + \sqrt{٣}$ أحد جذري المعادلة $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$ فأوجد الجذر الآخر.

٤ أوجد المعادلة التي جذرا كل منها هما:

أ) ل = ٢ ، م = -٤

ب) ل = $\frac{٣}{٢}$ ، م = $\frac{١}{٤}$

جـ) ل = ٠ ، م = ٧

هـ ل = ٤ ، م = −٤

و ل = $\sqrt{٦}$ ، م = −$\sqrt{٦}$

ز ل = ٥ ، م = ٥

ح ل = ٣ + $\sqrt{٣}$ ، م = ٣ − $\sqrt{٣}$

ط ل = $\frac{٥ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$ ، م = $\frac{٥ - ٢\sqrt{٣}}{٢}$

ي ل = $\frac{١}{٢}$ + $\sqrt{٧}$ ، م = $\frac{١}{٢}$ − $\sqrt{٧}$

٥ أوجد المعادلة التربيعية التي أحد جذريها هو مجموع جذري المعادلة ٢س^{٢} − ٧س + ٣ = ٠، والجذر الآخر هو حاصل ضربهما.

٦ إذا كان ل، م جذري المعادلة ٢س^{٢} − ٥س − ٩ = ٠
فأوجد المعادلة التي جذراها ٢ل، ٢م

٧ إذا كان ل، م جذري المعادلة س^{٢} − س − ٤ = ٠ فأوجد:

أ ل^{٢} م + ل م^{٢}

ب $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$

جـ $\frac{١}{ل^{٢}}$ + $\frac{١}{م^{٢}}$

٨ أوجد قيمة ك بحيث يكون جذرا المعادلة: س^{٢} − ٣س + ك = ٠

أ متساويين.

ب الفرق بينهما ٢.

٩ إذا كان أحد جذري المعادلة: ك م^{٢} + ١٠م = ٨ هو −٤ فأوجد قيمة ك وقيمة الجذر الآخر.

بنود موضوعية

اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي، مع تعليل الخطأ في الإجابتين الأخريين.

١ إذا كان أحد جذري المعادلة $٧س^{٢} - ١٥س + ٢ = ٠$ هو ٢ فإن الجذر الآخر هو:

أ ١٣

ب $\frac{١}{٧}$

جـ $\frac{١}{١٤}$

٢ المعادلة التربيعية التي جذراها -٤، $١\frac{١}{٤}$ هي:

أ $س^{٢} - \frac{٢٣}{٤}س - ٥ = ٠$

ب $س^{٢} + ١١س - ٢٠ = ٠$

جـ $٤س^{٢} + ١١س - ٢٠ = ٠$

٣ - ٥

حل المعادلة التربيعية بيانيًا

The Graphic Solution of Quadratic Equation

لحل المعادلة التربيعية: **To Solve Quadratic Equation**

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

نحتاج كما سنرى فيما بعد إلى تمثيل التطبيق التالي بيانيًا:

ص = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

سنبدأ بالحالة البسيطة: ص = س^{٢}

مثال ١

مثل بيانيًا التطبيق: ص = س^{٢} حيث -٣ ≤ س ≤ ٣

الحل

مجال التطبيق هو مجموعة قيم س الحقيقية حيث -٣ ≤ س ≤ ٣ لذا نختار قيمًا للمتغير س في هذا المجال ونعين صورها (قيم ص المناظرة) وذلك بالتعويض في ص = س^{٢}:

عندما س = -٣ فإن ص = (-٣)^{٢} = ٩

∴ (-٣ ، ٩) ∈ بيان التطبيق

وعندما س = -٢ فإن ص = (-٢)^{٢} = ٤

∴ (-٢ ، ٤) ∈ بيان التطبيق وهكذا

ثم نسجل النتائج في جدول كالتالي:

س	-٣	-٢,٥	-٢	-١,٥	-١	-٠,٥	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥	٣
ص	٩	٦,٢٥	٤	٢,٢٥	١	٠,٢٥	٠	٠,٢٥	١	٢,٢٥	٤	٦,٢٥	٩

ثم نمثل الأزواج المرتبة (س ، ص) الواردة في الجدول بنقاط في المستوى الإحداثي ونصل بينها على التوالي بخط ممهد وبعناية لنحصل على المنحنى الذي يمثل هذا التطبيق. شكل (٣ - ٥)

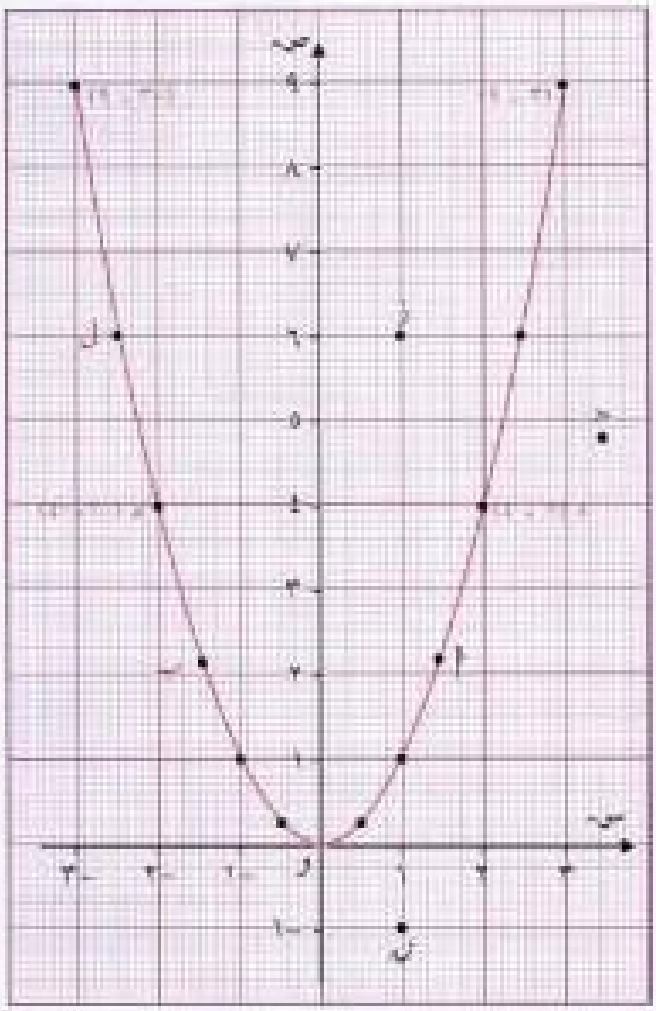
تدريب (١):

في شكل (٣ - ٥): اقرأ إحداثيي كل من النقاط: أ، ب، جـ، د، هـ، ل، ز، ن

- أي النقاط السابقة تنتمي إلى بيان التطبيق ص = س^{٢} وأيها لا تنتمي إليه؟
- أي النقاط السابقة تنتمي إلى مجموعة حل المعادلة: ص = س^{٢} .

تأمل التمثيل البياني للتطبيق ص = س^{٢} . شكل (٣ - ٥) ولاحظ أن:

- لا توجد قيم سالبة للمتغير ص.
- أصغر قيمة لـ ص هي ص = ٠ وذلك عندما س = ٠
- النقطة (٠ ، ٠) هي رأس المنحنى الذي يمثل التطبيق ص = س^{٢} «النقطة (س، ص) حيث ص أصغر ما يمكن هي رأس المنحنى».
- المنحنى الذي يمثل التطبيق ص = س^{٢} مفتوح لأعلى.
- محور السينات يمس المنحنى عند رأس المنحنى.
- المنحنى متناظر حول المحور الصادي.
- كل قيمة لـ ص تقابلها قيمتان لـ س.



شكل (٣ - ٥)

مثال ٢ مثل بيانيًا التطبيق ص = س^{٢} + ٤ حيث -٤ ≤ س ≤ ٤

الحل نكوّن الجدول التالي:

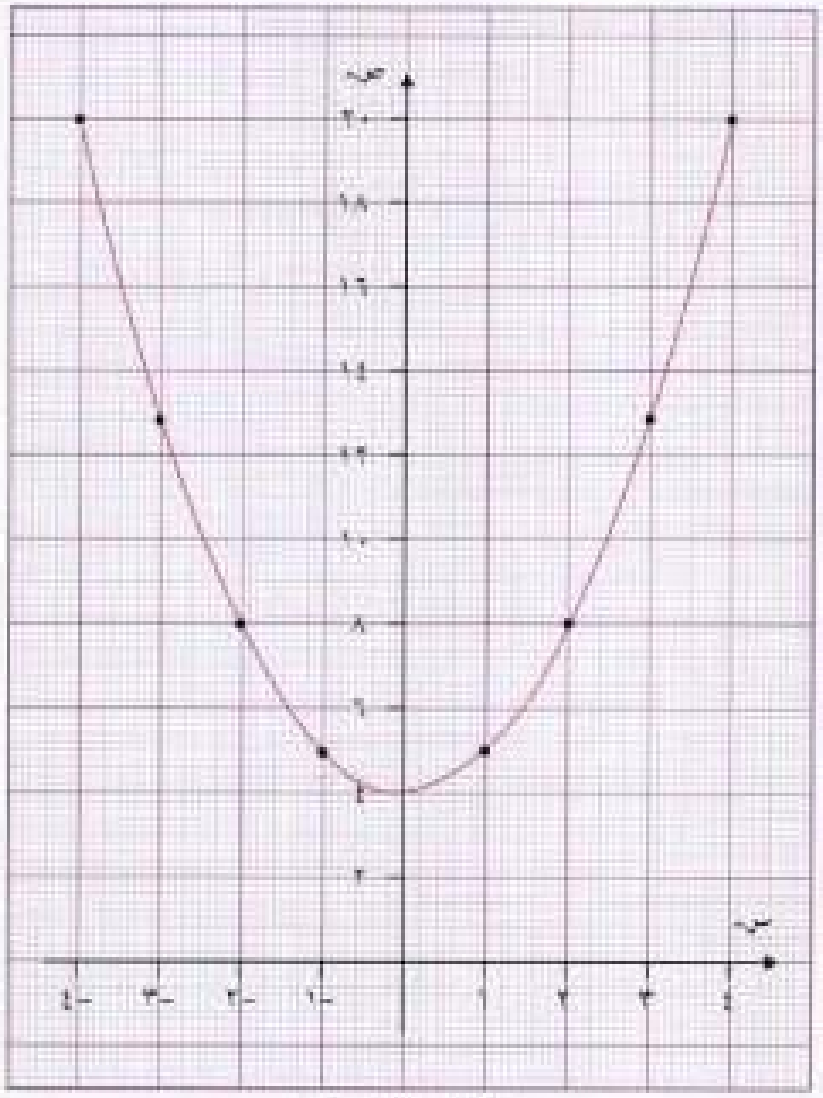
س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٢٠	١٣	٨	٥	٤	٥	٨	١٣	٢٠

ونمثل الأزواج المرتبة (س، ص) الواردة في الجدول بنقاط في المستوى الإحداثي ونصل بينها على التوالي بخط ممهد وبعناية كما في شكل (٣ - ٦).

تدريب (٢):

تأمل التمثيل البياني للتطبيق: ص = س^{٢} + ٤

وأجب عن الأسئلة التالية:



شكل (٣ - ٦)

أ ما قيمة ص عندما س = ٠,٥

وما قيمة ص عندما س = -٠,٥؟

ب هل توجد قيم سالبة لـ ص؟

جـ ما هي أصغر قيمة لـ ص؟

د أي النقاط رأس للمنحنى الذي يمثل التطبيق ص = س^{٢} + ٤؟

هـ ما اتجاه فتحة المنحنى؟

و هل يوجد محور تناظر للمنحنى؟ ما هو؟

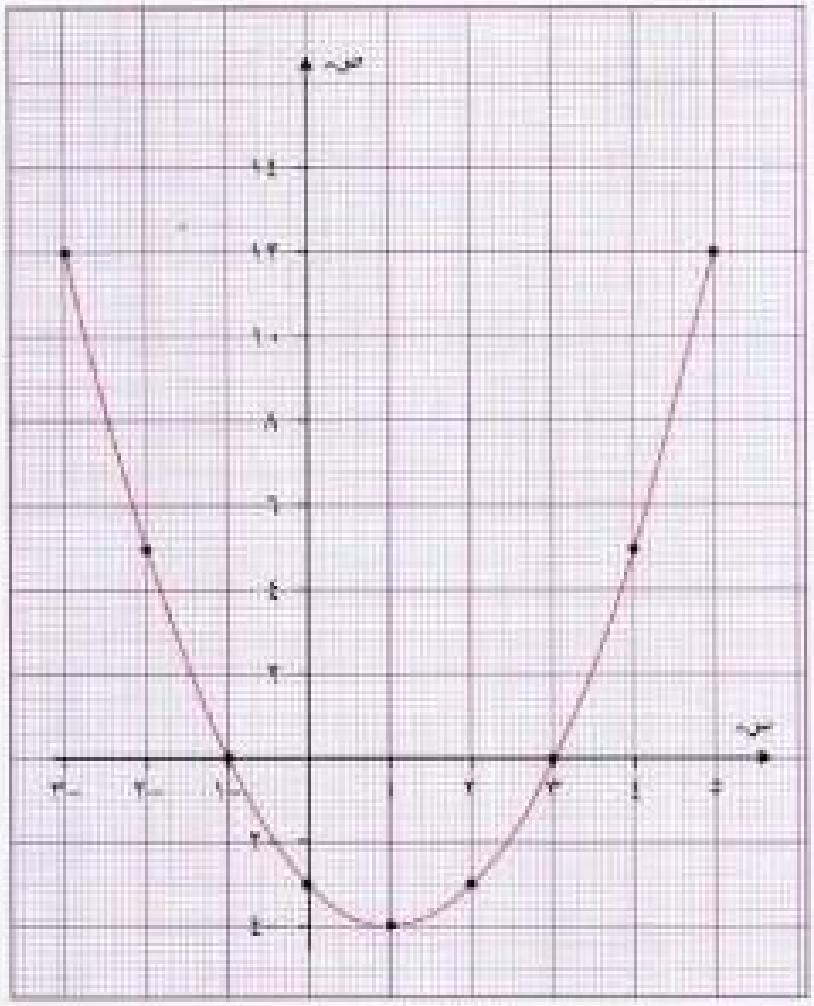
مثال (٣)

ارسم منحنى التطبيق ص = س^{٢} - ٢س - ٣، -٣ ≤ س ≤ ٥

الحل

نكون الجدول التالي، ثم نمثل الأزواج المرتبة بنقاط في المستوى الإحداثي ونصل بينها على التوالي بخط ممهد للحصول على المنحنى المطلوب:

س	س^{٢} - ٢س - ٣ = ص
-٣	٩ + ٦ - ٣ = ١٢
-٢	٤ + ٤ - ٣ = ٥
-١	١ + ٢ - ٣ = ٠
٠	٠ + ٠ - ٣ = -٣
١	١ - ٢ - ٣ = -٤
٢	٤ - ٤ - ٣ = -٣
٣	٩ - ٦ - ٣ = ٠
٤	١٦ - ٨ - ٣ = ٥
٥	٢٥-١٠-٣ = ١٢



شكل (٣ - ٧)

تدريب (٣):

تأمل منحنى التطبيق ص = س^{٢} - ٢س - ٣ ثم أكمل:

أ رأس المنحنى هو (،)

ب المنحنى مفتوح إلى .....

جـ يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين (،) ، (،)

د قيم س التي تجعل ص = ٠ هي .....

هـ المنحنى متناظر حول المستقيم: .....

مثال ٤

أ حل المعادلة $س^٢ + س - ١٢ = صفر$

ب ارسم منحنى التطبيق: $ص = س^٢ + س - ١٢$، $-٥ \leqslant س \leqslant ٤$ ثم عين نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني.

جـ ماذا تلاحظ؟

الحل

أ $\because$ $س^٢ + س - ١٢ = ٠$

$\therefore$ $(س - ٣)(س + ٤) = ٠$

$\therefore$ $س = ٣$ أو $س = -٤$

ب نرسم المنحنى بعد تكوين الجدول التالي:

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٨	٠	-٦	-١٠	-١٢	-١٢	-١٠	-٦	٠	٨

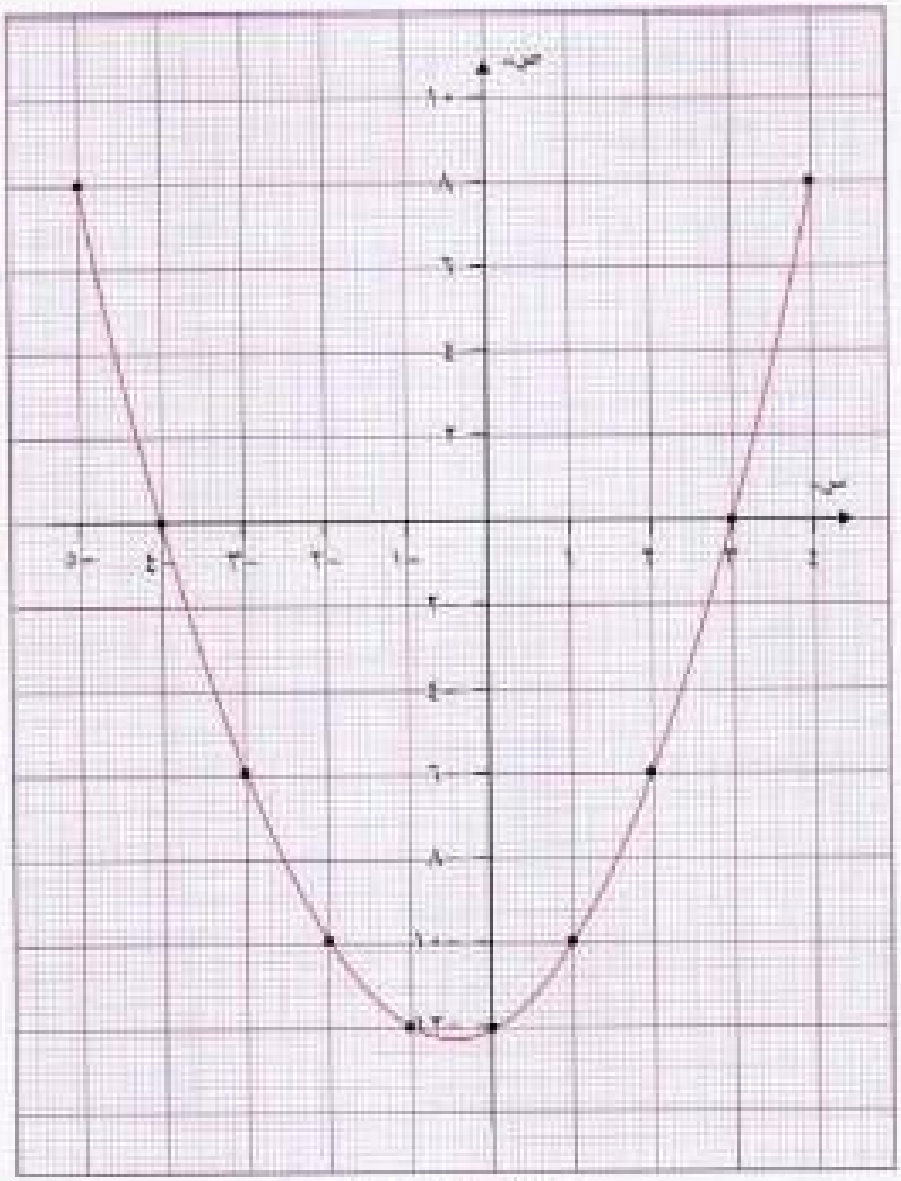
انظر شكل (٣ - ٨) واضح أن المنحنى يقطع المحور السيني في النقطتين (٣ ، ٠) ، (-٤ ، ٠).

جـ يلاحظ أن الإحداثيين السينيين لنقطتي تقاطع منحنى التطبيق:

$ص = س^٢ + س - ١٢$

هما جذرا المعادلة: $س^٢ + س - ١٢ = ٠$

وهذا بديهي حيث كل من $س = ٣$ ، $س = -٤$ تجعل $س^٢ + س - ١٢ = ٠$



شكل (٣ - ٨)

مع مراعاة أنه كلما كان الرسم دقيقًا كانت الجذور أكثر دقة.

وعمومًا:

إذا قطع منحنى التطبيق: ص = أس^{٢} + ب س + جـ محور السينات في النقطتين (س$_{١}$ ، ٠) ، (س$_{٢}$ ، ٠) فإن س$_{١}$ ، س$_{٢}$ هما جذرا المعادلة التربيعية: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

مثال (٥)

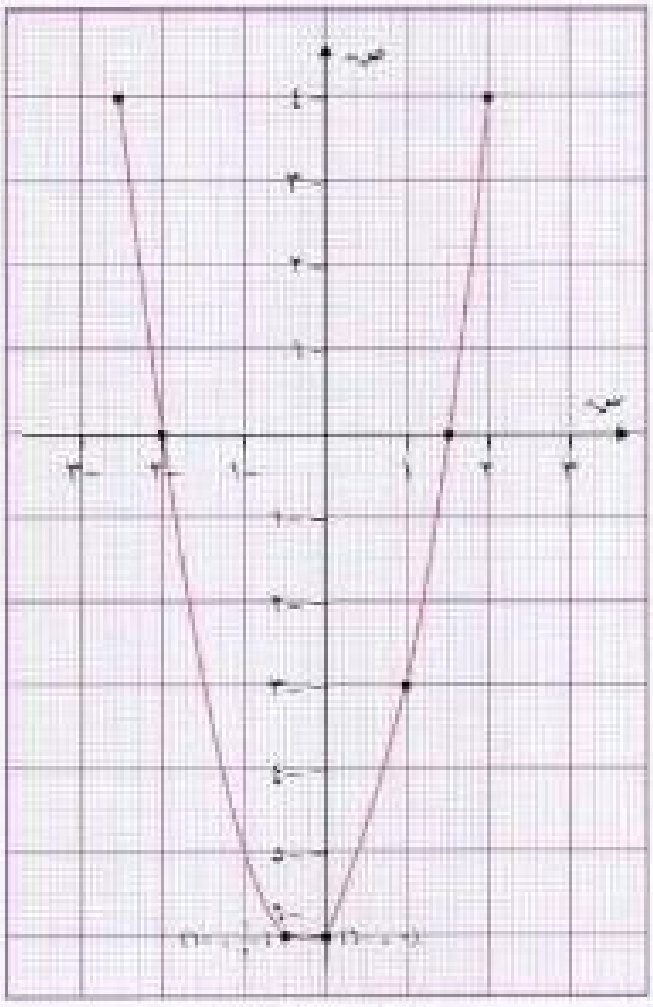
حل بيانيًا المعادلة التربيعية: $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$ ، $-٢,٥ \leqslant س \leqslant ٢$

الحل

نمثل التطبيق $ص = ٢س^٢ + س - ٦$

بيانيًا بالاستعانة بالجدول التالي:

س	-٢,٥	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٤	٠	-٥	-٦	-٣	٤



شكل (٣ - ٩)

فيقطع المنحنى المحور السيني في النقطتين (١,٥ ، ٠)، (-٢ ، ٠) انظر شكل (٣ - ٩)

∴ جذرا المعادلة:

$٢س^٢ + س - ٦ = ٠$

هما ١,٥ ، -٢

تدريب (٤):

حل المعادلة $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$ جبريًا وتحقق من صحة الحل.

الحل:

مثال ٦

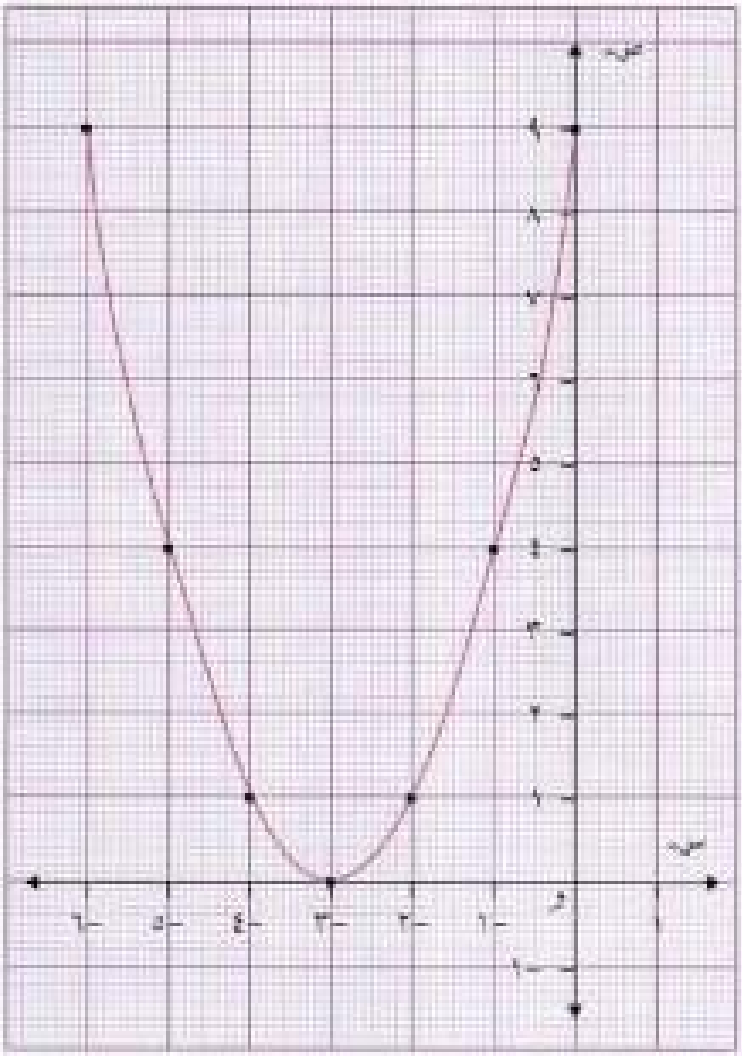
حل المعادلة التربيعية التالية بيانيًا، ثم تحقق من صحة الحل جبريًا:

$س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$ ، $-٦ \leqslant س \leqslant ٠$

الحل

نرسم منحنى التطبيق $ص = س^٢ + ٦س + ٩$ بالاستعانة بالجدول التالي:

س	-٦	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



شكل (٣ - ١٠)

انظر شكل (٣ - ١٠)

يلاحظ أن منحنى التطبيق يمس المحور السيني في النقطة (-٣ ، ٠)

∴ للمعادلة جذران متساويان هما -٣، -٣

التحقق:

∴ $س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$

∴ $(س + ٣)^٢ = ٠$

∴ $س + ٣ = ٠$

∴ $س = -٣$

ملاحظة:

قد لا يتقاطع منحنى التطبيق: $ص = أس^٢ + ب س + جـ$ مع المحور السيني، ويدل هذا على أن المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية.

مثال ٧

أوجد مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٥س + ٩ = ٠ بيانيًا وتحقق من صحة الحل جبريًا.
(اعتبر −١ ≤ س ≤ ٦)

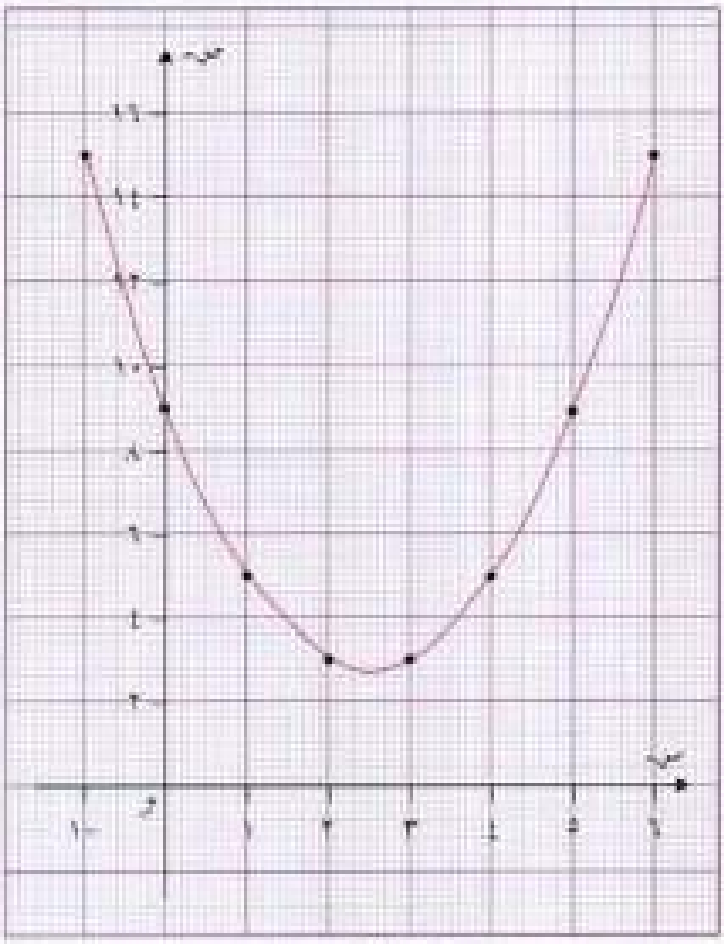
الحل

نرسم منحنى التطبيق

ص = س^{٢} − ٥س + ٩

بالاستعانة بالجدول التالي:

س	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	١٥	٩	٥	٣	٣	٥	٩	١٥



شكل (٣ − ١١)

شكل (٣ − ١١) يوضح منحنى التطبيق:

ص = س^{٢} − ٥س + ٩

ويلاحظ أن المنحنى لا يقطع المحور السيني، وهذا يعني عدم وجود جذور حقيقية للمعادلة المعطاة.

∴ مجموعة الحل هي ∅

التحقق:

∵ س^{٢} − ٥س + ٩ = ٠

المميز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= ٢٥ − ٤ × ٩

= −١١ عدد سالب

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

مثال ٨

أوجد مجموعة حل المعادلة $-س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$ بيانيًا وتحقق من صحة الحل جبريًا. (اعتبر $-١ \leqslant س \leqslant ٦$)

الحل

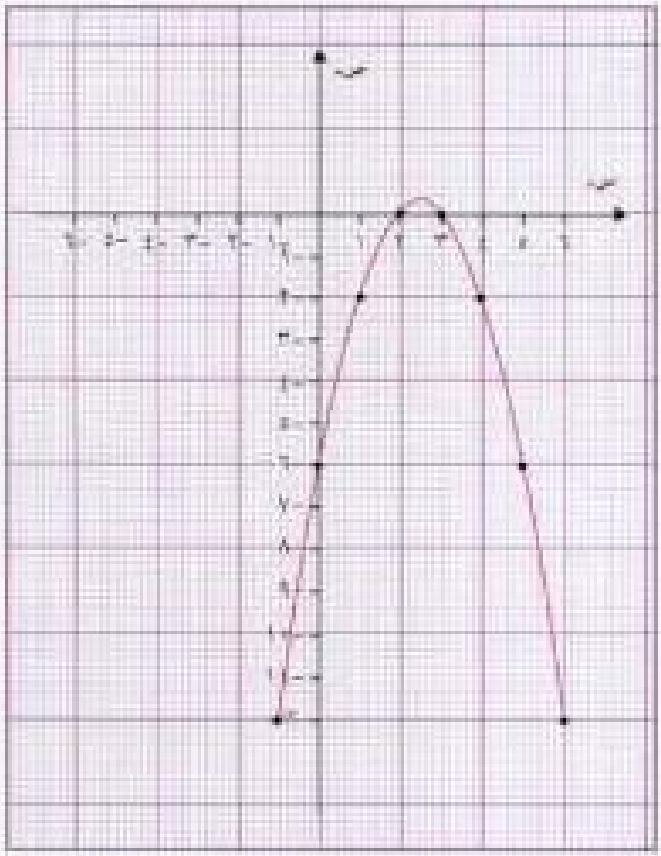
نرسم منحنى التطبيق

$ص = -س^٢ + ٥س - ٦$

بالاستعانة بالجدول التالي:

س	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص	-١٢	-٦	-٢	٠	٠	-٢	-٦	-١٢

فيقطع المنحنى المحور السيني في النقطتين (٢ ، ٠)، (٣ ، ٠)، انظر شكل (٣ - ١٢)



شكل (٣ - ١٢)

∴ جذرا المعادلة:

$-س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

هما: ٢، ٣

∴ مجموعة الحل هي {٢ ، ٣}

التحقق:

$-س^٢ + ٥س - ٦ = ٠$

$س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

(بالضرب في -١)

$(س-٢)(س-٣) = ٠$ (بالتحليل)

∴ $س = ٢$ أو $س = ٣$

ملاحظة:

يحدد مميز المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + حـ = ٠ عدد نقاط تقاطع منحنى التطبيق ص = أس^{٢} + ب س + حـ مع المحور السيني وذلك كالتالي:

أ إذا كان ب^{٢} − ٤ أ حـ > ٠ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين ويقطع منحنى التطبيق المحور السيني في نقطتين.

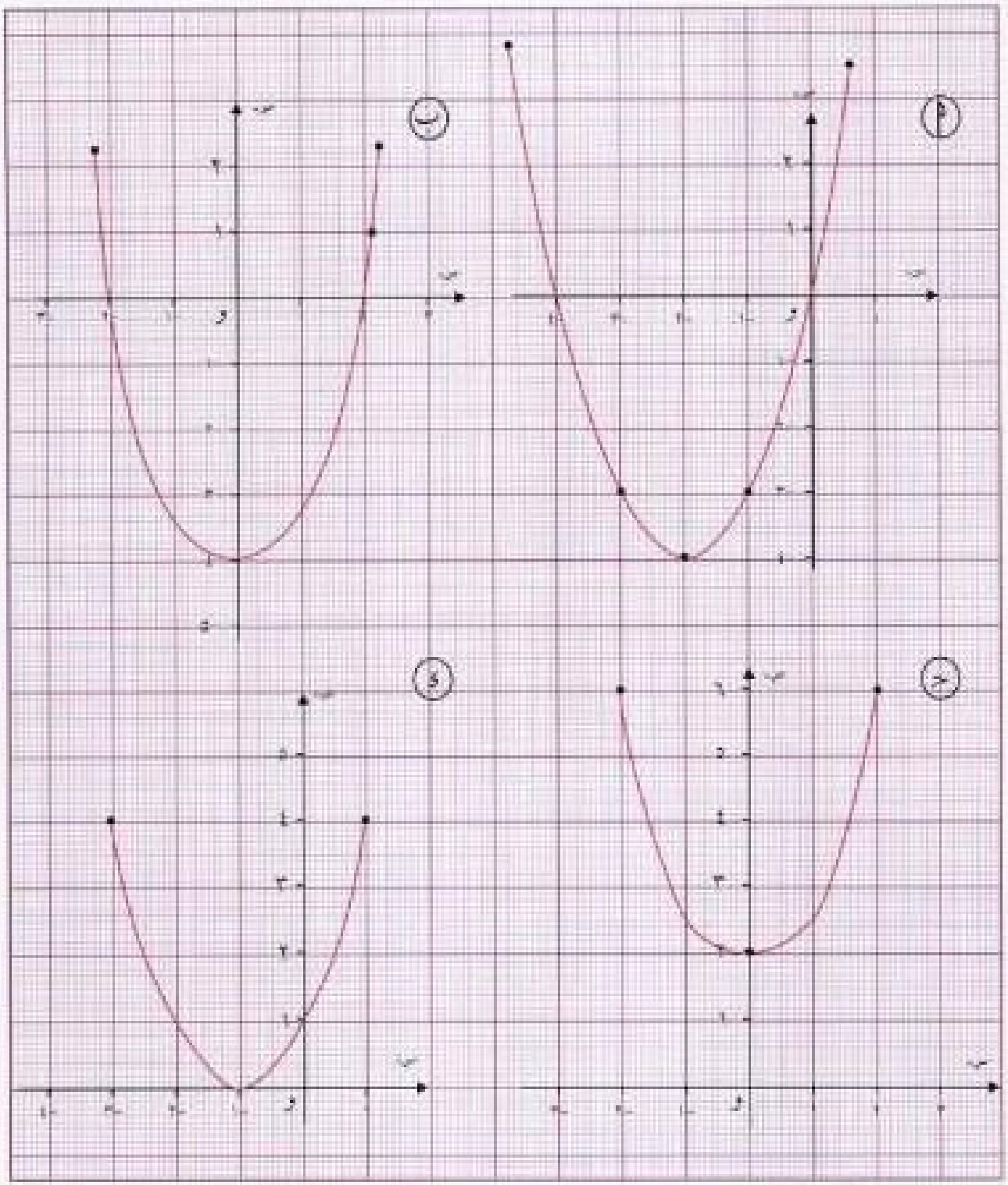
ب إذا كان ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين ويمس منحنى التطبيق المحور السيني.

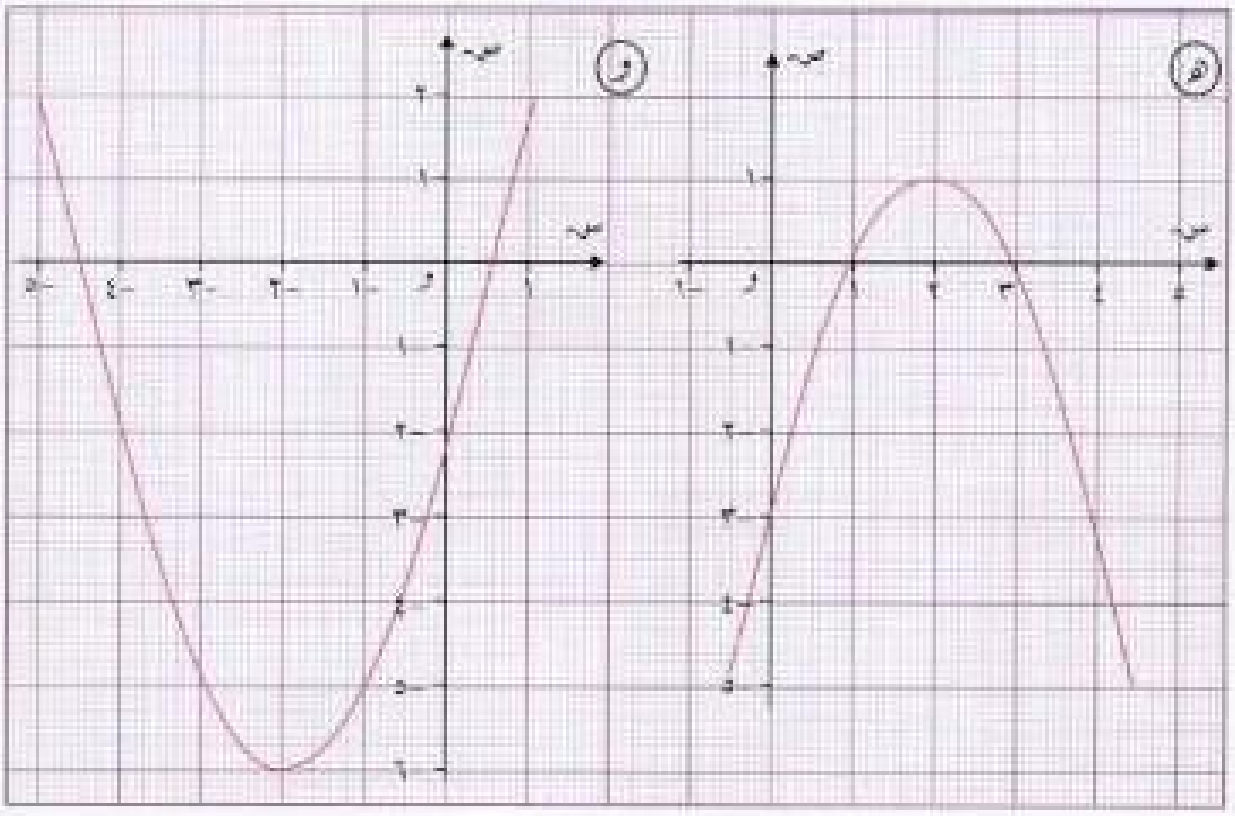
حـ إذا كان ب^{٢} − ٤ أ حـ < ٠ فإنه لا توجد جذور حقيقية للمعادلة، ولا يقطع منحنى التطبيق المحور السيني.

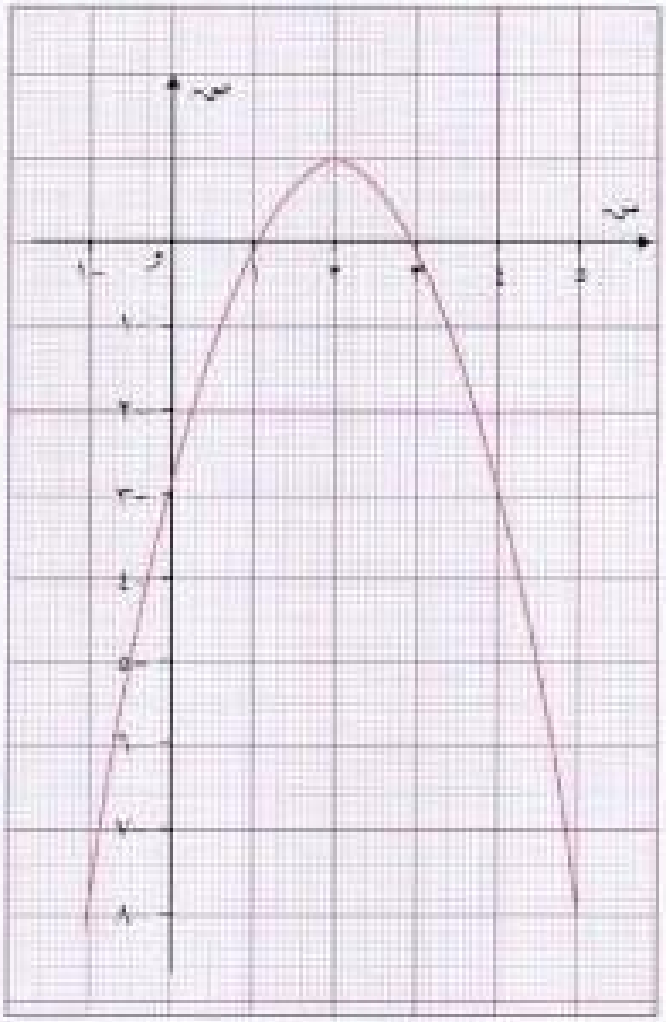
٣ - ٥

تمارين

١ اكتب مجموعة حل كل من المعادلات التربيعية المرافقة لكل تطبيق ممثل في كل من الأشكال التالية ثم كون المعادلة:







٢ الشكل المقابل يمثل منحنى التطبيق:

ص = −س^{٢} + ٤س − ٣

حيث −١ ≤ س ≤ ٥

عين جذري كل من المعادلتين:

−س^{٢} + ٤س − ٣ = ٠

، س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠

ثم تحقق جبريًا.

٣ أوجد قيمة ك التي تجعل منحنى التطبيق:

$$ص = س^{٢} - ١٦س + ك$$

يمس محور السينات.

٤ حل كلاً من المعادلات التالية بيانيًا:

أ	$س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$	$٠ \leqslant س \leqslant ٧$
ب	$س^{٢} - ٨س + ١٦ = ٠$	$-٢ \leqslant س \leqslant ٦$
جـ	$س^{٢} - ٤ = ٠$	$-٣ \leqslant س \leqslant ٣$
د	$س^{٢} + ٧ = ٠$	$-٣ \leqslant س \leqslant ٣$
هـ	$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$	$٠ \leqslant س \leqslant ٥$
و	$٣س^{٢} + ٥س - ١ = ٠$	$-٣ \leqslant س \leqslant ٢$
ز	$٢س^{٢} + ٣س - ١ = ٠$	$-٣ \leqslant س \leqslant ٢$
ح	$س^{٢} - س + ٣ = ٠$	$-٤ \leqslant س \leqslant ٢$

٣ - ٦ حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير

Solution of The Second Degree Inequality In Variable

تعلم أن المتباينة هي جملة مفتوحة تشتمل على الرمز > أو < أو ≤ أو ≥

والصورة العامة لمتباينة الدرجة الثانية في متغير واحد هي:

أس^{٢} + ب س + جـ > ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

حيث الرمز > يمكن أن يستبدل بأحد الرموز <، ≥، ≤ فمثلاً، كل من الجمل المفتوحة التالية متباينة من الدرجة الثانية في س:

س^{٢} − ٤س + ٣ < ٠

٣س^{٢} + ٢س + ١ > ٠

٢س^{٢} − س ≤ ١

٥س^{٢} ≥ ١

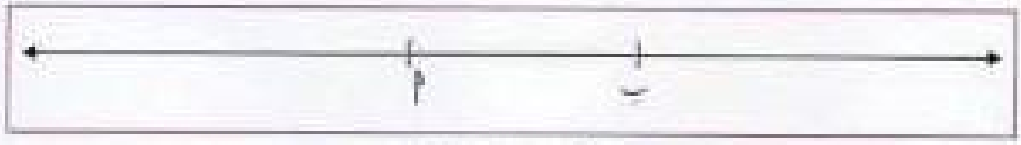
وقبل أن نعرض طرق حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد سنقدم فكرة موجزة عن الفترات الحقيقية.

٣ - ٦ أ الفترات الحقيقية — Real Intervals

ليكن أ ، ب ∈ ح ، أ < ب:

١ المجموعة س = {س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب} هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ، ب بالإضافة إلى العددين أ، ب

مثل هذه المجموعة تسمى فترة مغلقة ويرمز لها عادة بالرمز [أ ، ب]، وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ - ١٣).



شكل (٣ - ١٣)

فمثلاً {س : س ∈ ح ، ٥ ≤ س ≤ ١٢} = [٥ ، ١٢]

٢ المجموعة س = {س : س ∈ ح ، أ < س < ب} هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ ، ب

مثل هذه المجموعة تسمى فترة مفتوحة، ويرمز لها عادة بالرمز (أ ، ب)، وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ - ١٤).

شكل (٣ - ١٤)

فمثلاً، {س : س ∈ ح ، -٢ < س < ٤} = (-٢ ، ٤)

لاحظ أن: أ ، ب ∈ [أ ، ب]

ولكن أ ، ب ∉ (أ ، ب)

٣ المجموعة س = {س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب} هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ ، ب بالإضافة إلى العدد ب.

مثل هذه المجموعة تسمى فترة نصف مغلقة أو فترة نصف مفتوحة، ويرمز لها عادة بالرمز (أ ، ب].

وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ - ١٥)

شكل (٣ - ١٥)

وكذلك المجموعة {س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب} هي مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين أ، ب بالإضافة إلى العدد أ، مثل هذه المجموعة تسمى فترة نصف مفتوحة (فترة نصف مغلقة)، ويرمز لها عادة بالرمز [أ ، ب) وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ - ١٦).

شكل (٣ - ١٦)

لاحظ أن: أ ∈ [أ ، ب) ، ب ∉ [أ ، ب)

ولكن: أ ∉ (أ ، ب] ، ب ∈ (أ ، ب]

وعمومًا في جميع الحالات الأربع، طول الفترة = طول $\overline{أب}$ ويساوي ب − أ

تدريب (١):

أكمل كلاً مما يلي حيث س ∈ ح

أ {س : −٥ ≤ س ≤ ٢} = [−٥ ، ٢] وطول الفترة =

ب {س : ١ < س ≤ ٤} = (،] وطول الفترة =

جـ {س : ٩ ≤ س < ١٢} = وطول الفترة =

د {س : −١ < س < ٣} = وطول الفترة =

هـ {س : −١ ≤ س < ٣} = وطول الفترة =

و {س : −١ < س ≤ ٣} = وطول الفترة =

وتوجد فترات أطوالها غير محدودة فمثلاً: {س : س ∈ ح ، س ≥ أ} مجموعة غير منتهية تتكون من جميع الأعداد الحقيقية التي هي أكبر من أو تساوي أ، ويرمز لها عادة بالرمز [أ ، ∞) حيث الرمز "∞" يقرأ ما لا نهاية، وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ − ١٧).

شكل (٣ − ١٧)

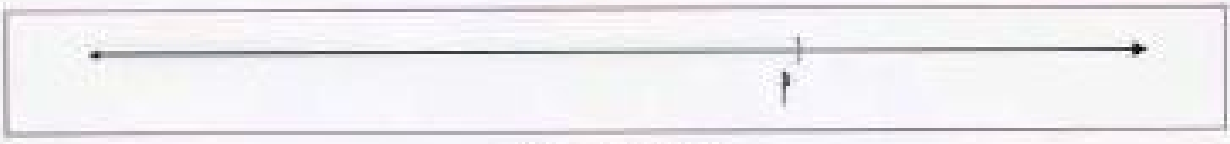
لاحظ أن أ ∈ [أ ، ∞)

، الفترة [أ ، ∞) تصف مغلقة

، طول الفترة [أ ، ∞) غير محدّد

بالمثل {س : س ∈ ح ، س ≤ أ} = (−∞ ، أ]

وتمثل على خط الأعداد كما في شكل (٣ − ١٨).



شكل (٣ – ١٨)

كذلك $\{س : س \in ح ، س > أ\} = (أ ، \infty)$

، $\{س : س \in ح ، س < أ\} = (-\infty ، أ)$

تدريب (٢):

أكمل ما يلي:

أ $\{ص : ص \geqslant -٣\} = [-٣ ، \quad)$

ب $\{أ : أ \geqslant -٣\} =$

جـ $\{س : س < ٩\} =$

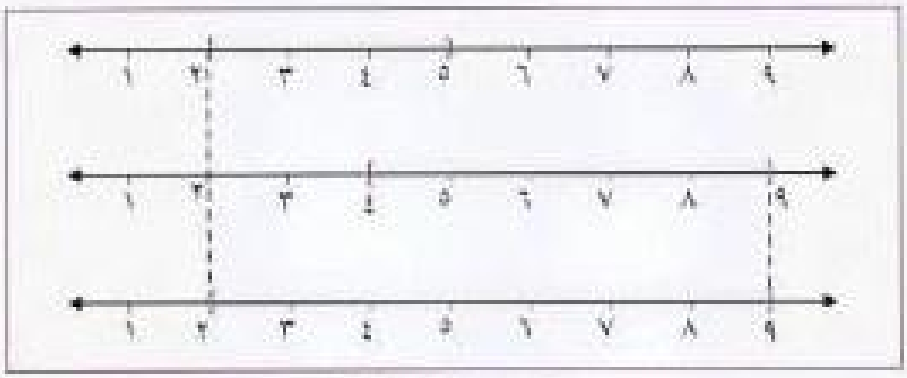
د $\{ب : ب > ٩\} =$

مثال (١)

مثل بيانيًا كلاً من الفترتين [٢ ، ٥)، [٤ ، ٩] ثم أوجد [٢ ، ٥) ∪ [٤ ، ٩]

الحل

التمثيل البياني كما في شكل (٣ – ١٩)



شكل (٣ – ١٩)

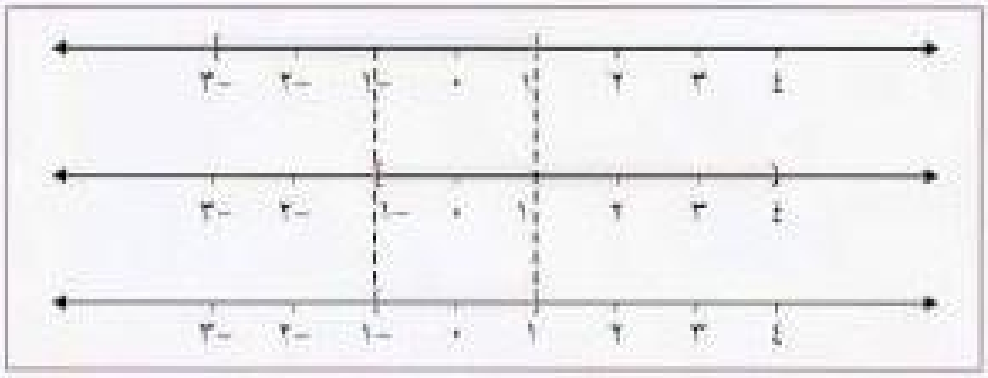
من الشكل [٢ ، ٥) ∪ [٤ ، ٩] = [٢ ، ٩]

مثال ٢

مثل كلاً من [-٣ ، ١]، [-١ ، ٤) ومن ثم أوجد [-٣ ، ١] ∩ [-١ ، ٤)

الحل

انظر شكل (٣ - ٢٠)



شكل (٣ - ٢٠)

[-٣ ، ١] ∩ [-١ ، ٤) = [-١ ، ١]

٣-٦ م

تمارين

١ عبّر عن المجموعات التالية بدلالة الفترات:

أ {س: -١ ≤ س < ٥}

ب {س: -١ < س ≤ ٥}

جـ {س: -١ < س < ٥}

د {س: -١ ≤ س ≤ ٥}

هـ {س: س > -٤}

و {س: س < -٤}

٢ عبّر عن الفترات التالية بدلالة المجموعات:

أ (٢ ، ٣)

ب [-٧ ، -٤]

جـ (-∞ ، ٧]

د (-∞ ، ٩)

هـ [٥ ، ∞)

و [-٣ ، ∞)

ز [-١ ، ٦]

ح (-١ ، ٦)

ط [-١ ، ٦)

ى (-١ ، ٦]

ك (-∞ ، ٤)

ل (-∞ ، ٤]

م (٤ ، ∞)

ن [٤ ، ∞)

٣ مثّل كلاً مما يلي على خط الأعداد:

أ {س: س > ٦}

ب {س: -٢ < س < ٤}

جـ [٣ ، ٥]

د (٣ ، ٥)

هـ [٥ ، ∞)

و (-∞ ، ٠)

٤ مثل كلاً مما يلي على خط الأعداد ثم أوجد الناتج:

أ $(-\infty ، ٣] \cup [-٢ ، ٥)$

ب $(-٢ ، ٤) \cap (-\infty ، ١)$

جـ $[-٤ ، ٥) \cup (٥ ، ٧)$

د $[-٢ ، ١] \cap [١ ، ٤]$

٣-٦ ب حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

Solution of The Second Degree Inequality in One Variable

سنوضح من خلال الأمثلة التالية طرق حل متباينة الدرجة الثانية.

مثال ٣ أوجد مجموعة حل المتباينة: $س^٢ - س - ٢ > ٠$

الحل

نحاول أولًا تحليل المقدار $س^٢ - س - ٢$

$س^٢ - س - ٢ = (س - ٢)(س + ١)$

الآن نبحث عن قيم س التي تجعل $(س - ٢)(س + ١) > ٠$

تعلم أن ناتج ضرب عددين يكون موجبًا إذا كان كل منهما موجبًا أو إذا كان كل منهما سالبًا.

∴ لكي يكون $(س - ٢)(س + ١) > ٠$

إما $س - ٢ > ٠$ و $س + ١ > ٠$ ..... (١)

أو $س - ٢ < ٠$ و $س + ١ < ٠$ ..... (٢)

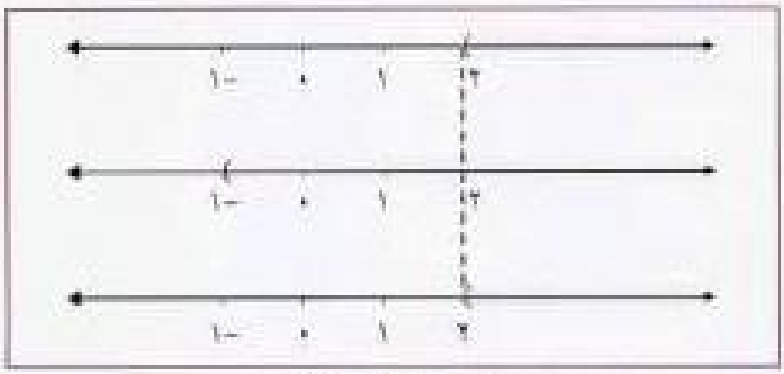
وتكون مجموعة حل المتباينة المعطاة هي اتحاد مجموعتي الحل في الحالتين (١) ، (٢).

الحالة الأولى:

إذا كان $س - ٢ > ٠$ و $س + ١ > ٠$

فإن $س > ٢$ و $س > -١$

ومجموعة الحل في هذه الحالة هي: $(٢ ، \infty) \cap (-١ ، \infty) = (٢ ، \infty)$



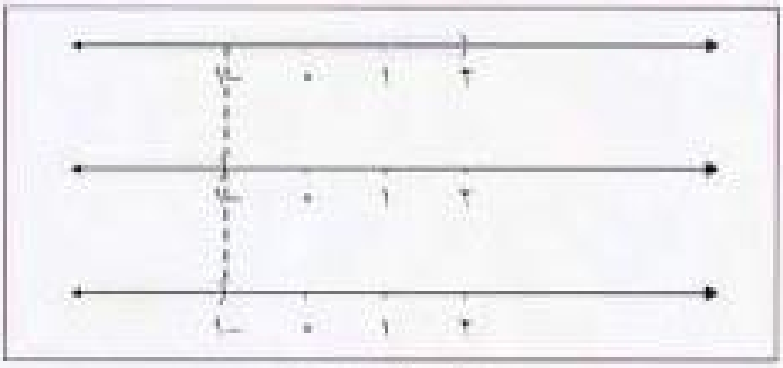
شكل (٣ - ٢١)

الحالة الثانية:

إذا كان $\quad$ س − ٢ < ٠ $\quad$ و $\quad$ س + ١ < ٠

فإن $\quad$ س < ٢ $\quad$ و $\quad$ س < −١

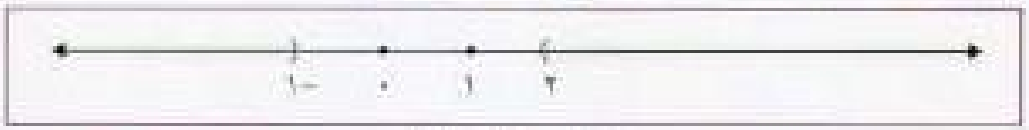
ومجموعة الحل في هذه الحالة هي: (−∞ ، ٢) ∩ (−∞ ، −١) = (−∞ ، −١)



شكل (٣ − ٢٢)

∴ مجموعة حل المتباينة المعطاة هي:

(٢ ، ∞) ∪ (−∞ ، −١) = ح − [−١ ، ٢]



شكل (٣ − ٢٣)

مثال ٤ أوجد مجموعة حل المتباينة: ٢س^{٢} + س − ٦ < ٠

الحل

٢س^{٢} + س − ٦ = (٢س − ٣) (س + ٢)

∴ (٢س − ٣) (س + ٢) < ٠

وحيث إن ناتج ضرب عددين يكون سالبًا إذا كانا مختلفين في الإشارة

∴ لكي يكون (٢س − ٣) (س + ٢) < ٠

إما $\quad$ ٢س − ٣ < ٠ $\quad$ و $\quad$ س + ٢ > ٠ ..... (١)

أو $\quad$ ٢س − ٣ > ٠ $\quad$ و $\quad$ س + ٢ < ٠ ..... (٢)

الحالة الأولى:

إذا كان $\quad$ ٢س − ٣ < ٠ $\quad$ و $\quad$ س + ٢ > ٠

فإن $\quad$ س < $\frac{٣}{٢}$ $\quad$ و $\quad$ س > −٢

∴ مجموعة الحل $(-\infty ، \frac{٣}{٢}) \cap (-٢ ، \infty) = (-٢ ، \frac{٣}{٢})$

الحالة الثانية:

إذا كان $\quad$ ٢س − ٣ > ٠ $\quad$ و $\quad$ س + ٢ < ٠

فإن $\quad$ س > $\frac{٣}{٢}$ $\quad$ و $\quad$ س < −٢

∴ مجموعة الحل = $(\frac{٣}{٢} ، \infty) \cap (-\infty ، -٢) = \phi$

وتكون مجموعة حل المتباينة المعطاة هي: $(-٢ ، \frac{٣}{٢})$ ■

مثال ٥ أوجد مجموعة حل المتباينة $س^٢ - ٦س + ٩ > ٠$

الحل

$س^٢ - ٦س + ٩ = (س - ٣)^٢$

∴ $(س - ٣)^٢ > ٠$

وواضح أن $(س - ٣)^٢ > ٠$ موجب دائمًا فيما عدا عندما س = ٣

∴ مجموعة الحل = ح − {٣} ■

تدريب (١):

اذكر مجموعة حل المتباينة $س^٢ - ٦س + ٩ \geq ٠$

مثال ٦ أوجد مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ٢س < -٤$

الحل

$س^٢ + ٢س < -٤$

∴ $س^٢ + ٢س + ٤ < ٠$

المقدار $س^٢ + ٢س + ٤$ غير قابل للتحليل

لاحظ أن $ب^٢ - ٤أجـ = ٤ - ١٦ = -١٢ < ٠$

ولكن $س^٢ + ٢س + ٤ = (س^٢ + ٢س + ١) + ٣$

$= (س + ١)^٢ + ٣$

$\therefore$ $(س + ١)^٢ + ٣ > ٠$ لكل $س \in ح$

$\therefore$ مجموعة حل المتباينة هي $\emptyset$ ■

تدريب (٢):

اذكر مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ٢س + ٤ > ٠$

٣-٦ ب

تمارين

أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

١ س (س + ٣) > ٠

٢ (س − ٢) (س + ٢) < ٠

٣ (٢س − ١) (س + ٤) ≥ ٠

٤ س^{٢} − ٥س > ٠

٥ ٢س^{٢} + ٣س − ٥ ≤ ٠

٦ ٣س^{٢} < ١١س + ٤

٧ س^{٢} > ٣س + ١٨

٨ س^{٢} + ١٥س + ٥٤ ≤ ٠

٩ س^{٢} > ٩

١٠ س^{٢} < ٠

١١ ٨ + ٢س − س^{٢} > ٠

١٢ −٣س^{٢} + ٢ > ٠

١٣ −س^{٢} + س − ٨ ≥ ٠

١٤ −س^{٢} + س − ٨ ≤ ٠

٣ - ٧ ملخص وتمارين عامة Summary and Exercises

- الصورة العامة للمعادلة التربيعية هي:

$أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث أ، ب، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

- عند حل المعادلة التربيعية يلزم تعرّف مجموعة التعويض، وإذا لم تذكر فتعتبر مجموعة الأعداد الحقيقية ح.
- للمعادلة التربيعية جذران.
- تتعدد الطرق الخاصة بحل المعادلة التربيعية لتشمل:

طريقة التحليل.

طريقة خواص الجذر التربيعي لعددين متساويين.

طريقة إكمال المربع

استخدام القانون

الطريقة البيانية

- قانون حل المعادلة التربيعية:

$أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث أ، ب، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

هو: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

- مميز المعادلة التربيعية هو: $ب^٢ - ٤ أ حـ$
- يعيّن مميز المعادلة التربيعية نوع جذريها:
  - إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ > ٠$ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين.
  - إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٠$ فإن للمعادلة جذرين حقيقيين متساويين هما $س = \frac{-ب}{٢ أ}$
  - إذا كان $ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠$ فلا يوجد للمعادلة جذور حقيقية (الجذران غير حقيقيين).
- إذا كان ل ، م جذري المعادلة:

$أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ حيث أ، ب، حـ $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

فإن: $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ ، $ل \times م = \frac{حـ}{أ}$

- المعادلة التربيعية التي جذراها ل ، م هي:

س^{٢} - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

- لتمثيل التطبيق: ص = أس^{٢} + ب س + حـ حيث أ، ب، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ ، ى ≤ س ≤ هـ

١ - نختار قيمًا للمتغير س في المجال المعطى ونعين قيم ص المناظرة وفق قاعدة الاقتران المعطاة.

٢ - نمثل الأزواج المرتبة التي حصلنا عليها (س ، ص) بنقاط في المستوى الإحداثي.

٣ - نصل بين هذه النقاط على التوالي بخط ممهد وبدقة.

- إذا قطع منحنى التطبيق ص = أ س^{٢} + ب س + حـ محور السينات في النقطتين (س$_{١}$ ، ٠)، (س$_{٢}$ ، ٠) فإن س$_{١}$ ، س$_{٢}$ هما جذرا المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + حـ = صفرًا.

- إذا كان ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠ فإن منحنى التطبيق:

ص = أس^{٢} + ب س + حـ يقطع محور السينات في نقطتين.

وإذا كان ب^{٢} - ٤ أ حـ = ٠ فإن منحنى التطبيق يمس محور السينات.

وإذا كان ب^{٢} - ٤ أ حـ < ٠ فإن منحنى التطبيق لا يقطع محور السينات.

- ليكن أ ، ب ∈ ح

{س: س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب} = [أ ، ب]

{س: س ∈ ح ، أ < س < ب} = (أ ، ب)

{س: س ∈ ح ، أ ≤ س < ب} = [أ ، ب)

{س: س ∈ ح ، أ < س ≤ ب} = (أ ، ب]

{س: س ∈ ح ، س ≥ أ} = [أ ، ∞)

{س: س ∈ ح ، س ≤ أ} = (-∞ ، أ]

{س: س ∈ ح ، س > أ} = (أ ، ∞)

{س: س ∈ ح ، س < أ} = (-∞ ، أ)

٣ - ٧ تمارين عامة

● بنود موضوعية

لكل بند مما يلي أربعة اختيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل الدائرة التي تدل على الاختيار الصحيح:

١ مجموعة حل المعادلة $(س - ٤)^٢ = ٩$ هي:

(أ) {٧ ، -٧}　　(ب) {٥ ، -٥}

(جـ) {٥ ، ١٣}　　(د) {٧ ، ١}

٢ مجموعة حل المعادلة $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ هي:

(أ) {٣ ، ١}　　(ب) {٣ ، -١}

(جـ) {-٣ ، ١}　　(د) {-٣ ، -١}

٣ يمكن أن يكون للمعادلة $أس^٢ = جـ$ جذران حقيقيان مختلفان إذا كان:

(أ) أ > ٠ ، جـ < ٠　　(ب) أ < ٠ ، جـ > ٠

(جـ) أ > ٠ ، جـ > ٠　　(د) أ > ٠ ، جـ = ٠

٤ مميز المعادلة: $٣س^٢ - ٧س - ١ = ٠$ هو:

(أ) ٦١　　(ب) ٣٧

(جـ) $\frac{٧}{٣}$　　(د) $-\frac{١}{٣}$

٥ عددان موجبان مجموعهما ٧، ومجموع مربعيهما ٢٥، العددان هما:

(أ) ٥ ، ٢　　(ب) ٥ ، ٥

(جـ) ٣ ، ٤　　(د) ١ ، ٦

٦ التعبير اللفظي: مربع عدد يزيد عن (٨) أمثاله بمقدار (٢٠) يمكن ترجمته إلى المعادلة:

(أ) $س^٢ + ٨س = ٢٠$　　(ب) $س^٢ - ٨س = ٢٠$

(جـ) $س^٢ + ٨س + ٢٠ = ٠$　　(د) $س^٢ - ٨س + ٢٠ = ٠$

٧ مجموع جذري المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ٢ = ٠$ هو:

(أ) $\frac{٥}{٣}$　　(ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $-\frac{٥}{٣}$　　(د) $-\frac{٢}{٣}$

٨ المعادلة التربيعية التي جذراها (٣ − √٢) ، (٣ + √٢) هي:

(أ) س² − ٧س + ٦ = ٠ (ب) س² + ٧س − ٦ = ٠

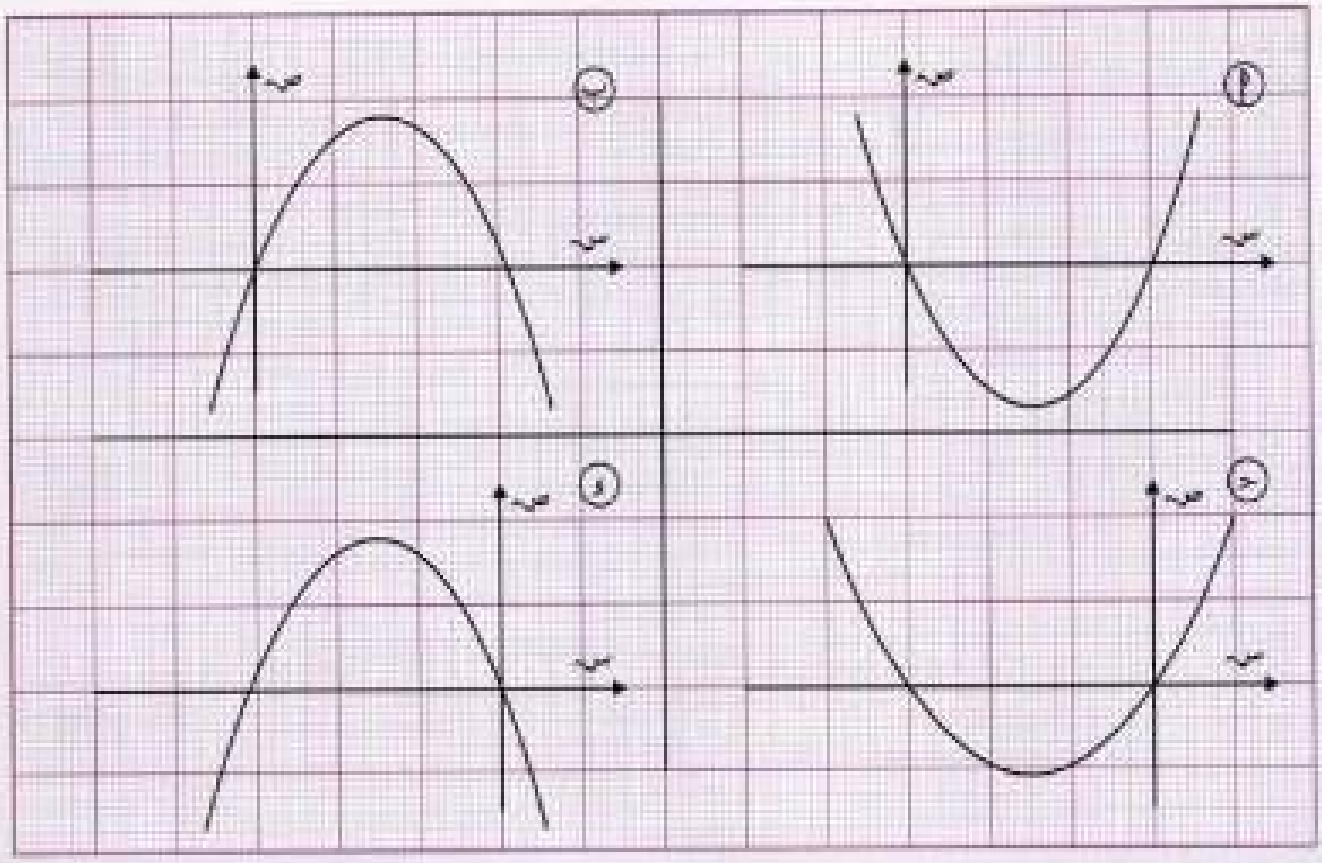
(ج) س² + ٦س − ٧ = ٠ (د) س² − ٦س + ٧ = ٠

٩ التطبيق الذي يمثل منحنى يمس محور السينات هو:

(أ) ص = س² + ١ (ب) ص = س² + ٦س + ٥

(ج) ص = س² − ١٠س + ٢٥ (د) ص = س² + س + ١

١٠ الشكل الذي يمثل التطبيق ص = س (س + ٣) هو:



١١ مجموعة حل المتباينة: س² + ٩ > ٠ هي:

(أ) {٣} (ب) {−٣} (ج) ∅ (د) ح

• أسئلة مقالية

أولًا – أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية بالطريقة التي تراها أفضل:

١ ٣س² − ١٥س = ٠ **٢** ٧س² − ٤٢ = ٠

٣ $٢ص^٢ + ٦ص - ٥ = ٠$

٤ $٢س^٢ - ١٠س + ٩ = ٠$

٥ $٣س (٣س - ٤) = ٤$

٦ $\frac{١}{١٥}ص^٢ + \frac{٣}{٥}ص + \frac{٢}{٣} = ٠$

٧ $\frac{٤ع}{٣} + \frac{١}{٢ع} = \frac{٥}{٣}$

٨ $٢س (٤س - ٣) = ٤س - ١$

٩ $٤س^٤ - ٢٠س^٢ + ٢٥ = ٠$

١٠ $٣س^٤ + ٥س^٢ - ١٢ = ٠$

ثانيًا - أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية بيانيًا:

١ $س^٢ - ٥ = ٠$ $\quad -٤ \leqslant س \leqslant ٤$

٢ $-س^٢ + ٣س = ٠$ $\quad -٢ \leqslant س \leqslant ٥$

٣ $٢س^٢ + س - ١ = ٠$ $\quad -٣ \leqslant س \leqslant \frac{٥}{٢}$

٤ $س^٢ - ٤س + ٢ = ٠$ $\quad ٠ \leqslant س \leqslant ٥$

٥ $٢س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$ $\quad \frac{٣}{٢} \leqslant س \leqslant ٤$

ثالثًا - أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية:

١ $س^٢ - ٣س - ١٠ \geqslant ٠$

٢ $س^٢ + س - ١٢ \leqslant ٠$

٣ $س^٢ + ٥ < ٠$

٤ $س^٢ - ٦س + ٩ \leqslant ٠$

رابعًا - حل التمارين التالية:

١ أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة $٥س^٢ + ٤س + ك = ٠$

أ جذرين حقيقيين متساويين.

ب جذرين حقيقيين مختلفين.

حـ جذرين غير حقيقيين.

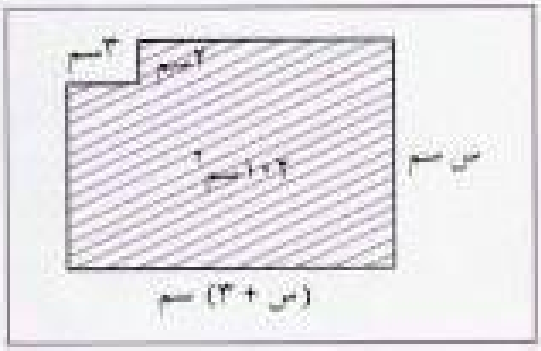
٢ إذا كان أحد جذري المعادلة $أس^٢ + ١١س - ١٢ = ٠$ هو -٤ فأوجد الجذر الآخر.

٣ أوجد قيمة أ التي تجعل مجموع جذري المعادلة $أس^٢ + ٤س + ٣ = ٠$ مساويًا ٨.

٤ إذا كان ل ، م جذري معادلة تربيعية وكان:
ل + م = ٢٩ ، ل × م = ٢٠٤ فأوجد جذري هذه المعادلة.

٥ بيّن أنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه مضاف إليه ٩ يساوي أربعة أمثاله.

٦ استعن بالشكل المقابل وأوجد قيمة س علمًا بأن مساحة المنطقة المظللة = ١٠٢ سم^{٢}



٧ اشترك أفراد جمعية الرياضيات بالمدرسة في شراء آلة حاسبة للاستخدام في نشاطات الجمعية بمبلغ ٤٨ ريالًا، وإذا زاد عدد أفراد الجمعية أربعة طلاب نقص ما يدفعه كل طالب بمقدار ريال واحد. كم عدد أفراد الجمعية؟

٨ قذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة معينة وكان ارتفاعها ف بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة:
ف = ٦ ن − ن^{٢}

ارسم بيان التطبيق ف معتبرًا ٠ ≤ ن ≤ ٦ ومن الرسم أوجد:

أ أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

ب الزمن ن عندما تبلغ الكرة ارتفاعًا قدره (٨) أمتار (فسّر معنى الجوابين، ثم تحقق جبريًا).

جـ متى يعود الجسم إلى الأرض ثانية؟ تحقق جبريًا.

٩ يمثل الجدول المقابل بعض الأزواج المرتبة التي تحقق:
ص = أس^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٨٨	٤٥	١٤	−٥	−١٢	−٧	١٠	١٣

أ هل يمكنك استنتاج قيمة (قيم) تقريبية لجذري المعادلة:
أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ؟ ناقش الحل.

ب أي المعادلتين التاليتين يمكن أن تكون المعادلة المعطاة؟

ن^{٢} − ٣ ن − ٢ = ٠

٦ ن^{٢} − ١٣ ن − ٥ = ٠ علل الاختيار.

الفصل الرابع

المصفوفات والمحددات
Matrices and Determinants

٤ - ١ المصفوفة - رتبة المصفوفة Matrix - Matrix Order

كثرت المعلومات وتنوعت في شتى المجالات، وقد استلزم ذلك البحث عن وسائل لتنظيم هذه المعلومات وحفظها بشكل يسهل استخدامها عند الحاجة. وتعد المصفوفات أداة فعالة في عرض المعلومات وتنظيمها، كما تعد من الأساليب الرئيسة لتزويد الحاسوب بالمعلومات وعمل البرامج الخاصة به، وقد تطورت فكرة المصفوفات حتى أصبحت موضوعًا رياضيًا له أسسه وقواعده واستخداماته في حل كثير من المشكلات الرياضية والحياتية.

● المصفوفة Matrix

في أحد الاختبارات حصل الطلاب أحمد، فهد، سعيد على الدرجات التالية على الترتيب حيث النهاية العظمى لكل مادة ١٠٠:

٨٧، ٦٠، ٧٩ في مادة الرياضيات، ٥٠، ٨٠، ٦٦ في مادة الفيزياء، ٧٠، ٤٥، ٩٠ في مادة اللغة العربية، ٩٠، ٧٥، ٣٤ في مادة اللغة الإنجليزية.

لعلك تلاحظ أن هذا العرض لهذه المعلومات لا يساعد كثيرًا على تذكرها أو المقارنة بينها، ويزداد هذا الأمر صعوبة بزيادة عدد الطلاب وعدد المواد الدراسية، ومن الممكن أن تعرض هذه المعلومات بشكل تسهل معه دراستها والمقارنة بينها وذلك بكتابتها على الصورة التالية:

	رياضيات	فيزياء	لغة عربية	لغة إنجليزية
أحمد	٨٧	٥٠	٧٠	٩٠
فهد	٦٠	٨٠	٤٥	٧٥
سعيد	٧٩	٦٦	٩٠	٣٤

أو على الصورة المختصرة التالية:

$$\begin{bmatrix} ٨٧ & ٥٠ & ٧٠ & ٩٠ \\ ٦٠ & ٨٠ & ٤٥ & ٧٥ \\ ٧٩ & ٦٦ & ٩٠ & ٣٤ \end{bmatrix}$$

الصورة الأخيرة عبارة عن تنظيم لبعض الأعداد الحقيقية في ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة، مثل هذا التنظيم يسمى «مصفوفة»، أما الأعداد المكونة لها فتسمى «عناصر elements» المصفوفة أو «مدخلات entries» المصفوفة.

وعموداً:

تعريف

المصفوفة هي تنظيم مؤلف من م × ن من الأعداد الحقيقية موضوعة في م صفاً، ن عموداً.

مثلاً $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ & -٢ \\ ٥ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ مصفوفة ذات صفين وثلاثة أعمدة

عناصر الصف الأول هي: ٣، ٠، -٢ على الترتيب

وعناصر العمود الثالث هي: -٢، ٤ على الترتيب

اذكر عناصر الصف الثاني، وعناصر كل من العمودين الأول والثاني.

$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة ذات ثلاثة صفوف وعمودين.

اذكر عناصر كل صف وكل عمود.

$\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ١ & \sqrt{٣} & ٢ \\ ٨ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$ مصفوفة ذات ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة،

$\begin{bmatrix} -١ & ٠ & \sqrt{٣} & ٥ \end{bmatrix}$ مصفوفة ذات صف واحد وأربعة أعمدة.

مما تقدم يتضح أن المصفوفة قد تكون مستطيلة وقد تكون مربعة.

المصفوفة المربعة Square Matrix هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفيما عدا ذلك تسمى المصفوفة «مصفوفة مستطيلة»

جميع المصفوفات المذكورة أعلاه مستطيلة فيما عدا المصفوفة الثالثة فهي مصفوفة مربعة لأن عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ٣

إذا تكونت المصفوفة من صف واحد تسمى مصفوفة أفقية Horizontal Matrix وإذا تكونت من عمود واحد تسمى مصفوفة عمودية Vertical Matrix.

فالمصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & ٠ & \sqrt{٢} & ٥ \end{bmatrix}$ مثلًا أفقية في حين أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$ عمودية.

عناصر المصفوفة هي أعداد حقيقية، ماذا لو كانت جميع عناصر المصفوفة أصفارًا؟

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية Zero Matrix

فمثلًا: $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ...

جميعها مصفوفات صفرية تختلف فيما بينها في عدد الصفوف والأعمدة.

● رتبة المصفوفة Matrix Order

تعتمد رتبة المصفوفة على عدد كل من الصفوف والأعمدة المكونة لها...

رتبة المصفوفة المكونة من م صفًا، ن عمودًا هي م × ن

فمثلًا، المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ مربعة (لماذا؟)، ومن الرتبة ٢ × ٢،

والمصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ مستطيلة (لماذا؟) ومن الرتبة ١ × ٤،

والمصفوفة $\begin{bmatrix} -١ & \sqrt{٣} \\ ٦ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ مستطيلة، ومن الرتبة ٣ × ٢،

والمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & \sqrt{٢} & ٧ \\ ٨ & -١ & ٤ \end{bmatrix}$ مربعة، ومن الرتبة ٣ × ٣ (اختصارًا من الرتبة الثالثة)،

والمصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ صفرية مستطيلة من الرتبة ٢ × ٤.

● ترميز المصفوفات Matrices Symbolizing

سنرمز للمصفوفة بحرف من حروف الهجاء ونضع تحته خطاً،
فنكتب $\underline{أ}$ ونقرأ المصفوفة ألف، مثلاً:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}$$

، $\underline{ب}$ ونقرأ المصفوفة باء، مثلاً:

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٠ \end{bmatrix} \ldots \text{الخ}$$

ونرمز للمصفوفة الصفرية بالرمز $\underline{٠}$

$$\underline{٠} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

وأحياناً تكتب رتبة المصفوفة الصفرية أسفل الرمز، فنكتب $\underset{٢\times٣}{\underline{٠}}$ للدلالة على مصفوفة صفرية ذات صفين وثلاثة أعمدة

أي أن $\underset{٢\times٣}{\underline{٠}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

وعندما تكون المصفوفة الصفرية مربعة من رتبة ن × ن نستخدم لها الرمز $\underset{ن}{\underline{٠}}$ ،

فمثلاً: $\underset{٣}{\underline{٠}} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

● ترميز عناصر المصفوفة Matrix Elements Symbolizing

إذا تأملنا المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & \sqrt{٣} & ١ \\ ٥ & ١٠ & ٧ \end{bmatrix}$

نجد أن العنصر ٥، مثلاً يقع في الصف الثاني والعمود الأول، لذلك سنرمز له بالرمز $ب_{٢١}$ ويقرأ «باء اثنين واحد» للدلالة على عنصر المصفوفة $\underline{ب}$ الواقع في الصف الثاني والعمود الأول أي أن $ب_{٢١} = ٥$ كذلك، العنصر $\sqrt{٣}$ يقع في الصف الأول والعمود الثاني، فنرمز له بالرمز $ب_{١٢}$ أي أن $ب_{١٢} = \sqrt{٣}$، وهكذا:

$\therefore$ $ب_{١١} = ٢$ ، $ب_{١٣} = ١$ ، $ب_{٢٢} = \ldots\ldots$ ، $ب_{٢٣} = \ldots$

وعمومًا:

$ب_{ى ، ه}$ رمز لعنصر في المصفوفة ب يقع في الصف ى والعمود ه

فالمصفوفة $\underline{أ}$ ذات الرتبة ٣ × ٤ يمكن كتابتها على الصورة:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١٤} & أ_{١٣} & أ_{١٢} & أ_{١١} \\ أ_{٢٤} & أ_{٢٣} & أ_{٢٢} & أ_{٢١} \\ أ_{٣٤} & أ_{٣٣} & أ_{٣٢} & أ_{٣١} \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابتها بصورة أخرى كالتالي:

$\underline{أ} = (أ_{ى ، ه})$ حيث ى ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

، ه ∈ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

تدريب (١):

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١- & ٢ \\ ١١ & ٦ & ٠ \\ ٩- & ٥ & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}$ فأكمل:

عناصر الصف الثالث هي:

وعناصر العمود الثاني هي:

$أ_{١٢}$ = ... ، $أ_{٢٢}$ = ... ، $أ_{٣٢}$ = ...

١١ = ... ، ١- = ... ، ٩- = ...

رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ تساوي ..... × .....

عدد عناصر المصفوفة $\underline{أ}$ يساوي .....

تدريب (٢):

إذا كنا نعبر عن نقطة في المستوى الإحداثي مثل و (٣ ، ١-) بمصفوفة أفقية من الرتبة ١ × ٢ وذلك كالتالي:

$\underline{و} = [٣ \quad ١-]$ ،

وإذا كان $\underline{أ}$ (١ ، ٢)، ب (٠ ، ٤-)، حـ (٥- ، ٧) فأكمل:

$\underline{أ}$ = ... ، $\underline{ب}$ = ... ، $\underline{حـ}$ = ...

٤ - ١ تمارين

١ ثلاثة مصانع تنتج أربعة أنواع من الأجهزة الكهربائية على النحو التالي:

المصنع الأول: ينتج ١٥ جهازًا من النوع الأول، ٢٨ من النوع الثاني، ٤٣ من النوع الثالث، ٣٣ من النوع الرابع.

المصنع الثاني: ينتج ١٢ جهازًا من النوع الأول، ٢٥ من النوع الثاني، ٢٩ من النوع الثالث، ٤٢ من النوع الرابع.

والمصنع الثالث: ينتج ٢٢ جهازًا من النوع الأول، ٢٧ من النوع الثاني، ٣٧ من النوع الثالث، ١٧ من النوع الرابع.

أ اكتب هذه البيانات على شكل مصفوفة من الرتبة ٤ × ٣

ب إذا رمزنا لهذه المصفوفة بالرمز ح فاكتب كلاً من:
$ح_{١٢}$ ، $ح_{٣٣}$ ، $ح_{٤١}$ واذكر ما يعنيه كل منها.

٢ لتكن $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٩ & ٨ & ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ & ٦ & ٧ \\ ٦ & ٣- & ٥ & ٤ & ١- \\ ٢- & ١ & ٥ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أ ما رتبة هذه المصفوفة؟ وما عدد عناصرها؟

ب اكتب عناصر صفها الثاني، ثم اكتب عناصر عمودها الثالث.

جـ أوجد كلاً من $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٤}$ ، $أ_{٤١}$

د بطريقة ذكر العناصر اكتب المجموعة:
$\{أ_{ى هـ} : ى = ٣ ، هـ \in \{٢ ، ٣ ، ٤\}\}$

٣ كون مصفوفة مربعة أ من الرتبة ٣ × ٣ (يمكن أن نقول من الرتبة ٣) بحيث يكون:
$أ_{ى هـ} = ٣ى - هـ^{٢}$

٤ أربع مدن أ ، ب ، حـ ، ء المسافة بين أ ، ب (٣٠) كم، وبين أ، حـ (٧٠)كم، وبين أ، ء (٢٥)كم، وبين ب، حـ (١٧)كم وبين ب، ء (٩٠)كم، وبين حـ، ء (١٥)كم.

أولًا: نظم هذه المعلومات في مصفوفة ص وعين رتبتها.

ثانيًا: عين $ص_{١١}$ ، $ص_{٢١}$ ماذا تلاحظ؟

ثالثًا: اكتب جميع العناصر $ص_{ر}$ وفسر النتائج التي حصلت عليها.

٥ عبر بمصفوفة أفقية عن كل نقطة مما يلي:

أ (-١ ، ٥)، ب (٠ ، ٧)، حـ (٠ ، ٠)، ء (-٢ ، $-\frac{١}{٣}$)

٤ - ٢ تساوي مصفوفتين Equality of Two Matrix

ينتج أحد المصانع نوعين من السجاد بمقاسات مختلفة، فإذا كان ما أنتجه المصنع في ثلاثة أيام متتالية وفق ثلاثة مقاسات معينة لكل من النوعين كما يلي:

إنتاج اليوم الأول

$$\underline{أ} = \begin{array}{c} \text{المقاس الأول} \quad \text{المقاس الثاني} \quad \text{المقاس الثالث} \\ \begin{bmatrix} ١٧ & ٢٥ & ١٤ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{النوع الأول} \\ \text{النوع الثاني} \end{array}$$

إنتاج اليوم الثاني

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢٥ & ١٤ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{النوع الأول} \\ \text{النوع الثاني} \end{array}$$

إنتاج اليوم الثالث

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣٤ & ٥٠ & ٢٨ \\ ١٨ & ١٢ & ٦ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{النوع الأول} \\ \text{النوع الثاني} \end{array}$$

نلاحظ أن إنتاج المصنع في اليوم الأول هو نفسه إنتاج اليوم الثاني في حين أن إنتاج اليوم الثالث يختلف، لذلك نقول إن مصفوفة إنتاج اليوم الأول تساوي مصفوفة إنتاج اليوم الثاني، أي أن:

$$\underline{أ} = \underline{ب}$$

في حين أن مصفوفة الإنتاج لليوم الثالث تختلف، أي أن:

$$\underline{أ} \neq \underline{جـ} \quad ، \quad \underline{ب} \neq \underline{جـ}$$

وعمومًا:

يقال إن المصفوفة $\underline{أ}$ تساوي المصفوفة $\underline{ب}$ ونكتب $\underline{أ} = \underline{ب}$ إذا وفقط إذا كان:

١ - رتبة $\underline{أ}$ تساوي رتبة $\underline{ب}$

٢ - كل عنصر في $\underline{أ}$ يساوي العنصر الذي يحتل الموقع نفسه في $\underline{ب}$

أي أن $أ_{ي و} = ب_{ي و}$ لكل ي ، و .

مثال ١

إذا كانت $\text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $\text{ص} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$

وكان س = ص فأوجد كلاً من أ ، ب ، جـ ، د .

الحل

∵ س = ص

∵ كل عنصر في س يساوي العنصر الذي يحتل الموقع نفسه في ص

∴ أ = ٥ ، ب = -٤ ، جـ = ٠ ، د = ٦

مثال ٢

أوجد قيمة كل من س، ص، ع، ك بحيث يكون:

$$\begin{bmatrix} \text{س} + ١ & \text{ص} - ٢ \\ \text{ع} + ١ & \text{ك}^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\text{س} + ٢ & ٥ \\ ٣ - \text{ع} & ٩ \end{bmatrix}$$

الحل

من تساوي المصفوفتين:

س + ١ = ٢س + ٢ ومنها س = -١

ص - ٢ = ٥ ومنها ص = ٧

ع + ١ = ٣ - ع ومنها ع = ١

ك^{٢} = ٩ ومنها ك = ± ٣

٤ - ٢

تمارين

١ إذا كانت [٣ -٤] = [س - ١ ص - ٢] فأوجد س، ص

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & ٥ \\ ٦ & \text{ص} - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ فأوجد س، ص

٣ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} - ٢ & \text{ص}^{٢} \\ ٧ - \text{ع} & ٢\text{هـ} - ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١٦ \\ ٥ & \text{هـ} + ١ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س، ص، ع، هـ باعتبارها أعدادًا حقيقية.

٤ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} + ٣\text{ص} & ١ \\ \text{س} + \text{ص} & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س، ص

٤ - ٣

جمع وطرح المصفوفات

Addition and Subtracting of Matrices

• أولا - جمع المصفوفات Matrices Addition

لعب فريق رياضي ١٢ مباراة خلال أحد الأشهر ففاز في ٥ وتعادل في ٤ وخسر ٣ كما لعب الفريق نفسه ١٢ مباراة في الشهر التالي ففاز في ٦ وتعادل في ٥ وخسر واحدة.

من الواضح أن هذا الفريق قد لعب ٢٤ مباراة خلال هذين الشهرين فاز في ١١ وتعادل في ٩ وخسر ٤

إذا استخدمنا لغة المصفوفات:

مصفوفة نتائج الشهر الأول $\underline{أ}$ = [٥ ٤ ٣]

مصفوفة نتائج الشهر الثاني $\underline{ب}$ = [٦ ٥ ١]

مصفوفة نتائج الشهرين $\underline{جـ}$ = [١١ ٩ ٤]

وقد حصلنا على عناصر $\underline{جـ}$ بجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ نقول هنا إن المصفوفة $\underline{جـ}$ هي مجموع المصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ ونكتب ذلك على الصورة:

$$\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$$

وعمومًا:

> إذا كانت كل من $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ من الرتبة م × ن فإن $\underline{أ}$ + $\underline{ب}$ مصفوفة $\underline{جـ}$ من الرتبة ذاتها م × ن حيث:
>
> $جـ_{ي ع} = أ_{ي ع} + ب_{ي ع}$ لكل ي ، ع

مثال ١ إذا كانت:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} ، \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

فأوجد إن أمكن:

أولا: $\underline{أ} + \underline{ب}$ **ثانيا:** $\underline{ب} + \underline{جـ}$

الحل

أولا: حيث إن $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ لهما الرتبة نفسها (ما هي؟)

∴ يمكن جمع $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ويكون

$$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ + ٣ & ٥ + (-٢) \\ -٢ + ٠ & ٧ + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$$

ثانيا: حيث إن رتبة $\underline{ب}$ لا تساوي رتبة $\underline{جـ}$ (تعرف رتبة كل منهما)

∴ لا يمكن جمع $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$

مثال ٢ إذا كانت:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix} ،$$

$$\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} ،$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & -١ \end{bmatrix} ،$$

أولا: أوجد: $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ ماذا تلاحظ؟

ثانيا: أوجد: $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ ماذا تلاحظ؟

الحل

أولاً: $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١+٧ & ٠+١ & ٢+٤ \\ -١+٠ & ٣+٢ & ٥+٦ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٦ \\ -١ & ٥ & ١١ \end{bmatrix}$ ..... (١)

$\underline{ب} + \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ١+٧ & ٠+١ & ٢+٤ \\ ٠+(-١) & ٢+٣ & ٦+٥ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٦ \\ -١ & ٥ & ١١ \end{bmatrix}$ ..... (٢)

من (١)، (٢) نلاحظ أن $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$

ثانياً: $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٦ \\ -١ & ٥ & ١١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، ..... (٣)

$\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٦ \\ ٤ & ٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٨ \\ ٣ & ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، ..... (٤)

من (٣) ، (٤) نلاحظ أن: $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ} = \underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$

وعموماً:

عملية الجمع على المصفوفات إبدالية Commutative وتجميعية Associative

مثال ٣ إذا كانت:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٨ & -٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{أ} + \underline{ص}$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$\underline{أ} + \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٨ + ٠ & -٣ + ٠ \\ ١ + ٠ & ٥ + ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & -٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \underline{أ}$

كذلك $\underline{ص} + \underline{أ} = \underline{أ}$ (لماذا؟)

$\therefore \underline{أ} + \underline{ص} = \underline{ص} + \underline{أ} = \underline{أ}$

أي أن $\underline{ص} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

هي العنصر المحايد الجمعي للمصفوفات المربعة من الرتبة ٢ × ٢

وعمومًا:

المصفوفة الصفرية $\underset{م \times ن}{\underline{٠}}$ Zero Matrix هي العنصر المحايد Identity Element الجمعي للمصفوفات من الرتبة م × ن

مثال ٤ إذا كانت:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & -٧ \end{bmatrix}$

فأوجد $\underline{أ} + \underline{ب}$ ماذا تلاحظ؟

الحل

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٥ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

كذلك $\underline{ب} + \underline{أ} = \underset{٢ \times ٢}{\underline{٠}}$ (لماذا؟)

أي أن $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ} = \underset{٢ \times ٢}{\underline{٠}}$ = العنصر المحايد.

أي أن $\underline{ب}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{أ}$

وكذلك $\underline{أ}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{ب}$

ويلاحظ أن $\underline{أ}_{ى ك} = - \underline{ب}_{ى ك}$ لكل ى ، ك

وعمومًا:

إذا كانت $\underline{أ}$ من الرتبة م × ن فإنه يتعين لها نظير جمعي $\underline{ب}$ من الرتبة ذاتها م × ن حيث:

$\underline{ب}_{ى ك} = - \underline{أ}_{ى ك}$ لكل ى ، ك

نرمز عادة لمثل هذه المصفوفة بالرمز $-\underline{أ}$ ونقرأ النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{أ}$.

● ثانيا - طرح المصفوفات Matrices Subtraction

إذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ مصفوفتين لهما الرتبة نفسها فإننا نستطيع تعريف عملية طرح $\underline{ب}$ من $\underline{أ}$ كالتالي:

$\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$ ،

حيث $-\underline{ب}$ هي النظير الجمعي للمصفوفة $\underline{ب}$

مثال (١) إذا كانت:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{أ} - \underline{ب}$

الحل

$\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$

وحيث إن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ فإن $-\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ -٣ & -٦ \end{bmatrix}$

$\therefore \underline{أ} - \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & -٧ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ -٣ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٥ & -١ \end{bmatrix}$

مثال ٢ حل المعادلة المصفوفية:

$$\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

الحل

بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ إلى كل من الطرفين

$$\text{س} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

٤ - ٣

تمارين

١ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٦ \\ -٢ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن كلاً من: $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{أ} + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} - \underline{ب}$ ، $\underline{جـ} - \underline{أ}$

٢ أوجد ناتج ما يلي:

$$\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٥ \\ ٣ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٠ & -٣ \\ -٢ & ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

٣ لتكن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

أوجد إن أمكن:

أولاً: $\underline{أ} + \underline{ب}$

ثانياً: $-\underline{ب}$

ثالثاً: $\underline{ب} - \underline{أ}$

رابعاً: $\underline{أ} + \underline{ب} + \underline{جـ}$

خامساً: $(\underline{أ} - \underline{ب}) + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} - (\underline{ب} + \underline{جـ})$ ، $\underline{جـ} - (\underline{أ} + \underline{ب})$

٤ أوجد قيمة كل من س، ص، ع، ن في كلٍ مما يلي:

أولاً: $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س & ص \\ ن & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$

ثانياً: $\begin{bmatrix} س \\ ع \\ ص \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٥ \\ ٠ \end{bmatrix}$

ثالثاً: $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ص & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٤ & ع \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ -٣ & ن \end{bmatrix}$

٥ حل كلاً من المعادلات المصفوفية التالية:

أولاً: $\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ثانيًا: $\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٧ \\ -١ & ٣ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -٣ & -٥ \\ -٧ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

ثالثًا: $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ \end{bmatrix} - \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \end{bmatrix}$

رابعًا: $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} + \underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

٤ - ٤ ضرب مصفوفة في عدد

Matrix Multiplication in a Number

اعتبر مصفوفات إنتاج مصنع السجاد التي ذكرت في البند (٤ - ٢) وخاصة مصفوفة إنتاج اليوم الأول:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١٤ & ٢٥ & ١٧ \\ ٣ & ٦ & ٩ \end{bmatrix}$$

ومصفوفة إنتاج اليوم الثالث:

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٢٨ & ٥٠ & ٣٤ \\ ٦ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix}$$

لعلك تلاحظ أن إنتاج المصنع في اليوم الثالث ضعف إنتاجه في اليوم الأول، وعليه يمكن القول إن $\underline{جـ} = ٢\underline{أ}$

أي أن:

$$٢\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢٨ & ٥٠ & ٣٤ \\ ٦ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ بسهولة أن المصفوفة الأخيرة $٢\underline{أ}$ يمكن الحصول عليها من المصفوفة $\underline{أ}$ بضرب كل عنصر فيها في العدد ٢

وعموماً:

> إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة من الرتبة م × ن، وكان ك ∈ ح*، فإن ك $\underline{أ}$ = $\underline{ب}$
> حيث $\underline{ب}$ مصفوفة من الرتبة م × ن
>
> $ب_{ي ر} = ك\, أ_{ي ر}$ لكل ي ، ر .

مثال ٦ إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & -٢ \\ ٨ & ١٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من: ٤ أ ، −٣ أ ، $\frac{١}{٢}$ أ

الحل

$$٤\,\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ \times ٦ & ٤ \times ٤ & ٤ \times -٢ \\ ٤ \times ٨ & ٤ \times ١٠ & ٤ \times -١ \\ ٤ \times ١ & ٤ \times ٠ & ٤ \times ٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٤ & ١٦ & -٨ \\ ٣٢ & ٤٠ & -٤ \\ ٤ & ٠ & ٢٠ \end{bmatrix}$$

بالمثل: $-٣\,\text{أ} = \begin{bmatrix} -١٨ & -١٢ & ٦ \\ -٢٤ & -٣٠ & ٣ \\ -٣ & ٠ & -١٥ \end{bmatrix}$

$$\frac{١}{٢}\,\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ & ٢\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

تدريب:

إذا كانت $\text{ج} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ فأكمل:

$$٣\,(٢\,\text{ج}) = ٣ \times \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$(٣ \times ٢)\,\text{ج} = ٦ \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن: ٣ (٢ جـ) = (×) جـ

$$٥\,\text{جـ} + ٤\,\text{جـ} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$(٥ + ٤)\,\text{جـ} = ٩ \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

ومنه نلاحظ أن: ٥ جـ + ٤ جـ = (+) جـ

مثال (٢) حل المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} + ٢\,\text{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$$

الحل

نضيف إلى الطرفين النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} + ٢\,\text{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + ٢\,\text{س} = \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٠ & -٨ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ ٢ س = $\begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٠ & -٨ \end{bmatrix}$ وبضرب كل من الطرفين في $\frac{١}{٢}$ نجد:

$$\text{س} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ ٠ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٠ & -٤ \end{bmatrix}$$

٤ - ٤

تمارين

١ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

أولاً: أوجد كلاً من ٢ $\underline{أ}$ + ٢ $\underline{ب}$ ، ٢ ($\underline{أ}$ + $\underline{ب}$) وبين ماذا تلاحظ؟

ثانياً: أوجد ٢ $\underline{أ}$ - ٣ $\underline{ب}$

ثالثاً: أثبت أن ٣ $\underline{ب}$ + ٤ $\underline{ب}$ = (٣ + ٤) $\underline{ب}$ وبين ماذا تلاحظ؟

٢ أثبت أن: $\begin{bmatrix} ٢ & -٨ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix} + ٣ \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix} = ٢ \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

٣ اكتب المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ١٠ \\ -٢ & ٨ & -٤ \end{bmatrix}$ على صورة ضرب عدد حقيقي ك $\neq$ ٠ في مصفوفة

٤ حل المعادلة: $\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٥ حل المعادلة: ٣ $\underline{س}$ + $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ = $\underline{س}$ + $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} = أ \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + ب \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

$+ حـ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + ء \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، حـ ، ء

٤ - ٥

ضرب مصفوفتين Multiplication of Two Matrices

إذا علمت أن أحد المصانع ينتج ثلاثة نماذج من التلفاز تختلف فيما بينها من حيث عدد المكبرات وعدد الصمامات وذلك كما في الجدول التالي:

	النموذج (١)	النموذج (٢)	النموذج (٣)
عدد المكبرات	٢	١	٣
عدد الصمامات	٨	١٢	١٠

وتوضح ذلك المصفوفة:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٨ & ١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$$

إذا علمت أن إنتاج هذا المصنع خلال شهرين كما هو مبين في الجدول التالي:

	الشهر الأول	الشهر الثاني
النموذج (١)	١٠	٨
النموذج (٢)	١٦	٢٠
النموذج (٣)	١٥	١٢

وتوضح ذلك المصفوفة:

$$\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ١٦ & ٢٠ \\ ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$$

لنبحث معًا ما يلزم لهذا الإنتاج من مكبرات وصمامات:

عدد المكبرات اللازمة للشهر الأول = ٢ × ١٠ + ١ × ١٦ + ٣ × ١٥ = ٨١

عدد المكبرات اللازمة للشهر الثاني = ٢ × ٨ + ١ × ٢٠ + ٣ × ١٢ = ٧٢

عدد الصمامات اللازمة للشهر الأول = ٨ × ١٠ + ١٢ × ١٦ + ١٠ × ١٥ = ٤٢٢

عدد الصمامات اللازمة للشهر الثاني = ٨ × ٨ + ١٢ × ٢٠ + ١٠ × ١٢ = ٤٢٤

ويمكن تسجيل ذلك في جدول كالتالي:

	الشهر الأول	الشهر الثاني
عدد المكوات	٨١	٧٢
عدد الصمامات	٤٢٢	٤٢٤

وتوضح ذلك المصفوفة:

$$\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٨١ & ٧٢ \\ ٤٢٢ & ٤٢٤ \end{bmatrix}$$

وسنرى فيما يلي أن المصفوفة جـ جاءت من ضرب المصفوفة أ في المصفوفة ب أي أن:

$$\text{أ} \times \text{ب} = \text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١٠ & ١٢ & ٨ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٨ & ١٠ \\ ٢٠ & ١٦ \\ ١٢ & ١٥ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٢ \times ٣ + ٢٠ \times ١ + ٨ \times ٢ & ١٥ \times ٣ + ١٦ \times ١ + ١٠ \times ٢ \\ ١٢ \times ١٠ + ٢٠ \times ١٢ + ٨ \times ٨ & ١٥ \times ١٠ + ١٦ \times ١٢ + ١٠ \times ٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧٢ & ٨١ \\ ٤٢٤ & ٤٢٢ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن:

$\text{جـ}_{١١}$ = مجموع نواتج ضرب عناصر الصف الأول في أ وعناصر العمود الأول في ب

$\text{جـ}_{١٢}$ = مجموع نواتج ضرب عناصر الصف الأول في أ وعناصر العمود الثاني في ب

$\text{جـ}_{٢١}$ = مجموع نواتج ضرب عناصر الصف الثاني في أ وعناصر العمود الأول في ب

$\text{جـ}_{٢٢}$ = مجموع نواتج ضرب عناصر الصف الثاني في أ وعناصر العمود الثاني في ب

في المثال السابق، لاحظ أن:

رتبة المصفوفة أ هي ٢ × ٣

رتبة المصفوفة ب هي ٣ × ٢

ورتبة المصفوفة جـ = أ × ب هي ٢ × ٢

عموماً:

إذا كانت أ من الرتبة م × ن، ب من الرتبة ن × ر فإنه تتعين مصفوفة أخرى جـ من الرتبة م × ر تسمى مصفوفة حاصل الضرب بحيث يكون:

$$\text{أ} \times \text{ب} = \text{جـ}$$

ويكون جـ$_{\text{ي و}}$ = مجموع ضرب عناصر الصف ي في أ وعناصر العمود و في ب عنصراً بعنصر، أي أن:

$$\text{جـ}_{\text{ي و}} = \text{أ}_{\text{ي ١}} \text{ب}_{\text{١ و}} + \text{أ}_{\text{ي ٢}} \text{ب}_{\text{٢ و}} + \dots + \text{أ}_{\text{ي ن}} \text{ب}_{\text{ن و}}$$

يلاحظ من التعريف ما يلي:

١ أ × ب لا يتعين دائماً.

٢ أ × ب يتعين عندما يكون عدد أعمدة أ يساوي عدد صفوف ب

٣ إذا كان أ من الرتبة م × ن، ب من الرتبة ن × ر فإنه تتعين أ × ب وتكون من الرتبة م × ر

مثال ١ إذا كانت:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٥ & ١ & ٠ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

أولاً: هل أ × ب يتعين؟ ولماذا؟
أوجد أ × ب إن أمكن.

ثانياً: هل ب × أ يتعين؟ ولماذا؟
أوجد ب × أ إن أمكن.

الحل **أولاً:**

أ من الرتبة ٣ × ٣، ب من الرتبة ٣ × ٢

∴ عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

∴ أ × ب يتعين ورتبته ٣ × ٢

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٥ & ١ & ٠ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ \times ١ + ٥ \times ٣ + ٠ \times ١ & ٢ \times ٢ + ٣ \times ٣ + ١ \times ٤ \\ ٥ \times ١ + ١ \times ٥ + ٠ \times ٠ & ٥ \times ٢ + ١ \times ٣ + ٠ \times ٤ \\ -١ \times ١ + ٤ \times ٥ + ٢ \times ٠ & -١ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢ \times ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٧ & ١٧ \\ ١٠ & ١٣ \\ ١٩ & ١٨ \end{bmatrix}$$

ثانيا: رتبة ب هي ٣ × ٢ ورتبة أ هي ٣ × ٣

∴ عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف أ

∴ ب × أ لا يتعين.

مثال (٢) إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \\ -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

فأوجد إن أمكن أ × ب ، ب × أ

الحل

رتبة أ هي ٣ × ١ ، رتبة ب هي ١ × ٣

∵ عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب = ١

∴ عملية الضرب أ × ب ممكنة.

ومصفوفة ناتج الضرب ولتكن جـ رتبتها ٣ × ٣

أي أن جـ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

ونجد أن: $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \\ -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٥ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & -٣ & ١٥ \\ ٢ & -١ & ٥ \\ -٤ & ٢ & -١٠ \end{bmatrix}$$

أما بالنسبة لإيجاد $\underline{ب} \times \underline{أ}$ فنلاحظ أن:

رتبة $\underline{ب}$ هي ١ × ٣، ورتبة $\underline{أ}$ هي ٣ × ١

أي أن عدد أعمدة $\underline{ب}$ = عدد صفوف $\underline{أ}$ = ٣

فعملية الضرب $\underline{ب} \times \underline{أ}$ ممكنة أيضًا ورتبة مصفوفة ناتج الضرب هي ١ × ١

أي أن ناتج الضرب مصفوفة مربعة رتبتها ١

ونجد أن: $\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ \times ٣ + (-١) \times ١ + ٥ \times (-٢) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٥ \end{bmatrix}$$

نلاحظ في هذا المثال أن $\underline{أ} \times \underline{ب} \neq \underline{ب} \times \underline{أ}$

أي أن:

عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية

● ملحوظات Remarks

١ إذا كانت $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة فإن الضرب $\underline{أ} \times \underline{أ}$ يتعين (لماذا؟) وسنرمز له بالرمز $\underline{أ}^٢$ (نقرأ مربع المصفوفة $\underline{أ}$)، أي أن:

$$\underline{أ}^٢ = \underline{أ} \times \underline{أ}$$

بالمثل: $\underline{أ}^٣ = \underline{أ} \times \underline{أ} \times \underline{أ} = \underline{أ}^٢ \times \underline{أ}$ ... وهكذا.

٢ بينما أن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية، ومع هذا فإنه قد يكون $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{أ}$ في بعض المصفوفات

فمثلاً إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$

فإن: $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ لماذا؟

ومنه نلاحظ أن: $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{ب} \times \underline{أ}$ وذلك في الحالة الخاصة المذكورة.

٣ نعلم أنه إذا كان أ ، ب $\in$ ح وكان أ × ب = ٠

فإن العدد الحقيقي أ = ٠ أو العدد الحقيقي ب = ٠

وسنبين فيما يلي أن الأمر ليس كذلك بالنسبة لضرب المصفوفات.

فإذا كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ مصفوفتين وكان $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{٠}$

فليس من الضروري أن تكون $\underline{أ} = \underline{٠}$ أو $\underline{ب} = \underline{٠}$

مثلاً: إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣- \\ ٦- & ٢ \end{bmatrix}$

فواضح أن $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{٠}$

في حين أن $\underline{أ} \neq \underline{٠}$ ، $\underline{ب} \neq \underline{٠}$

٤ نعلم أنه إذا كان أ ، ب ، حـ $\in$ ح، وكان أ × ب = أ × حـ فإن ب = حـ ما لم يكن أ = ٠، سنبين في المثال التالي أن الأمر ليس كذلك بالنسبة لضرب المصفوفات.

فإذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{حـ} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ١١ \end{bmatrix}$

فإن $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ ، $\underline{أ} \times \underline{حـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$

ومن الواضح أن $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{أ} \times \underline{حـ}$ ولكن $\underline{ب} \neq \underline{حـ}$

تدريب (١):

إذا كانت أ مصفوفة مربعة، ب مصفوفة مستطيلة، فأكمل:

عملية الضرب أ × أ ممكنة لأن...

أما عملية الضرب ب × ب غير ممكنة لأن...

إذا كانت رتبة أ هي ن فإن رتبة أ² هي...

تدريب (٢):

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٢ \\ ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ فأكمل:

أ رتبة أ هي ..... ورتبة ب هي .....

ناتج الضرب أ × ب يتعين لأن....

ناتج الضرب أ × ب مصفوفة من الرتبة.....

ب ناتج الضرب ب × أ يتعين أيضًا لأن.....

وناتج الضرب ب × أ مصفوفة من الرتبة .....

جـ أ × ب = ... ، ب × أ = ...

د هل أ × ب = ب × أ ؟

تدريب (٣):

أكمل الجدول التالي:

رتبة أ	رتبة ب	العملية أ × ب	رتبة ناتج أ × ب	العملية ب × أ	رتبة ناتج ب × أ
١ × ٢	٢ × ٣	ممكنة	١ × ٣	غير ممكنة	
٢ ×	٣ ×	ممكنة	× ٥		
٢ ×	×	ممكنة	×	ممكنة	٣ ×
×	٦ ×	ممكنة	٦ ×	ممكنة	×
×	×	غير ممكنة		ممكنة	٤ × ٥

٤ - ٥ تمارين

• بنود موضوعية

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة غير الصحيحة:

١ إذا كانت أ من الرتبة ٣ × ٥، ب من الرتبة ٥ × ٣
فإن أ × ب من الرتبة ٥ × ٥

٢ إذا تعينت أ × ب فإن ب × أ تتعين دائمًا.

٣ مهما كانت رتبة المصفوفة المربعة أ فإن $أ^{٢}$ تتعين.

٤ مهما كانت رتبة أ فإنه يمكن إيجاد أ × أ

• أسئلة مقالية

١ أوجد مجموع نواتج ضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة الأولى في عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية وضع الناتج في المكان المناسب من مصفوفة ناتج الضرب:

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \boxed{٥} \\ \square & \boxed{-١} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square & \square \\ \boxed{٣} & \boxed{٢} \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

٢ اكتب فقط العنصرين المحدد موضعاهما في ناتج الضرب بدائرتين:

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \bigcirc & \square & \square & \square \\ \square & \square & \bigcirc & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٠ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٢ & ١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$$

٣ أوجد - إن أمكن - ناتج الضرب في كل مما يلي:

أولًا: $\begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \\ -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & -٥ & -٦ \end{bmatrix} =$

ثانيًا: $\begin{bmatrix} ١ & ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} =$

ثالثًا: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & -١ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} =$

٤ إذا كانت:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٧ \end{bmatrix}$ فأكمل:

$\underline{أ}^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

أما $\underline{ب}^٢$ فلا تتعين لأن: .....

٥ إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فأثبت أن $\underline{أ}^٣ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٦ لاحظ ثم أكمل:

إذا كانت رتبة $\underline{أ}$ هي ٣ × ٢، ورتبة $\underline{ب}$ هي ٢ × ١

فإن $\underline{أ} \times \underline{ب}$ تتعين لأن .....

ورتبة مصفوفة ناتج الضرب هي ..... × .....

أما $\underline{ب} \times \underline{أ}$ فلا تتعين لأن .....

وإذا كانت $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{د} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$

فإن $\underline{جـ} \times \underline{د}$ تتعين، ورتبة ناتج الضرب هي ..... × .....

٧ حل المعادلة: $-٢ \left(\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \right) = ٣\underline{س} + \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٨ أكمل:

أ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٣ & \text{ص} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

فإن: س =

، ص =

ب إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

فإن: س =

، ص =

٩ إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

فأثبت أن: أولًا: $\underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} \times \underline{\text{جـ}}) = (\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}) \times \underline{\text{جـ}}$ ماذا تلاحظ؟

ثانيًا: $\underline{\text{أ}} \times (\underline{\text{ب}} + \underline{\text{جـ}}) = \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} + \underline{\text{أ}} \times \underline{\text{جـ}}$ ماذا تلاحظ؟

١٠ إذا كانت $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١٢ & ١٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -٥ & ١٠ \\ ٤ & -٨ \end{bmatrix}$

فأوجد $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}}$ ماذا تلاحظ؟

٤ - ٦

محدد المصفوفة المربعة - النظير الضربي

The Square Matrix Determinant - The Multiplication Inverse

كل مصفوفة مربعة أ تقترن بعدد حقيقي يسمى "محدد أ"، يرمز لهذا العدد بالرمز |أ|
ويقرأ محدد المصفوفة أ

وإذا كان: $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$

فإن $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = \text{أ د} - \text{ب جـ}$

مثال ١ أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \text{ ، } \text{ب} = \begin{bmatrix} -٦ & ٨ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} \text{ ، } \text{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

الحل

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \times ١ - ٢ \times (-١) = ٥$$

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} -٦ & ٨ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٦ \times (-٣) - ٨ \times ٥ = -٢٢$$

$$|\text{جـ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٤ \times ٥ - ١٠ \times ٢ = ٠$$

مثال ٢

إذا كان $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٠$ فما قيمة س؟

الحل

$$\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٣ \times ١٠ - \text{س} \times ٥ = ٣٠ - ٥\text{س}$$

وحيث إن $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٥ & ١٠ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore$ ٣٠ - ٥س = ٠

$\therefore$ س = ٦

سنسمي كل مصفوفة محددها الصفر «مصفوفة منفردة»

∴ كل من المصفوفتين جـ في مثال (١)، أ في مثال (٢) مصفوفة منفردة، كذلك المصفوفة:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$$ منفردة، وذلك لأن:

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ٨ - ٤ \times ٤ = ٠$$

ولكن المصفوفة $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ليست منفردة، وذلك لأن:

$$|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ١ \times ٥ - ٣ \times ٦ = -١٣ \neq ٠$$ ■

مثال ٣

إذا كانت كل من المصفوفات التالية منفردة فأوجد قيم س، ص، ع

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & \text{ص} \\ \text{ص} & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{جـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ - \text{ع} \\ \text{ع} - ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

الحل

∵ أ منفردة

∴ $|\text{أ}| = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = ٢\text{س} + ٣ = ٠$ ∴ $\text{س} = -\frac{٣}{٢}$

، ∵ ب منفردة

∴ $\begin{vmatrix} ٣ & \text{ص} \\ \text{ص} & ٣ \end{vmatrix} =$ صفرًا

∴ $\text{ص}^٢ - ٩ = ٠$

∴ $(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ٣) = ٠$

∴ ص = ٣ أو ص = -٣

كذلك ح منفردة

$$\therefore \begin{vmatrix} ع - ٣ & ٢ \\ ٣ & ع - ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore (ع - ٣)(ع - ٢) - ٦ = ٠$$

$$ع^٢ - ٥ع + ٦ - ٦ = ٠$$

$$ع^٢ - ٥ع = ٠$$

$$ع(ع - ٥) = ٠$$

$$\therefore ع = ٠ \quad أو \quad ع = ٥$$

● العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة

The Identity Element Multiplication of Square Matrices

سنقصر الحديث هنا على المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية (٢ × ٢)

بفرض أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix}$ ، $\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} أ \times ١ + ب \times ٠ & أ \times ٠ + ب \times ١ \\ حـ \times ١ + د \times ٠ & حـ \times ٠ + د \times ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

بالمثل $\underline{و} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$

أي أن $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

وهذا يعني أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي "العنصر المحايد الضربي" للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية، ونسميها مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية.

• النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية:

The Multiplication Inverse of Square Matrix from Second Order

دعنا نناقش الآن إمكانية وجود نظير ضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تعريف

يكون للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية $\underline{\text{أ}}$ نظير ضربي إذا تعينت مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية $\underline{\text{ب}}$ بحيث يكون:

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ب}} \times \underline{\text{أ}} = \underline{\text{و}}$$

حيث $\underline{\text{و}}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية.

في ضوء هذا التعريف، إذا اعتبرنا المصفوفة:

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$$

فمتى يتعين لها نظير ضربي؟ وكيف نعينه إن وجد؟

لنفرض أن النظير الضربي $\underline{\text{أ}}^{-1}$ موجود، وليكن:

$$\underline{\text{أ}}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{أس} + \text{ب ع} & \text{أص} + \text{ب ل} \\ \text{جـ س} + \text{د ع} & \text{جـ ص} + \text{د ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ أس + ب ع = ١ ..... (١)

جـ س + د ع = ٠ ..... (٢)

أص + ب ل = ٠ ..... (٣)

جـ ص + د ل = ١ ..... (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن:

$$\text{س} = \frac{\text{ء}}{\text{أء} - \text{ب حـ}} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{-\text{حـ}}{\text{أء} - \text{ب حـ}}$$

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) نجد أن:

$$\text{ص} = \frac{-\text{ب}}{\text{أء} - \text{ب حـ}} \quad ، \quad \text{ل} = \frac{\text{أ}}{\text{أء} - \text{ب حـ}}$$

ويلاحظ أن س، ص، ع، ل تتعين إذا كان: $\text{أء} - \text{ب حـ} \neq ٠$

ولكن $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = \text{أء} - \text{ب حـ}$

∴ النظير الضربي $\underline{\text{أ}}^{-١}$ يتعين إذا كان $|\underline{\text{أ}}| \neq ٠$

وبفرض أن $|\underline{\text{أ}}| = \Delta$ (نقرأ دلتا)

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ء}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{-\text{ب}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ع} = \frac{-\text{حـ}}{\Delta} \quad ، \quad \text{ل} = \frac{\text{أ}}{\Delta}$$

ويكون $\underline{\text{أ}}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ء}}{\Delta} & \frac{-\text{ب}}{\Delta} \\ \frac{-\text{حـ}}{\Delta} & \frac{\text{أ}}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{١}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$

• النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة الثانية:

The Multiplication Inverse of Matrix from Second Order

تعريف

كل مصفوفة مربعة $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{bmatrix}$ محددها $\Delta \neq ٠$ يكون لها نظير ضربي هو المصفوفة

$$\underline{\text{أ}}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{bmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$$

مثال (٤)

عيّن النظير الضربي للمصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ إن وجد.

الحل

لاختبار وجود $ب^{-١}$:

$$\Delta = |ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١- \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - ٣ \times (-١) = ١٣ \neq ٠$$

∴ يتعين نظير ضربي للمصفوفة ب ، ويكون:

$$ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{١٣} & \frac{-٣}{١٣} \\ \frac{١}{١٣} & \frac{٢}{١٣} \end{bmatrix}$$

تدريب:

لاحظ ثم أكمل:

أ $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$

$|جـ| = \Delta = ...$

∴ $جـ^{-١}$.... (موجود أم غير موجود؟)

ب $هـ = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

$|هـ| = ...$

∴ $هـ^{-١}$....

∴ $هـ^{-١} = ...$

مثال (٥) حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\text{س} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \qquad (١)$$

الحل

بفرض أن:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

فتصبح المعادلة: $\text{س} \times \text{أ} = \text{ب}$ ..... (٢)

وحيث إن $|\text{أ}| = ٢ \times (-١) - ١ \times ٣ = -٥ \neq ٠$

$\therefore$ $\text{أ}^{-١}$ موجود

وبضرب طرفي المعادلة (٢) في $\text{أ}^{-١}$ من اليسار

$\therefore$ $(\text{س} \times \text{أ}) \times \text{أ}^{-١} = \text{ب} \times \text{أ}^{-١}$

$\therefore$ $\text{س} \times (\text{أ} \times \text{أ}^{-١}) = \text{ب} \times \text{أ}^{-١}$ (عملية الضرب تجميعية على المصفوفات)

$\therefore$ $\text{س} = \text{ب} \times \text{أ}^{-١}$

ولكن $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{-٥} & \frac{-٣}{-٥} \\ \frac{١}{-٥} & \frac{٢}{-٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٢ & ٠,٦ \\ ٠,٢ & -٠,٤ \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٠,٢ & ٠,٦ \\ ٠,٢ & -٠,٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠,٢ & ٠,٦ \\ ٠,٤ & -٠,٨ \end{bmatrix}$

٦ حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \text{س} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \qquad (١)$$

الحل

بفرض أن: $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

فإن المعادلة (١) تصبح على الصورة: $\text{أ} \cdot \text{س} = \text{ب}$ (٢)

ونلاحظ أن: $|\text{أ}| = ٢ - (-١) \times ٠ = ٢ \neq ٠$

$\therefore$ $\text{س} = \text{أ}^{-١} \times \text{ب}$ (لماذا؟)

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{٠}{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٢} \\ \frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣,٥ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

٤ - ٦

تمارين

١ أوجد قيمة س التي تجعل كلاً من المصفوفات التالية منفردة:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} س & ٩ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} س - ١ & ٢ \\ ٣ & س - ٢ \end{bmatrix}$$

٢ أكمل: إذا كانت $\underline{أ} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ فإن $\underline{أ} = ...$

٣ أثبت أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢- & ١٠ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ \frac{١}{٢} & ١- \end{bmatrix}$

٤ بين أي المصفوفات التالية مصفوفة منفردة، وأيها مصفوفة غير منفردة، ثم أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة غير منفردة منها:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$$

$$\underline{د} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{هـ} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{و} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

٥ حل كلاً من المعادلات المصفوفية التالية إن كان الحل ممكناً:

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

ب $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$

جـ $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤- & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

٤ - ٧

حل معادلتين خطيتين في متغيرين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

Solution of Two Linear Equation in Two Variable by Using Multiplication Inverse of Matrix

درسنا في السابق حل معادلتين خطيتين (من الدرجة الأولى) في متغيرين بالطريقة الجبرية وبالطريقة البيانية، والآن نعرض طريقة الحل باستخدام النظير الضربي للمصفوفة أو باستخدام المحددات.

• أولاً - طريقة الحل باستخدام النظير الضربي للمصفوفة:

Solution Method by Using Multiplication Inverse of Matrix

تعرضنا فيما سبق إلى حل معادلة مصفوفية على الصورة:

$\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$ (انظر مثال (٦))

وكنا نبدأ الحل بالضرب من جهة اليمين لكل من الطرفين في $\underline{أ}^{-1}$ بعد التحقق من أن للمصفوفة $\underline{أ}$ نظيرًا ضربيًا، فنحصل على:

$\underline{أ}^{-1} \times (\underline{أ} \times \underline{س}) = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$

$(\underline{أ}^{-1} \times \underline{أ}) \times \underline{س} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$ (لماذا؟)

$\underline{و} \times \underline{س} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$ (لماذا؟)

$\underline{س} = \underline{أ}^{-1} \times \underline{ب}$ (لماذا؟)

وقبل أن نشرح طريقة استخدام المصفوفات في حل معادلتين خطيتين في متغيرين دعنا نعرض كيف نعبر عنهما باستخدام المصفوفات:

نفرض المعادلتين:

$أ_1 س + ب_1 ص = جـ_1$ ..... (١)

$أ_2 س + ب_2 ص = جـ_2$

يمكن وضع المعادلتين على الصورة التالية (راجع تساوي مصفوفتين):

$$\begin{bmatrix} أ_١ س + ب_١ ص \\ أ_٢ س + ب_٢ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

والصورة الأخيرة يمكن أن تكتب على صورة ضرب مصفوفتين:

$$\begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{bmatrix} \qquad (٣)$$

وتسمى $\begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات،

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات،

$\begin{bmatrix} جـ_١ \\ جـ_٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

مثال (١)

أوجد باستخدام النظير الضربي للمصفوفة مجموعة حل المعادلتين:

س − ص = ٤

س + ٢ ص = ١

الحل

مصفوفة المعاملات هي $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، مصفوفة المتغيرات هي $\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ،

مصفوفة الثوابت هي $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$ والمعادلتان يمكن وضعهما على الصورة:

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} \qquad (٤)$$

أو $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - (-١) \times ١ = ٣ \neq ٠$$

$$\therefore \underline{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} \\ -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

وبضرب كل من الطرفين في المعادلة (٤) ومن جهة اليمين في $\underline{أ}^{-١}$

$$\therefore \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & -\frac{١}{٣} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$$

∴ مجموعة الحل هي {(٣ ، -١)}

سنختصر الحل نوعًا ما في المثال التالي:

مثال (٢) حل المعادلتين التاليتين باستخدام النظير الضربي للمصفوفة:

س + ص − ٣ = ٠

س = ص + ٥

الحل

نعيد ترتيب كل من المعادلتين لتأخذ الصورة:

س + ص = ٣

س − ص = ٥

∴ مصفوفة المعاملات $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ،

ومصفوفة المتغيرات $\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

∴ $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$

∴ $\underline{س} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}$

ولكن $\underline{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-١}{\Delta} & \frac{-١}{\Delta} \\ \frac{١}{\Delta} & \frac{-١}{\Delta} \end{bmatrix}$ ، حيث $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -٢$

$$\therefore \underline{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underline{س} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{(٤ ، -١)\}$

ملاحظة:

لاحظ أنه يتعين للمعادلتين الخطيتين في متغيرين حل وحيد عندما تكون مصفوفة المعاملات غير منفردة. أما إذا كانت مصفوفة المعاملات منفردة فإنه لا يتعين حل وحيد للمعادلتين.

مثلاً، مصفوفة المعاملات للمعادلتين:

٢س - ٣ص = ١

٤س - ٦ص = ٢

هي $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$ وهي منفردة، ذلك لأن $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٤ & -٦ \end{vmatrix} = ٠$

وعليه لا يتعين حل وحيد للمعادلتين.

وإذا تأملنا المعادلتين وجدناهما معادلتين لمستقيمين منطبقين. لماذا؟ تحقق من ذلك بيانيًا.

● ثانيا - طريقة الحل باستخدام المحددات

Solution Method by Using Determinants

لحل معادلتين مثل:

$\text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} = \text{جـ}_1$ ..... (١)

$\text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} = \text{جـ}_2$ ..... (٢)

جبريًا وبطريقة الحذف، يلزم ضرب الأولى في ب_2 والثانية في $-\text{ب}_1$ والجمع، فنحصل على:

$$\text{ب}_2 \text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ب}_1 \text{ص} = \text{ب}_2 \text{جـ}_1$$

$$-\text{ب}_1 \text{أ}_2 \text{س} - \text{ب}_1 \text{ب}_2 \text{ص} = -\text{ب}_1 \text{جـ}_2$$

$$(\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1) \text{س} = \text{ب}_2 \text{جـ}_1 - \text{ب}_1 \text{جـ}_2$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ب}_2 \text{جـ}_1 - \text{ب}_1 \text{جـ}_2}{\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1}$$ بشرط أن يكون $\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 \neq ٠$

أي أن:

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}}$$ ..... (٣)

حيث $\text{ب}_2 \text{جـ}_1 - \text{ب}_1 \text{جـ}_2 = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$ و $\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1 = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$

وبالمثل، إذا ضربنا المعادلة (١) في $-\text{أ}_2$ والمعادلة (٢) في أ_1 والجمع، نحصل على:

$$\text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}}$$ ..... (٤)

وإذا وضعنا $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$ حيث $\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{ب}_1 \text{أ}_2 \neq ٠$

، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$

ونحصل عليه بوضع الثابتين $حـ_١$ ، $حـ_٢$ بدلاً من معاملي س في محدد المعاملات Δ

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} حـ_١ & أ_١ \\ حـ_٢ & أ_٢ \end{vmatrix} ،$$

ونحصل عليه بوضع الثابتين $حـ_١$ ، $حـ_٢$ بدلاً من معاملي ص في محدد المعاملات Δ

فإن: $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$

مثال ٣ باستخدام المحددات حل المعادلتين:

٥س + ٢ص = ٤

٢س + ٣ص = -٥

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٥ - ٤ = ١١ \neq ٠$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{vmatrix} = ١٢ + ١٠ = ٢٢$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = -٢٥ - ٨ = -٣٣$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٢٢}{١١} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٣٣}{١١} = -٣$$

∴ مجموعة الحل هي {(٢ ، -٣)}

مثال ٤ باستخدام المحددات حل المعادلتين:

٣س + ٢ص = ٧

٦س + ٤ص = -٨

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$$

∴ لا يتعين حل وحيد.

وإذا تأملنا المعادلتين وجدناهما معادلتين لمستقيمين متوازيين (لماذا)؟

تدريب (١):

تحقق من نتيجة المثال السابق بيانيًا.

٥ باستخدام المحددات حل المعادلتين:

ص = ٤ − ٢س

س = ص − ٧

الحل

نرتب حدود كل من المعادلتين:

٢س + ص = ٤

س − ص = −٧

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} = -٢ - ١ = -٣ \neq ٠$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -٧ & -١ \end{vmatrix} = -٤ + ٧ = ٣$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & -٧ \end{vmatrix} = -١٤ - ٤ = -١٨$$

$$\therefore \text{ س} = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٣}{-٣} = -١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١٨}{-٣} = ٦$$

∴ مجموعة الحل = {(−١ ، ٦)}

تدريب (٢):

تحقق من نتيجة المثال السابق جبريًا وبيانيًا.

٤ - ٧ تمارين

أولًا - باستخدام النظير الضربي للمصفوفة حل المعادلتين في كل مما يلي:

١ ٣س − ٥ص = ٢
٢س − ص = ٣

٢ س − ص = ٣ص
٢س − ١٠ = ص

٣ س + ص = ٣
س − ص = ٥

٤ ٢س = ٣ص + ٣
ص = ١٠ − ٣س

٥ ٣ل + ٥م = ٨
٣ل − ٢م = ١

٦ ع − ٣ن = ٢
٢ع = ٦ن + ٣

٧ س + ص = ٠
ص − س = −٢

٨ ص = س
س = ٢

ثانيًا - باستخدام المحددات حل المعادلتين في كل مما يلي؛ ثم تحقق من صحة الإجابة جبريًا أو بيانيًا:

١ ٣س + ص = −١
س + ص = ٣

٢ ٢س − ص = ٧
س + ٢ص = ١

٣ ٢س − ص = ٢
٤س − ٢ص = ٥

٤ س + ٢ص = ١
٣س + ٦ص = ٣

ثالثًا - باستخدام المحددات حل المعادلتين في كل مما يلي:

١ ٥س + ٣ص − ٤ = ٠
٣س + ٢ص − ٣ = ٠

٢ ب + ٣حـ + ٢ = ٠
٢ب + ٦حـ − ٥ = ٠

٣ ٣م + ك = ٣
٥م = ٤ − ٢ك

٤ ٥هـ + ٣ط = ١
١٠هـ − ٦ط = ٧

٥ ٢ن − ٣لـ = ٩
−٤ن + ٦لـ = −١٨

٦ س = ٤
ص = س + ١٠

٤ - ٨ ملخص

Summary

- المصفوفة هي تنظيم مؤلف من م × ن من الأعداد الحقيقية موضوعة في م صفًا و ن عمودًا وتكون رتبة المصفوفة هي م × ن.

- المصفوفة دائمًا مستطيلة إلا إذا كان م = ن فهي مصفوفة مربعة.

- تتكون المصفوفة الأفقية من صف واحد والعمودية من عمود واحد.

- المصفوفة الصفرية جميع عناصرها أصفار.

- $\underline{أ} = (أ_{ى هـ})$ حيث $أ_{ى هـ}$ رمز لعنصر في المصفوفة $\underline{أ}$ يقع في الصف ى والعمود هـ.

- تكون المصفوفتان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما الرتبة نفسها، $أ_{ى هـ} = ب_{ى هـ}$ لكل ى ، هـ.

- لا يمكن جمع مصفوفتين إلا إذا كانتا من الرتبة نفسها، وتكون المصفوفة الناتجة من الجمع من الرتبة نفسها.

- عملية الجمع على المصفوفات إبدالية وتجميعية.

- المصفوفة الصفرية $\underline{٠}_{م \times ن}$ هي العنصر المحايد الجمعي للمصفوفات من الرتبة م × ن.

- لكل مصفوفة $\underline{أ}$ نظير جمعي هو $-\underline{أ}$ حيث $\underline{أ}$ ، $-\underline{أ}$ لهما الرتبة نفسها.

- $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$

- $ك\underline{أ} = (ك أ_{ى هـ})$ حيث $ك \in ح$

- إذا كانت $\underline{أ}$ من الرتبة م × ن ، $\underline{ب}$ من الرتبة ن × ر فإن $\underline{أ} \times \underline{ب} = \underline{جـ}$ حيث $جـ_{ى هـ} = أ_{ى ١} ب_{١ هـ} + أ_{ى ٢} ب_{٢ هـ} + \ldots\ldots + أ_{ى ن} ب_{ن هـ}$ وتكون $\underline{جـ}$ من الرتبة م × ر.

- لاحظ أنه لا يمكن تعيين $\underline{أ} \times \underline{ب}$ إلا إذا كان عدد أعمدة $\underline{أ}$ يساوي عدد صفوف $\underline{ب}$.

- ضرب المصفوفات هي عملية ليست إبدالية.

- محدد المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{bmatrix}$ هو $|\underline{أ}| = أ ء - ب حـ$

- المصفوفة المنفردة هي مصفوفة محددها يساوي صفرًا.

- العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية هو $\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (مصفوفة الوحدة).

- إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{bmatrix}$ ، $|\underline{أ}| = \Delta \neq ٠$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ هو

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{bmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{bmatrix}$$

- يمكن حل معادلتين خطيتين في متغيرين بطريقتين هما:

• أولًا - باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

نعين مصفوفة المعاملات $\underline{أ}$، مصفوفة المتغيرات $\underline{س}$، مصفوفة الثوابت $\underline{ب}$ فتكون

$\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$ ومنها $\underline{س} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{ب}$

• ثانيًا - باستخدام المحددات

$$س = \frac{\Delta_س}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta}$$

لاحظ أنه إذا كانت مصفوفة المعاملات منفردة (أي $\Delta = ٠$) فإنه لا يتعين حل وحيد للمعادلتين.

أودع بمركز المعلومات التربوية تحت رقم ٤٧ بتاريخ ١٤/٥/٢٠٠٠م

طبع بمطابع القبس التجارية

طبع بمطابع القسم التجارية